ΔΡΟΥΓΑΣ ΘΑΝΑΣΗΣ

Μαθη...μαγικα για διαγωνισμούς

ΔΙΑΓΩΝΙΣΤΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΓΙΑ ΜΑΘΗΤΕΣ





-Συνδυαστική

-Παίγνια

-Χρωματισμοί

-Αναλλοίωτες

-Θεωρία αριθμών

Περιέχει θέματα από:
-The American High School Mathematics Examination
-The International Mathematical Olympiad
-Tournament of Towns
-Balkan Mathematical Olympiad
-The American Regions Mathematics League
-Soviet Union Math Competitions
-Ελληνική εθνική Μαθηματική Ολυμπιάδα, Ε.Μ.Ε, (Αρχιμήδης)
-Wisconsin Mathematics, Engineering and Science Talent Search
-American Invitational Mathematics Examination
-USA Mathematical Talent Search
-Grade Five Competition from the Leningrad Mathematical Olympiad

«Οι περισσότεροι από μας (αναφέρεται στους δασκάλους των μαθηματικών) συνεχίζουν να διδάσκουν ορισμένα μέρη των στοιχειωδών μαθηματικών με έναν τρόπο που αποθαρρύνει τους μαθητές,δίνοντας τους την εντύπωση ότι η αριστεία στην μαθηματική επιστήμη αποτελεί ζήτημα μιας μεθοδολογίας τεχνασμάτων,ακόμα και ταχυδακτυλουργίας.Αντίθετα,ο μαθηματικός μοιάζει με τον ξυλοκόπο.Είμαστε μέσα σε ένα δάσος.Τα δέντρα του δεν θα πέσουν με μερικά δειλά χτυπήματα του τσεκουριού.Θα πρέπει να σηκώσουμε το διπλό τσεκούρι και το πριόνι,και να ελπίσουμε ότι οι μύες μας είναι άξιοι για αυτά.»

Michael Harris,«Μαθηματικά χωρίς απολογίες»

Διαγωνιστικά μαθηματικά για μαθητές
(Συνδυαστική,Παίγνια,Αναλλοίωτες,Χρωματισμοί)



Email:tdrougas11@gmail.com
Υποστηρικτικός δικτυακός τόπος:
►http://mathhmagic.blogspot.gr/
Social
►@m4qjEeeGrHjHhIs
►https://www.youtube.com/channel/UCAfs4zNCVFai9UfUhnTIVRA
►https://www.instagram.com/thanasesdrougas/
►https://www.facebook.com/thanasisdrougas/

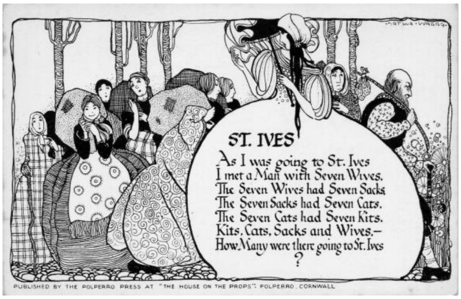
ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Για τα βίντεο των παραπομπών χρησιμοποίησα το πρόγραμμα Doodly,για τα σχήματα το πρόγραμμα People Builder και το PowerPoint ενώ για το εξώφυλλο το πρόγραμμα Canvas.

Αντί προλόγου

Τι γνωρίζουμε για το μέτρημα;Μια στοιχειώδης διανοητική διεργασία που μαθαίνουμε από παιδιά; Τι κάνουμε όταν μετράμε;Απαντούμε σε ερωτήματα όπως *«Πόσα πουκάμισα,πόσα μπλουζάκια ή πόσα ζευγάρια παπούτσια έχω στην ντουλάπα μου;»* Αν όμως στην ντουλάπα σας έχετε 14 παντελόνια,18 μπλουζάκια και 10 ζευγάρια παπούτσια τότε ναι,έχετε μετρήσει το πλήθος τους αλλά γνωρίζετε με πόσους τρόπους μπορούν να συνδυαστούν.Η απάντηση προβοκάρει την διαίσθηση,καθώς θα μπορούσατε να βγαίνετε καθημερινά με διαφορετικό συνδυασμό παντελονιού–μπλούζας-παπουτσιών για τα επόμενα 7 χρόνια.Τέτοιου είδους ερωτήματα εξετάζει ο κλάδος των μαθηματικών που ονομάζεται **Συνδυαστική απαρίθμηση** ή απλά **Συνδυαστική**.
Η Συνδυαστική είναι η διαδικασία απαρίθμησης των στοιχείων ενός συνόλου χωρίς να τα μετρήσουμε ένα προς ένα,είτε γιατί είναι εξαιρετικά χρονοβόρο είτε γιατί είναι ανέφικτο.Η τέχνη να μετράς με τον συντομότερο και γιατί όχι με τον κομψότερο τρόπο.

Μια πρώτη γεύση απαρίθμησης των στοιχείων ενός συνόλου,μας δίνει ένα παιδικό ποίημα το οποίο αναφέρει ο Howard Eves,στο βιβλίο του «*Μεγάλες στιγμές των μαθηματικών*».



«Καθώς πήγαινα στο Σαιντ Ιβς
Συνάντησα ένα άνδρα με επτά γυναίκες.
Κάθε γυναίκα κουβαλούσε επτά σάκους.
Κάθε σάκος είχε μέσα επτά γάτες.
Κάθε γάτα είχε επτά γατάκια.
Γατάκια,γάτες,σάκοι,και γυναίκες.
Πόσοι πηγαίνουν στο Σαιντ Ιβς;»

Προφανώς,ο τελευταίος στίχος αποτελεί την λύση του γρίφου.Μόνο ο αφηγητής πήγαινε στο Σαιντ Ιβς έτσι η απάντηση είναι ένα.Η γοητεία αυτού παιδικού ποιήματος έγκειται στο γεγονός ότι από την εκφώνηση του ανακύπτουν μερικά πολύ ενδιαφέροντα ερωτήματα.Για παράδειγμα,πόσοι έρχονταν από το Σαιντ Ιβς.
Παρατηρούμε ότι:

Άνδρας	1	1
Γυναίκες	7	7
Σάκοι	7x7	49
Γάτες	7x7x7	343
Γατάκια	7x7x7x7	2401
Σύνολο		2801

Τα προβλήματα απαρίθμησης για πολλά χρόνια βρίσκονταν στις παρυφές των μαθηματικών,εμφανίζονταν με την μορφή έξυπνων γρίφων και σπαζοκεφαλιών ως ψυχαγωγικα μαθηματικά (Recreational Mathematics).Μόλις τον εικοστό αιώνα πήραν την θέση τους ως ξεχωριστός μαθηματικός κλάδος στα διακριτά μαθηματικά και βρήκαν εφαρμογή σε κάθε επιστημονικό πεδίο.Εγώ όμως θα σταθώ στο γεγονός ότι μπορούν να τεθούν σε οποιονδήποτε δίχως να απαιτείται από μέρους του παρά ένα ελάχιστο μαθηματικό υπόβαθρο,πλην όμως μπορουν να γίνουν απαιτητικά και εξόχως ενδιαφέροντα.

Σε συνδυασμό με τα προβλήματα παιγνίων, τους χρωματισμούς και τη Γεωμετρία συνιστούν τα πλέον εθιστικά θέματα σε μαθηματικούς διαγωνισμούς.Πρόκειται για προβλήματα που συνήθως δεν είναι τετριμμένα αλλά απαιτούν κάποιο ποσοστό ανεξάρτητης σκέψης,κρίσης, πρωτοτυπίας και δημιουργικότητας. Προβλήματα που πραγματεύονται θέματα,όπως:

-Πόσοι είναι οι περιττοί δεκαψήφιοι αριθμοί με διαφορετικά ψηφία;
-Πόσα τετράγωνα έχει μια κοινή σκακιέρα;
-Είναι οι αναγραμματισμοί της λέξης «Αναγραμματισμός» περισσότεροι από τους κατοίκους στην Ασιατική Ήπειρο;
-Σε πόσα κομμάτια το πολύ μπορούμε να κόψουμε μια πίτσα με ν ευθεία κοψίματα;
-Είναι δυνατό ένα βιβλίο μόλις δέκα σελίδων να περιέχει 100 τρισεκατομμύρια ποιήματα;
-Γιατί υπάρχουν τουλάχιστον 14 άνθρωποι (που δεν είναι φαλακροί) στην πόλη της Αθήνας οποίοι έχουν τον ίδιο αριθμό από τρίχες στο κεφάλι τους
-Πόσο μετράει ένας άνθρωπος στην διάρκεια της ζωής του;
-Μια κοινή τράπουλα 52 φύλλων μπορεί να ανακατευτεί με περισσότερους τρόπους από την ηλικία σε έτη του σύμπαντος σε δευτερόλεπτα.
-Πότε το έτος γέννησης σας έχει πολλαπλάσιο που αποτελείται μόνο από άσσους;
-Με πόσους τρόπους μπορεί να διαβαστεί η πρόταση «Ο Θεός είναι παντού»;
-Γιατί σε οποιαδήποτε παρέα 6 ατόμων,είτε 3 από αυτούς γνωρίζουν ο ένας τον άλλο, είτε 3 από αυτούς είναι μεταξύ τους άγνωστοι.
-Σε ποιες περιπτώσεις για να λύσουμε ένα πρόβλημα τα βάφουμε μαύρα;
-Γιατί όσοι παίζουν τζόκερ «κάνουν» παιχνίδι με μια τράπουλα επτάμιση χιλιομέτρων;
-Πόσες είναι οι μη αρνητικές λύσεις της εξίσωσης $x+y+z=2022$;
-Αν ο κωδικός ασφαλείας ενός συστήματος συναγερμού αποτελείται από 4 αριθμητικά ψηφία και 3 γράμματα του ελληνικού αλφαβήτου, πόσες δοκιμές το πολύ πρέπει να κάνει ένας επίδοξος διαρρήκτης για να απενεργοποιήσει τον συναγερμό;
-Ποια είναι η στρατηγική Tweedledum-Tweedledee;
-Σε πόσες εκατοντάδες χρόνια ένας χιμπατζής θα γράψει «Να ζει κανεις ή να μην ζει;»
-Γιατί το άθροισμα του πλήθους των φίλων όλων των εγγεγραμμένων χρηστών του Facebook κάθε χρονική στιγμή είναι άρτιος αριθμός.

Η Συνδυαστική εξετάζει ερωτήματα που αναδεικνύουν την αισθητική ποιότητα που διαθέτουν τα στοιχειώδη μαθηματικά όταν τα απαλλάξουμε από τον πανταχού παρόντα αλγοριθμικό τους χαρακτήρα,μια απολύτως βολική τροχοπέδη στην σχολική μαθηματική εκπαίδευση τα τελευταία χρόνια.Διότι,η απαισιόδοξη αλήθεια είναι, ότι τα μαθηματικά προβλήματα είναι εξορισμένα από το σχολικό περιβάλλον.Περιχαρακώνουμε τα παιδιά σε μια μικρή ύλη, που ελέγχεται μόνο με ασκήσεις,ελάχιστο και ανεπαρκές εφόδιο για την μαθηματική τους εξέλιξη. Ήδη σας ακούω να ρωτάτε:*Οι πανελλαδικές εξετάσεις δεν σφυρηλατούν μαθηματικό χαρακτήρα;*Ποιος μπορεί να αγνοήσει ότι στο σχολικό βιβλίο των μαθηματικών της Γ λυκείου εμφανίζονται με την λάμψη ενός μαθηματικού αστέρα ο Ρόλ και ο Μπολτζάνο και αγνοούνται ο Νεύτωνας ή ο Αρχιμήδης.Ποιος επίσης μπορεί να αγνοήσει την θεοποίηση της μεθοδολογίας και του μαθηματικού μπούσουλα για την επίλυση υπερβολικά «τεχνικών» ασκήσεων.Μια απολύτως αναχρονιστική μονοδρόμηση της μαθηματικής σκέψης και της ευρετικής ικανότη-

τας των μαθητών.Αν είναι έτσι τα πράγματα,για ποιον έχουν γραφτεί οι επόμενες σελίδες;Διδάσκω μαθηματικά κοντά είκοσι χρόνια και παράλληλα διατηρώ ένα ιστολόγιο μαθηματικού ενδιαφέροντος τα τελευταία δώδεκα χρόνια,Θεωρώ τον εαυτό μου πολύ τυχερό που μέσω αυτών των δυο δραστηριοτήτων συνάντησα εξαιρετικούς μαθητές-μαθήτριες που είχαν ποιότητα και κυρίως γόνιμη περιέργεια, να αναζητούν,να μελετούν και να αγωνίζονται να μάθουν.Τα μαθηματικά γίνονται κτήμα περισσότερο με την επιμονή και την θέληση παρά με την ευφυΐα.Αυτές οι νησίδες ελπίδας είναι οι τελικοί δέκτες του παρόντος.Τα παιδιά που μαθαίνουν πάρα τις «άοκνες» προσπάθειες μας.Έχω αποφύγει εξεζητημένο μαθηματικό συμβολισμό και ιδιαίτερη θεωρητική εμβάθυνση και θέλω να πιστεύω ότι κλιμάκωσα έννοιες και προβλήματα στοχεύοντας στην διαδικασία εύρεσης και ανάπτυξης της λύσης ώστε να μπορεί να γίνει κατανοητή από μαθητές γυμνασίου και των πρώτων τάξεων του λυκείου.Στο πρώτο μέρος του βιβλίου αναπτύσσονται οι βασικές έννοιες της Συνδυαστικής,ακολούθως στο δεύτερο έχει ενσωματωθεί μια διαγωνιστική εργαλειοθήκη για προβλήματα παιγνίων,χρωματισμών και αναλλοίωτων και στο τρίτο μέρος σταχυολόγησα προβλήματα από Ελληνικούς αλλά και διεθνείς μαθηματικούς διαγωνισμούς.Δεν σας κρύβω ότι πάντα διασκεδάζω όταν συναντώ ένα κομψό και ευφυές πρόβλημα,μικρή σημασία έχει αν τελικά θα καταφέρω να το λύσω,αναμφίβολα υπάρχει μια εμμονική απόλαυση στην αναζήτηση της λύσης,ξεκαθαρα μια ακόμα περίπτωση που το Καβαφικό ταξίδι διατηρεί την αναλογία του.Άλλωστε,δεν υπάρχουν και πολλά πράγματα στη ζωή που μπορούν να έχουν τέτοια εκμαυλιστική επίδραση στον ανθρώπινο νου και συνάμα να είναι τόσο διασκεδαστικά όσο μια καλοστημένή μαθηματική πρόκληση.Ξέρω ότι εφόσον κρατάτε στα χέρια σας τούτο το μικρό βιβλιαράκι ήδη γνωρίζετε σε τι αναφέρομαι. Καλή διασκέδαση!

Αθήνα,Δεκέμβριος 2021 ,Δρούγας Αθανάσιος

Αντιστοιχία 1-1

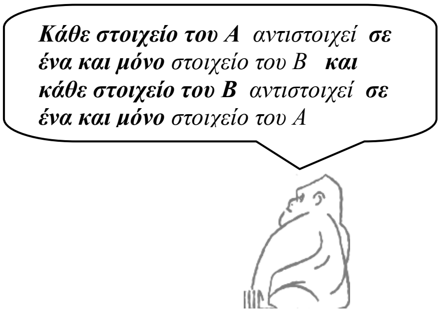
-Πόσες ανηφόρες υπάρχουν;
-Όσες και οι κατηφόρες!

Πότε δυο σύνολα Α και Β έχουν τον ίδιο αριθμό στοιχείων; Πριν δώσουμε την απάντηση ας θυμηθούμε τον παππού Όμηρο.Στην Οδύσσεια εξιστορείται ότι όταν ο Οδυσσέας τύφλωσε τον μονόφθαλμο κύκλωπα Πολύφημο στο νησί των κυκλώπων,ο άτυχος γέρο κύκλωπας ήταν υποχρεωμένος να κάθεται στο πρωί στην είσοδο της σπηλιάς του και να παίρνει από ένα σωρό ένα βότσαλο για κάθε πρόβατο που έβγαινε έξω από την σπηλιά.Έπειτα το βράδυ, όταν τα πρόβατα γύριζαν, πετούσε ένα βότσαλο για κάθε πρόβατο που έμπαινε στην σπηλιά.Με αυτόν τον τρόπο αφού εξαντλούσε όλα τα βότσαλα που είχε συγκεντρώσει το πρωί, ήταν σίγουρος ότι όλα τα πρόβατα είχαν γυρίσει.Ο κύκλωπας μετρούσε δίχως καν να χρησιμοποιήσει αριθμούς,απλά αντιστοίχιζε κάθε πρόβατο με ένα βότσαλο.Ένα προς ένα,τα βότσαλα αντιστοιχίζονταν με τα πρόβατα.Όσα τα βότσαλα τόσα και τα πρόβατα.Επανερχόμαστε στο αρχικό μας ερώτημα.

Πότε λοιπόν δυο σύνολα Α και Β έχουν τον ίδιο αριθμό στοιχείων;

Για παράδειγμα,Θεωρούμε τα σύνολα Α={2,3,5,9,11} και Β={23,45,6,1,5}, το καθένα αποτελείται από πέντε στοιχεία άρα έχουν τον ίδιο αριθμό στοιχείων.Αν όμως τα πλήθη των συνόλων Α και Β ήταν πολύ περισσότερα είτε τα στοιχεία τους δίνονταν περιγραφικά τότε δεν θα αρκούσε μια ματιά.Τι κάνουμε; Αντιστοιχίζουμε **κάθε** στοιχείο του Α με **ακριβώς ένα** στοιχείο του Β.

2	**3**	**5**	**9**	**11**
$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$
23	**45**	**6**	**1**	**5**



Πινγκ Πονγκ,πίθηκος που μετράει…

Παρατηρούμε ότι δεν περισσεύει κανένα στοιχείο του Β,άρα τα δυο σύνολα έχουν τον ίδιο αριθμό στοιχείων.Πως το το γενικεύουμε;

Αν υπάρχει μια αντιστοιχία μεταξύ των στοιχείων δυο συνόλων Α και Β ,ώστε σε* κάθε στοιχείο του Α *αντιστοιχεί* ένα και μόνο στοιχείο του Β *και αντίστροφα,τότε η αντιστοιχία λέγεται πλήρης ή 1-1.

Αν μεταξύ των στοιχείων δυο συνόλων Α και Β ορίζεται μια πλήρης αντιστοιχία, τότε θεωρούμε ότι τα σύνολα αυτά έχουν ίσο πλήθος στοιχείων και γράφουμε Ν(Α)=Ν(Β).Το πλήθος των στοιχείων του συνόλου Α λέγεται **πληθικός αριθμός ή πληθάριθμος** ή **ισχύς** του συνόλου Α και συμβολίζεται ως Ν(Α) ή $|A|$.

Άμεση συνέπεια είναι ότι για να μετρήσουμε τα στοιχεία ενός συνόλου αρκεί να αποκαταστήσουμε μια τέλεια ή πλήρη αντιστοιχία με το σύνολο των φυσικών αριθμών (εξαιρούμε το μηδέν).(Bijection Principle)

Ας δούμε μερικά παραδείγματα:

1.Μας ζητούν να μετρήσουμε πόσα είναι τα πολλαπλάσια του 13 μεταξύ 1 και 1000.(συμπεριλαμβανομένων των 1 και 1000)

Λύση

Οι αριθμοί που είναι πολλαπλάσια του 13 μεταξύ 1 και 1000 έχουν την μορφή 13ν όπου ν θετικός ακέραιος άρα θα ισχύει $1 \le 13\nu \le 1000$ ή $\frac{1}{13} \le \nu \le \frac{1000}{13}$ ή $0,076 \le \nu \le 76,9$ αλλά ν είναι θετικός ακέραιος οπότε $1 \le \nu \le 76$

Οι ζητούμενοι αριθμοί είναι $1 \cdot 13,\ 2 \cdot 13,\ 3 \cdot 13, ..., 76 \cdot 13$ και βρίσκονται σε τέλεια αντιστοιχία με τους 1,2,3,…,76. Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι υπάρχουν 76 πολλαπλάσια του 13 από το 1 μέχρι το 1000. ■

2.Σε ένα τουρνουά αγώνων σκακιού συμμετέχουν 50 σκακιστές από διάφορες χώρες.Αγωνίζονται κατά ζεύγη-που προκύπτουν με κλήρωση- σε αγώνες Νοκ άουτ,όπου κάθε φορά ο νικημένος αποσύρεται και αγωνίζεται μόνο ο νικητής σε επόμενο αγώνα αντιμετωπίζοντας άλλο σκακιστή.Αν δεν υπήρξαν ισοπαλίες,πόσοι ακριβώς αγώνες πρέπει να γίνουν για να αναδειχτεί ο τελικός νικητής;

Λύση

Στο τέλος του τουρνουά απομένει ένας και μοναδικός νικητής ενώ ο καθένας από τους 49 υπολοίπους έχει νικηθεί σε κάποιο παιχνίδι.Ο τελικός νικητής αναδεικνύεται τότε και μόνο, όταν υπάρχουν 49 νικημένοι, καθένας εκ των οποίων έχει νικηθεί σε ένα και μοναδικό αγώνα, μετά τον οποίο αποσύρθηκε. Οι αγώνες που γίνονται βρίσκονται σε μια 1-1 αντιστοιχία με τους νικημένους άρα λοιπόν γίνονται ακριβώς 49 αγώνες για την ανάδειξη του τελικού νικητή του τουρνουά. ■

Υπάρχουν προβλήματα που αφορούν την σύγκριση του πλήθους των στοιχείων δυο συνόλων και η 1-1 αντιστοιχία είναι ο συντομότερος δρόμος,καμιά φορά και μονόδρομος.Δείτε το ακόλουθο διαγωνιστικό πρόβλημα:

3.*Το σύνολο Α αποτελείται από τριψήφιους ακεραίους (000 έως 999) με το ψηφίο των δεκάδων των ακεραίων μικρότερο από τα άλλα δυο ψηφία,το σύνολο Β αποτελείται από τριψήφιους ακεραίους (000 έως 999) με το ψηφίο των δεκάδων μεγαλύτερο από τα άλλα δυο ψηφία.Ποιο σύνολο από τα δυο (Α ή Β) έχει περισσότερα στοιχεία;*

(Lomonosov Academic Tournament 1996)

Θα χρησιμοποιήσουμε την 1-1 αντιστοιχία.Έστω τυχαίος τριψήφιος x=αβγ που ανήκει το Α,θεωρούμε τον αριθμό x ως μια διατεταγμένη τριάδα (α,β,γ) και η οποία αντιστοιχίζεται με μια 1-1 αντιστοιχία με την τριάδα (9-α,9-β,9-γ) που ανήκει στο Β.Συνεπώς τα δυο σύνολα έχουν τον ίδιο αριθμό στοιχείων. ■

Στην συγκεκριμένη ευρετική τεχνική θα επανέλθουμε στην τελευταία ενότητα με τα διαγωνιστικά προβλήματα.

Αρχή εγκλεισμού–αποκλεισμού *(Inclusion–exclusion principle)*

Αρχικά ας υπενθυμίσουμε –όχι ότι δεν τα ξέρετε-κάποιες έννοιες από τα σύνολα.

Ένωση δυο συνόλων Α,Β ονομάζεται το σύνολο που περιέχει όλα τα στοιχεία και των δυο συνόλων, επιλεγόμενα μια φορά.Συμβολίζεται $A \cup B$.

Τομή δυο συνόλων Α,Β ονομάζεται το σύνολο που περιέχει τα κοινά στοιχεία και των δυο συνόλων. Συμβολίζεται $A \cap B$.

Για παράδειγμα ,αν δοθούν τα σύνολα Α={1,3,6,7,9}, Β={2,3,6,7,10,12} τότε $A \cup B = \{1,2,3,6,7,9,10,12\}$, $A \cap B = \{3,6,7\}$

Με το σύμβολο $|A|$ ή $N(A)$ ορίζουμε το πλήθος των στοιχείων του συνόλου Α. Στο προηγούμενο παράδειγμα ισχύει ότι $N(A)=5, N(B)=6$.

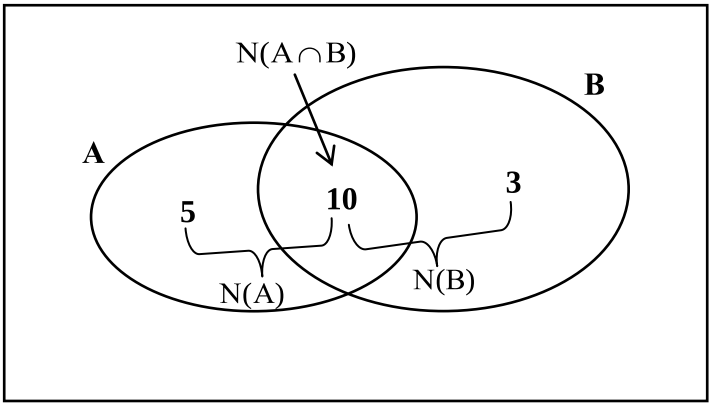
Τι αφορά η Αρχή εγκλεισμού-αποκλεισμού;

Σε μια σχολική τάξη 20 μαθητών είναι γνωστό ότι 15 μιλούν Αγγλικά, 13 μιλούν Γαλλικά και 10 μιλούν Αγγλικά και Γαλλικά. Πόσοι μαθητές μιλούν τουλάχιστον μια από τις δυο γλώσσες;

Έστω $N(A), N(B)$ το πλήθος των μαθητών που μιλούν Αγγλικά και Γαλλικά αντίστοιχα, τότε $N(A \cap B)$ το πλήθος των μαθητών που μιλούν Αγγλικά και Γαλλικά.

Ισχύει: $N(A)=15, N(B)=13$, $N(A \cap B)=10$,αναζητούμε το πλήθος $A \cup B$.

Παρατηρούμε ότι το άθροισμα των πληθών των στοιχείων των Α και Β είναι μεγαλύτερο από το συνολικό πλήθος της τάξης. Θα παραστήσουμε τα δεδομένα της άσκησης σχηματικά,θα χρησιμοποιήσουμε τα καλούμενα διαγράμματα του Venn.Πρόκειται για ελλειψοειδή (οβάλ) σχήματα,τα οποία παριστάνουν σύνολα,τα στοιχεία τους και πως αυτά συνδέονται μεταξύ τους μέσω των στοιχείων και του πλήθους τους.



Από το σχήμα είναι σαφές ότι:

$$N(A \cup B) = N(A) + N(B) - N(A \cup B) \quad \text{ή} \quad N(A \cup B) = 15 + 13 - 10 = 18$$

Η αρχή εγκλεισμού-αποκλεισμού *(Inclusion–exclusion principle)* γενικεύεται και διατυπώνεται ως εξής:

$$N(A \cup B) = N(A) + N(B) - N(A \cup B)$$, Α,Β πεπερασμένα σύνολα

Για να υπολογίσουμε το πλήθος των στοιχείων της ένωσης δυο συνόλων αρκεί να αφαιρέσουμε από το άθροισμα των στοιχείων των δυο συνόλων,το πλήθος των κοινών τους στοιχείων,διότι αυτά έχουν μετρηθεί δυο φορές.Ισχύει και για περισσότερα από δυο σύνολα.

$$\mathrm{N}(\mathrm{A}\cup\mathrm{B}\cup\Gamma)=\mathrm{N}(\mathrm{A})+\mathrm{N}(\mathrm{B})+\mathrm{N}(\Gamma)-\mathrm{N}(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})-\mathrm{N}(\mathrm{A}\cap\Gamma)-\mathrm{N}(\mathrm{B}\cap\Gamma)+\mathrm{N}(\mathrm{A}\cap\mathrm{B}\cap\Gamma)$$

Α,Β,Γ πεπερασμένα σύνολα

4.Παράδειγμα

Πόσοι φυσικοί αριθμοί από το 1 μέχρι το 100 είναι πολλαπλάσια του 3 ή του 5 ή του 8;

Λύση

Αναφερόμαστε μόνο σε φυσικούς αριθμούς από το 1 μέχρι το 100.
Έστω Α το σύνολο που αποτελείται από τα πολλαπλάσια του 3,Β το σύνολο που αποτελείται από τα πολλαπλάσια του 5 και Γ το σύνολο που αποτελείται από πολλαπλάσια του 8.
Αναζητούμε το $\mathrm{N}(\mathrm{A}\cup\mathrm{B}\cup\Gamma)$.
Τα πολλαπλάσια του 3 είναι της μορφής 3κ , κ φυσικός αριθμός, θα ισχύει:
$1\le 3\kappa\le 100 \Leftrightarrow \dfrac{1}{3}\le\kappa\le\dfrac{100}{3}\Leftrightarrow 0,33..\le\kappa\le 33,333$ κ φυσικός αριθμός άρα
$\mathrm{N}(\mathrm{A})=33$.Ομοίως βρίσκουμε ότι $\mathrm{N}(\mathrm{B})=20,\mathrm{N}(\Gamma)=12$.Επίσης,
$\mathrm{N}(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})=6,\mathrm{N}(\mathrm{A}\cap\Gamma)=4,\mathrm{N}(\mathrm{B}\cap\Gamma)=2,\mathrm{N}(\mathrm{A}\cap\mathrm{B}\cap\Gamma)=0$
Άρα,

$$\mathrm{N}(\mathrm{A}\cup\mathrm{B}\cup\Gamma)=\mathrm{N}(\mathrm{A})+\mathrm{N}(\mathrm{B})+\mathrm{N}(\Gamma)-\mathrm{N}(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})-\mathrm{N}(\mathrm{A}\cap\Gamma)-\mathrm{N}(\mathrm{B}\cap\Gamma)+$$
$$+\mathrm{N}(\mathrm{A}\cap\mathrm{B}\cap\Gamma)=33+20+12-4-2-6+0=53$$

Άρα οι αριθμοί που είναι πολλαπλάσια του 3 ή του 5 ή του 8 είναι 53. ■

Η πιο δημοφιλής τεχνική ευρετικής για την επίλυση ασκήσεων ή προβλημάτων είναι να προσπαθούμε να συσχετίσουμε την άσκηση ή το πρόβλημα με άλλες γνωστές.Δεν είναι πανάκεια,όμως εφαρμόζεται σε αρκετές περιπτώσεις.
Πως σκεφτόμαστε;
Ι.Προσπαθήστε να θυμηθείτε,μήπως η άσκηση είναι εντελώς ανάλογη με άλλη γνωστή σας.
ΙΙ.Προσπαθήστε να θυμηθείτε,μήπως μοιάζει κάπως με άλλη γνωστή σας.
ΙΙΙ.Μήπως είναι ειδική περίπτωση γνωστού σας προβλήματος;



Προσθετική αρχή, Πολλαπλασιαστική αρχή

«Υπάρχουν τρεις κατηγορίες ανθρώπων,αυτοί που ξέρουν να μετρούν και αυτοί που δεν ξέρουν….»

Προσθετική αρχή (Addition Principle)
Αν ένα σύνολο στοιχείων μπορεί να χωριστεί σε ένα πλήθος ν υποσυνόλων και καθένα από αυτά τα υποσύνολα περιέχει k_i στοιχεία με τον δείκτη i να παίρνει όλες τις τιμές 1,2,3,4,…,ν και τα υποσύνολα αυτά δεν συσχετίζονται μεταξύ τους τότε το πλήθος των συσχετίσεων μεταξύ των στοιχείων των υποσυνόλων είναι $k_1 + k_2 + ... + k_\nu$.
Εναλλακτικά,

Έστω ότι μια διαδικασία Φ μπορεί να χωριστεί στις φάσεις Α και Β, οι οποίες είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους, δηλαδή η μια δεν επηρεάζει την άλλη. Αν η φάση Α μπορεί να πραγματοποιηθεί κατά α τρόπους και η φάση Β κατά β τρόπους, τότε η διαδικασία Φ μπορεί να πραγματοποιηθεί κατά α+β τρόπους.(αναλόγως για περισσότερες φάσεις)

Παραδείγματα
5.Θέλουμε να κατασκευάσουμε μια κάρτα με ένα θετικό διψήφιο ακέραιο αριθμό ή ένα φωνήεν.Τότε, το πλήθος των διαφορετικών καρτών που μπορούμε να κατασκευάσουμε είναι 90 +7=97 (7 φωνήεντα και οι αριθμοί από 10 έως 99.) ■
6.Με πόσους τρόπους μπορούμε να επιλέξουμε ένα άτομο σε ένα σχολείο ανάμεσα σε 156 μαθητές και 160 μαθήτριες; Η απάντηση είναι 156+160=316 τρόπους. ■
7.Ο πατέρας του Γιαννάκη σκοπεύει να του κάνει δώρο ένα κατοικίδιο.Στο κατάστημα έχει να επιλέξει ανάμεσα σε 4 σκυλάκια,5 γατάκια και 2 παπαγάλους.Το πλήθος των διαφορετικών επιλογών είναι 4+5+2=11 ■
Πολλαπλασιαστική αρχή ή βασική αρχή απαρίθμησης (Multiplication Principle)

Αν μια διαδικασία Φ μπορεί να χωριστεί στις επιμέρους φάσεις $Φ_1, Φ_2, Φ_3, …, Φ_ν$.Αν η φάση Φ1 μπορεί να πραγματοποιηθεί κατά k_1 τρόπους και για καθένα από αυτούς η φάση Φ2 μπορεί να πραγματοποιηθεί κατά k_2 τρόπους και γενικά για καθεμία από τις προηγούμενες δυνατότητες η φάση $Φ_ν$ μπορεί να πραγματοποιηθεί κατά k_ν τρόπους τότε η διαδικασία Φ μπορεί να πραγματοποιηθεί κατά $k_1 \cdot k_2 ...... \cdot k_\nu$ τρόπους.

Είναι κρίσιμο να γίνει κατανοητή η πολλαπλασιαστική αρχή για αυτό θα την αποδομήσουμε σε μια σειρά από παραδείγματα.
8.Εχουμε ένα σύνολο από 16 είδη ρουχισμού όλα διαφορετικά μεταξύ τους, τα οποία είναι 6 παντελονια,3 πουκάμισα, 4 γραβάτες και 3 σακάκια.Με πόσους διαφορετικών τρόπους μπορεί να ντυθεί ο Παπαδόπουλος φορώντας ένα παντελόνι, ένα πουκάμισο,μια γραβάτα και ένα σακάκι.
Ας δούμε το παράδειγμα αναλυτικά.
Χωρίζουμε την διαδικασία επιλογής της ενδυμασίας *(παντελόνι, πουκάμισο, γραβάτα, σακάκι)* του Παπαδόπουλου σε 4 φάσεις(όσα και τα διαφορετικά είδη ρουχισμού).
Στην $1^η$ φάση επιλέγει παντελόνι και μπορεί να το κάνει με 6 διαφορετικούς τρόπους.

-Για καθένα από τους 6 τρόπους επιλογής παντελονιού επιλέγει στην $2^η$ φάση πουκάμισο με 3 διαφορετικούς τρόπους .Συνεπώς, για τα δυο τεμάχια ρουχισμού *(πουκάμισο ,παντελόνι)* ο Παπαδόπουλος έχει 6*3=18 επιλογές .
-Για καθεμία από τις 18 επιλογές δυο τεμαχίων ρουχισμού *(πουκάμισο ,παντελόνι)* πάμε στην $3^η$ τρίτη φάση όπου επιλέγει γραβάτα και μπορεί να το κάνει με 4 τρόπους άρα για τρία τεμάχια ρουχισμού *(πουκάμισο,παντελόνι,γραβάτα)* έχει 18*4=72 επιλογές.
-Για καθεμιά από τις 72 επιλογές τριών τεμαχίων *ρουχισμού (πουκάμισο,παντελόνι , γραβάτα)* πάμε στην $4^η$ φάση όπου επιλέγει σακάκι και μπορεί να το κάνει με 3 τρόπους άρα για τα τέσσερα τεμάχια ρουχισμού *(πουκάμισο,παντελόνι,γραβάτα,σακάκι)* έχει 72*3=216 επιλογές.
Η απάντηση μας θα μπορούσε να συνοψιστεί στο ακόλουθο σχήμα:

Επιλογές:	6 τρόποι	3 τρόποι	4 τρόποι	3 τρόποι
Τετράδα ενδυμασίας:	Παντελόνι	Πουκάμισο	Γραβάτα	Σακάκι

Τότε, το πλήθος των διαφορετικών τρόπων να ντυθεί ο Παπαδόπουλος φορώντας ένα παντελόνι, ένα πουκάμισο, μια γραβάτα και ένα σακάκι είναι $6\cdot3\cdot4\cdot3=216$ ■



Πινγκ Πονγκ,πίθηκος που νομίζει πως είναι αστείος…

9.Μια εταιρεία έχει δυο κενές θέσεις,μια λογιστή και μια αποθηκαρίου.Με πόσους τρόπους μπορούν να συμπληρωθούν οι θέσεις αυτές επιλέγοντας από 3 λογιστές και 2 αποθηκάριους.

Η διαδικασία επιλογής μπορεί να χωριστεί σε δυο διαδοχικές φάσεις:

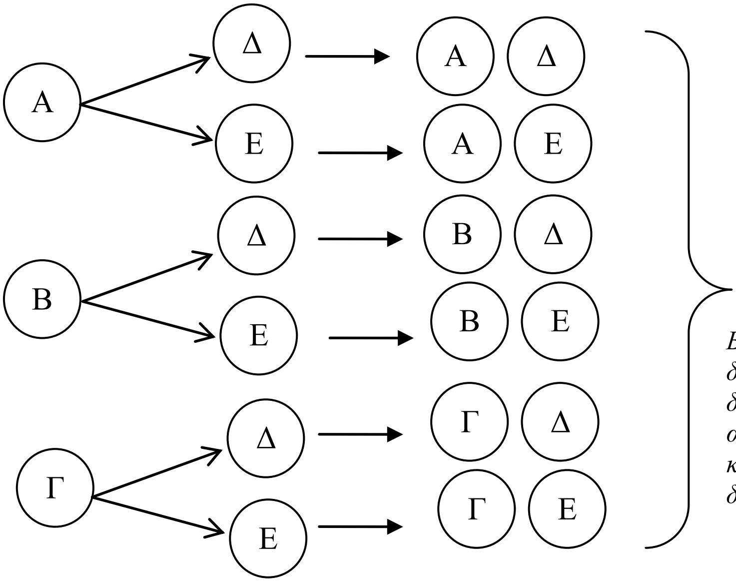
Φάση $1^η$:επιλογή λογιστή με 3 τρόπους.

Φάση $2^η$:επιλογή αποθηκαρίου με 2 τρόπους.

Επιλογές:	3 τρόποι	2 τρόποι
Ζεύγος υπάλληλων:	Λογιστής	Αποθηκάριος

Σύμφωνα με την πολλαπλασιαστική αρχή η παραπάνω διαδικασία μπορεί να πραγματοποιηθεί με $3 \cdot 2 = 6$.Το συγκεκριμένο παράδειγμα θα μπορούσε να λυθεί- πρόκειται μικρά νούμερα-και με χρήση δενδροδιαγράμματος.Αν Α,Β,Γ οι λογιστές και Δ,Ε οι αποθηκάριοι.

1η φάση 2η φάση Τρόποι



6 τρόποι

Βλέπουμε ότι με το δενδροδιάγραμμα δεν κάνουμε μόνο απαρίθμηση αλλά και καταγραφή των δυνατών τρόπων

■

10.Ποιο είναι το πλήθος των πινακίδων που μπορούμε να κατασκευάσουμε, αν μια πινακίδα αποτελείται από 3 συνεχόμενα γράμματα του ελληνικού αλφαβήτου και να ακολουθεί ένας μονοψήφιος μη μηδενικός θετικός ακέραιος αριθμός. ***Τα γράμματα μπορούν να επαναλαμβάνονται.***

ΠΙΝΑΚΙΔΑ

Επιλογές	24 τρόποι	24 τρόποι	24 τρόποι	9 τρόποι
Τετράδα πινακίδας	Γράμμα αλφαβήτου	Γράμμα αλφαβήτου	Γράμμα αλφαβήτου	Τα ψηφία 1,2,3,4,5,6,7,8, 9

Το πλήθος των πινακίδων που μπορούμε να κατασκευάσουμε,είναι
$24 \cdot 24 \cdot 24 \cdot 9 = 124416$

11.Σε μια δεξίωση παρευρέθησαν 19 άνδρες και 20 γυναίκες,χόρεψε κάθε άνδρας μια και μόνο φορά με κάθε γυναίκα. Πόσα ζευγάρια χόρεψαν;

Το ερώτημα που ανακύπτει είναι με πόσους τρόπους μπορούμε να επιλέξουμε ζεύγος (άνδρας–γυναίκα) που χορεύει.

Η διαδικασία επιλογής μπορεί να χωριστεί σε δυο διαδοχικές φάσεις:
Φάση 1η :επιλογή άνδρα με 19 τρόπους.

Φάση $2^η$:επιλογή γυναίκας με 20 τρόπους.

Επιλογές:	19 τρόποι	20 τρόποι
Ζεύγος	Άνδρας	Γυναίκα

Σύμφωνα με την πολλαπλασιαστική αρχή η παραπάνω διαδικασία μπορεί να πραγματοποιηθεί με $19 \cdot 20 = 380$ τρόπους. ■

12.Να βρείτε τους τρόπους με τους οποίους μπορούν 4 ταξιδιώτες να διανυκτερεύσουν σε 5 ξενοδοχεία:
i. χωρίς κανένα περιορισμό.
ii.χωρίς να διανυκτερεύσουν δυο στο ίδιο ξενοδοχείο.
iii. αν επιλέξουν όλοι το ίδιο ξενοδοχείο.

Λύση

i.Η διαδικασία επιλογής μπορεί να χωριστεί σε 4 διαδοχικές φάσεις :
Φάση $1^η$:επιλογή ξενοδοχείου του $1^{ου}$ ταξιδιώτη με 5 τρόπους.
Φάση $2^η$: επιλογή ξενοδοχείου του $2^{ου}$ ταξιδιώτη με 5 τρόπους.
Φάση $3^η$: επιλογή ξενοδοχείου του $3^{ου}$ ταξιδιώτη με 5 τρόπους.
Φάση $4^η$: επιλογή ξενοδοχείου του $4^{ου}$ ταξιδιώτη με 5 τρόπους.

Ταξιδιώτης	$1^{ος}$	$2^{ος}$	$3^{ος}$	$4^{ος}$
Ξενοδοχεία	5 τρόποι	5 τρόποι	5 τρόποι	5 τρόποι

Σύμφωνα με την πολλαπλασιαστική αρχή η παραπάνω διαδικασία μπορεί να πραγματοποιηθεί με $5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 5^4$ τρόπους.

ii.Η διαδικασία επιλογής μπορεί να χωριστεί σε 4 διαδοχικές φάσεις:
Φάση $1^η$:επιλογή ξενοδοχείου του $1^{ου}$ ταξιδιώτη με 5 τρόπους.
Φάση $2^η$:επιλογή ξενοδοχείου του $2^{ου}$ ταξιδιώτη με 4 τρόπους (δεν μπορεί να μείνει στο ξενοδοχείο του $1^{ου}$)
Φάση $3^η$: επιλογή ξενοδοχείου του $3^{ου}$ ταξιδιώτη με 3 τρόπους (δεν μπορεί να μείνει στο ξενοδοχείο του $1^{ου}$ και του $2^{ου}$)
Φάση $4^η$: επιλογή ξενοδοχείου του $4^{ου}$ ταξιδιώτη με 2 τρόπους (δεν μπορεί να μείνει στο ξενοδοχείο του $1^{ου}$ του $2^{ου}$ και του $3^{ου}$)

Ταξιδιώτης	$1^{ος}$	$2^{ος}$	$3^{ος}$	$4^{ος}$
Ξενοδοχεία	5 τρόποι	4 τρόποι	3 τρόποι	2 τρόποι

Σύμφωνα με την πολλαπλασιαστική αρχή η παραπάνω διαδικασία μπορεί να πραγματοποιηθεί με $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 120$ τρόπους.

iii.Η διαδικασία επιλογής μπορεί να χωριστεί σε 4 διαδοχικές φάσεις:
Φάση $1^η$:επιλογή ξενοδοχείου του $1^{ου}$ ταξιδιώτη με 5 τρόπους.
Φάση $2^η$: επιλογή ξενοδοχείου του $2^{ου}$ ταξιδιώτη με 1 τρόπο (πρέπει να μείνει στο ξενοδοχείο του $1^{ου}$)
Φάση $3^η$: επιλογή ξενοδοχείου του $3^{ου}$ ταξιδιώτη με 1 τρόπο (πρέπει να μείνει στο ξενοδοχείο του $1^{ου}$)

Φάση 4^{η} : επιλογή ξενοδοχείου του 4^{ου} ταξιδιώτη με 1 τρόπο (πρέπει να μείνει στο ξενοδοχείο του 1^{ου})

Ταξιδιώτης	1^{ος}	2^{ος}	3^{ος}	4^{ος}
Ξενοδοχεία	5 τρόποι	1 τρόπος	1 τρόπος	1 τρόπος

Σύμφωνα με την πολλαπλασιαστική αρχή η παραπάνω διαδικασία μπορεί να πραγματοποιηθεί με $5 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 = 5$ τρόπους. ■

13.Πόσοι τετραψήφιοι αριθμοί υπάρχουν με διαφορετικά ψηφία.

Πολλές φορές όταν χωρίζουμε μια διαδικασία σε ν φάσεις και για την πραγματοποίηση την (συμπλήρωση) κάποιας φάσης υπάρχει περιορισμός (ή περιορισμοί).

Τα ψηφία είναι 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9 (πλήθος 10).Εφόσον οι αριθμοί πρέπει να είναι τετραψήφιοι,υπάρχει ο περιορισμός το ψηφίο των χιλιάδων (πρώτο από αριστερά ψηφίο) να μην είναι ίσο με 0.

Χωρίζουμε την διαδικασία σχηματισμού ενός τέτοιου αριθμού σε 4 φάσεις.

-Στην πρώτη φάση επιλέγουμε το πρώτο από αριστερά ψηφίο. Αυτό μπορεί να γίνει με 9 τρόπους (το 0 δεν μπορεί να επιλεγεί, αφού τότε ο αριθμός θα ήταν το πολύ τριψήφιος).

-Στην δεύτερη φάση υποθέτουμε ότι η πρώτη φάση έχει ήδη εκτελεστεί και επιλέγουμε το δεύτερο από αριστερά ψηφίο. Αυτό μπορεί να γίνει με 9 τρόπους (υποψήφια τώρα είναι τα 10 ψηφία με εξαίρεση εκείνο που έχει ήδη επιλεγεί στην πρώτη φάση)

-Στην τρίτη φάση υποθέτουμε ότι οι δυο πρώτες φάσεις έχουν ήδη εκτελεστεί και επιλέγουμε το τρίτο από αριστερά ψηφίο με 8 τρόπους.

-Στην τέταρτη και τελευταία φάση υποθέτουμε ότι οι τρεις προηγούμενες φάσεις έχουν ήδη εκτελεστεί και επιλέγουμε το τέταρτο από αριστερά ψηφίο με 7 τρόπους.

Συνοπτικά έχουμε:

Επιλογές:	9 τρόποι	9 τρόποι	8 τρόποι	7 τρόποι
Τετράδα ψηφίων:	Ψηφίο χιλιάδων	Ψηφίο εκατοντάδων	Ψηφίο δεκάδων	Ψηφίο μονάδων

Άρα έχουμε συνολικά $9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 4536$ τρόπους.

■

14.Πόσους άρτιους τριψήφιους αριθμούς μπορούμε να σχηματίζουμε χρησιμοποιώντας τα ψηφία 2,3,4,6,7,9 αν δεν επιτρέπεται η επανάληψη ψηφίων.

Εφόσον οι αριθμοί πρέπει να είναι άρτιοι, υπάρχει ο περιορισμός το ψηφίο των μονάδων (το πρώτο από δεξιά ψηφίο) να είναι ένα από τα 2,6.Αν σκεφτούμε ακριβώς όπως το προηγούμενο παράδειγμα (συμπλήρωση από αριστερά προς τα δεξιά) δεν θα μπορούμε να υπολογίζουμε με πόσους τρόπους μπορεί να συμπληρωθεί το τρίτο από αριστερά στοιχείο, αφού δεν θα είναι γνωστό αν τα ψηφία 2,6 έχουν χρησιμοποιηθεί ή όχι στις προηγούμενες φάσεις. Για αυτό σκεπτόμαστε ως εξής:

Χωρίζουμε την διαδικασία συμπλήρωσης των τριών ψηφίων σε τρεις φάσεις και αρχίζουμε τη συμπλήρωση από το ψηφίο των μονάδων ,ως εξής:

● Στην $1^{η}$ φάση επιλέγουμε το πρώτο από δεξιά ψηφίο με 2 τρόπους (2 ή 6)
● Στην $2^{η}$ φάση επιλέγουμε το δεύτερο από δεξιά ψηφίο με 5 τρόπους
● Στην $3^{η}$ φάση επιλέγουμε το τρίτο από δεξιά ψηφίο με 4 τρόπους
Άρα από την βασική αρχή απαρίθμησης έχουμε $2 \cdot 5 \cdot 4 = 40$ τρόπους. ■

Ενίοτε χρησιμοποιούμε τόσο την προσθετική όσο και την πολλασιαστική αρχή.

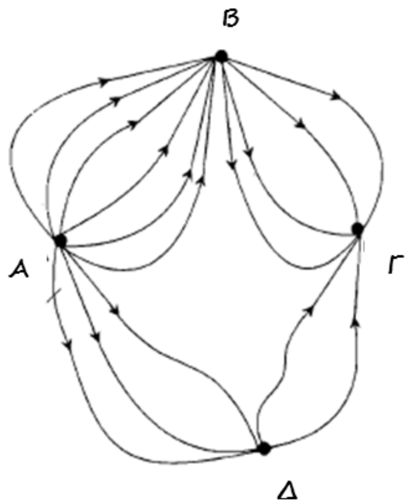
15.Στο ακόλουθο σχήμα βλέπουμε το οδικό δίκτυο του Αβγατηγανιστάν.Με πόσους τρόπους ένας ταξιδιώτης μπορεί να μεταβεί από την πόλη Α στην πόλη Γ;

Διακρίνουμε περιπτώσεις:

●Ας υποθέσουμε ότι ο ταξιδιώτης μεταβαίνει από την πόλη Α στην Γ μέσω της Β,με πόσους τρόπους μπορεί να το κάνει; Από την Α στην Β με 6 τρόπους ενώ από την Β στην Γ με 4 τρόπους άρα από την πολλαπλασιαστική αρχή η μετάβαση γίνεται $6 \cdot 4 = 24$ τρόπους.

● Αν τώρα μεταβεί από την πόλη Α στην Γ μέσω της πόλης Δ θα το κάνει με $3 \cdot 2 = 6$ τρόπους.

Από την προσθετική αρχή η μετάβαση γίνεται συνολικά με 24+6=30 τρόπους.



■

Οδηγίες ζωής από τον Πινγκ Πονγκ

Δίνεται:

Ένα λεωφορείο με κατεύθυνση τον Άγιο Δημήτριο,στην αφετηρία έχει επιβιβάσει 5 άντρες και 4 γυναίκες,στην πρώτη στάση ανεβαίνουν 2 άνδρες αποβιβάζονται 3 γυναίκες στην δεύτερη στάση επιβιβάζονται 4 γυναίκες και επιβιβάζονται 5 άνδρες και στην τρίτη στάση επιβιβάζονται 6 γυναίκες και αποβιβάζονται 3 άνδρες. Ποιος ήταν ο προορισμός του λεωφορείου.

Αν είχατε ήδη αρχίσει να υπολογίζετε,προσοχή:
Ποτέ δεν αρχίζεις να λύνεις ένα πρόβλημα αν δεν διαβάσεις όλη την εκφώνηση! Αυτονόητο;Δεν έχετε την παραμικρή ιδέα για το πόσοι άνθρωποι αγνοούν το...αυτονόητο.



16.Πόσοι τετραψήφιοι αριθμοί υπάρχουν οι οποίοι αποτελούνται από διαφορετικά ψηφία και είναι πολλαπλάσια του 5.

Λύση

Παρατηρούμε ότι στο πρόβλημα αυτό υπάρχουν δυο περιορισμοί:

● Το πρώτο από αριστερά ψηφίο (των χιλιάδων) να μην είναι μηδέν.

● Τα πρώτο από δεξιά ψηφίο (των μονάδων) να είναι 0 ή 5,ώστε ο αριθμός να είναι πολλαπλάσιο του 5.

Θα διακρίνουμε δυο περιπτώσεις:

1^{η} περίπτωση:Το πρώτο από δεξιά ψηφίο είναι το 0.Συμπληρώνουμε από δεξιά προς τα αριστερά και έχουμε $1\cdot 9\cdot 8\cdot 7=504$ αριθμούς.

2^{η} περίπτωση:Το πρώτο από δεξιά ψηφίο είναι το 5.Συμπληρώνουμε με την εξής σειρά:

● Επιλογή πρώτου από δεξιά ψηφιου (φάση1^{η}) με 1 τρόπο (θα είναι το 5).

● Επιλογή πρώτου από αριστερά ψηφίου (φάση 2^{η}) με 8 τρόπους (εξαιρούνται το 0 και το 5).

● Επιλογή του δευτέρου από αριστερά ψηφίου με 8 τρόπους (εξαιρούνται τα 2 ψηφία που έχουν ήδη επιλεγεί στις δυο προηγούμενες φάσεις).

● Επιλογή του τρίτου από αριστερά ψηφίου με 7 τρόπους (εξαιρούνται τα 3 ψηφία που έχουν ήδη επιλεγεί στις τρεις προηγούμενες φάσεις).

Χρησιμοποιώντας την βασική αρχή απαρίθμησης συμπεραίνουμε ότι έχουμε συνολικά $1\cdot 8\cdot 8\cdot 7=448$ τέτοιους αριθμούς.

Άρα συνολικά υπάρχουν 448+504=952 αριθμοί

Όταν χωρίζουμε σε επιμέρους φάσεις, τότε πολλαπλασιάζουμε τους τρόπους των φάσεων, ενώ όταν διακρίνουμε περιπτώσεις,τότε προσθέτουμε τους τρόπους των περιπτώσεων.



Εναλλακτικά θα μπορούμε να λύσουμε το πρόβλημα ως εξής:

● Ας υποθέσουμε ότι και το πρώτο από αριστερά ψηφίο επιτρέπεται να είναι 0.Τοτε θα είχαμε $2\cdot 9\cdot 8\cdot 7=1008$ τέτοιους αριθμούς (εκτελέσαμε την συμπλήρωση από δεξιά προς τα αριστερά)

● Θα βρούμε τώρα πόσοι από τους προηγούμενους αριθμούς αρχίσουμε με 0 (ώστε να εξαιρεθούν).Οι αριθμοί αυτοί είναι $1\cdot 1\cdot 8\cdot 7=56$

Άρα έχουμε 1008-56=952 τρόποι. ■

Ένα μαθηματικό βιβλίο δεν διαβάζεται απλώς,αλλά μελετάται με μολύβι και χαρτί. Να συμπληρώνετε παραληφθέντα βήματα στους υπολογισμούς,να επαληθεύετε αναπόδεικτους ισχυρισμούς και να λύνετε τα προτεινόμενα προβλήματα.Όλα αυτά θα τα κατακτήσετε βαθμιαία με μόχθο,επιμονή,επανάληψη και πείσμα.Μην φοβάστε να δοκιμάζετε,το λάθος είναι με το μέρος σας. *«Προσπάθησε ξανά, απότυχε ξανά, απότυχε καλύτερα!»,* προτρέπει ο Σάμιουελ Μπέκετ αλλά συμφωνεί και ο Πινγκ Πονγκ.



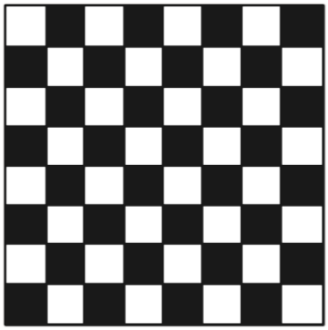
17. Με πόσους τρόπους μπορούμε να επιλέξουμε δυο τετράγωνα από μια σκακιέρα.

i.Αν αυτά έχουν διαφορετικό χρώμα.

ii.Αν δεν μας ενδιαφέρει το χρώμα τους.

iii.Όταν έχουν διαφορετικό χρώμα και πρέπει να ανήκουν σε διαφορετικές γραμμές και στήλες.

iv.Αν ανήκουν σε διαφορετικές γραμμές και στήλες αλλά δεν μας ενδιαφέρει το χρώμα.



Λύση

i.Σύμφωνα με την πολλαπλασιαστική αρχή υπάρχουν $32\cdot 32=1024$ περιπτώσεις .

ii.Από την πολλαπλασιαστική αρχή υπάρχουν $64\cdot 63=4032$ περιπτώσεις.

iii.Μπορούμε με 64 τρόπους να επιλέξουμε ένα τετράγωνο. Αφαιρούμε άλλα 14 τετράγωνα που βρίσκονται στην ίδια γραμμή ή στήλη με αυτό καθως και το τετράγωνο που επιλέξαμε αρχικά .Τώρα απομένουν 64-15=49 τετράγωνα.Από αυτά όμως μπορούμε να επιλέξουμε μόνο τα 25,διότι τα υπόλοιπα έχουν το ίδιο χρώμα με το αρχικό επιλεγμένο τετράγωνο.Συνολικά λοιπόν, υπάρχουν $64\cdot 25=1600$ περιπτώσεις επιλογής δυο τετραγώνων.

iv.Μπορούμε με 64 τρόπους να επιλέξουμε ένα τετράγωνο.Απομένουν 64-15=49 τρόποι επιλογής του δευτέρου τετραγώνου. Άρα,σύμφωνα με την πολλαπλασιαστική αρχή έχουμε $64\cdot 49$ περιπτώσεις.Όμως,κάθε δυάδα τετραγώνων έχει υπολογιστεί δυο φορές. Άρα ο συνολικός αριθμός είναι $32\cdot 49=1568$ περιπτώσεις.

Εναλλακτικά, μπορούμε να το χειριστούμε ως εξής:

Αν το πρώτο τετράγωνο επιλεγεί από την $1^{η}$ γραμμή της σκακιέρας τότε υπάρχουν $8\cdot 7\cdot 7$ τρόποι.Αν το πρώτο τετράγωνο επιλεγεί από την $2^{η}$ γραμμή ,(από την $1^{η}$ γραμμή δεν κάνουμε επιλογή τετραγώνου),τότε υπάρχουν $8\cdot 7\cdot 6$ τρόποι.

Με όμοιο τρόπο,αν επιλεγεί από την $3^{η}$ γραμμή υπάρχουν $8\cdot 7\cdot 5$ τρόποι.

Συνολικός αριθμός επιλογών:

$$8\cdot 7\cdot 7+8\cdot 7\cdot 6+8\cdot 7\cdot 5+...+8\cdot 7\cdot 1=8\cdot 7\cdot (7+6+5+...+1)=$$

$$=8\cdot 7\cdot 28=32\cdot 49=1568 \text{ τρόποι.}$$ ■

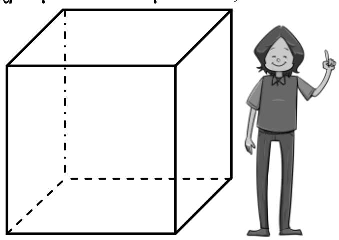
Να θυμάσαι ότι…

Τα μαθηματικά σαν αντικείμενο δεν προϋποθέτουν γρήγορη σκέψη.Δεν παίζετε σε τηλεπαιχνίδι! Ο Γάλλος μαθηματικός Laurent Schwartz-κάτοχος μεταλλίου Fields- στην αυτοβιογραφία του, έγραφε, ότι ένιωθε ηλίθιος στο σχολείο επειδή την ώρα των μαθηματικών αντιλαμβανόταν σχετικά αργά.Με τον χρόνο κατάλαβε ότι η ταχύτητα δεν είναι σημαντική. *«Αυτό που είναι σημαντικό είναι η εμβάθυνση στις έννοιες και η αντίληψη των δεσμών μεταξύ τους.Εκεί βρίσκεται η μαθηματική ευφυΐα.Το γεγονός της γρήγορης ή αργής προόδου είναι δευτερεύον.»*

18.Με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορούμε να χρωματίσουμε τις έδρες ενός κύβου με έξι διαφορετικά χρώματα αν κάθε χρώμα επιτρέπεται να χρησιμοποιηθεί μόνο μια φορά;(δυο χρωματισμοί θεωρούνται διαφορετικοί αν δεν προκύπτει ο ένας από τον άλλο με περιστροφή του κύβου)

Λύση

Περιστρέφοντας τον κύβο μπορούμε να υποθέσουμε ότι η κάτω έδρα είναι χρωματισμένη με το πρώτο χρώμα. Μετά έχουμε πέντε επιλογές για το χρώμα της πάνω έδρας (κάθε επιλογή δίνει διαφορετικό χρωματισμό). Από τα χρώματα που μένουν, επιλέγουμε το πρώτο διαθέσιμο χρώμα και περιστρέφοντας τον κύβο μπορούμε να υποθέσουμε ότι η μπροστινή έδρα είναι χρωματισμένη με αυτό. Μετά έχουμε τρεις επιλογές για την πίσω έδρα, δυο για την δεξιά έδρα, και μια για την αριστερή έδρα.



Συνολικά υπάρχουν 5*3*2*1=30 διαφορετικοί τρόποι.

Παρατηρουμε ότι η κάτω και η μπροστινή εδρα μας δίνει τον προσανατολισμό του κύβου. ■

Η προσθετική και η πολλαπλασιαστική αρχή σε συνδυασμό με την 1-1 αντιστοιχία παρότι εξαιρετικά απλές στην σύλληψη τους είναι πανίσχυρες στην εφαρμογή τους σε σύνθετα προβλήματα.Δείτε πέντε αγαπημένα προβλήματα.

19.Πόσα υποσύνολα έχει ένα σύνολο Α με ν στοιχεία;

Έστω το σύνολο Α={$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_\nu$} αντιστοιχίζουμε κάθε υποσύνολο του Α με μια διατεταγμένη ν-αδα με στοιχεία 0 και 1 ώστε να τοποθετούμε το 0 ή το 1 ανάλογα ,αν το αν το στοιχείο του Α ανήκει ή δεν ανήκει στο θεωρούμενο υποσύνολο .Για παράδειγμα, η διατεταγμένη ν-αδα (0,1,1,000….1) αντιστοιχεί στο υποσύνολο του Α {$\alpha_2,\alpha_3,\alpha_\nu$} ενώ η ν-αδα (0,0,0….0) στο $\varnothing$ και η (1,1,….1) αντιστοιχεί στο Α.Η αντιστοιχία είναι 1-1, συνεπώς τα υποσύνολα του Α είναι όσα και οι διατεταγμένες ν-αδες, άρα ,αρκεί να τις απαριθμήσουμε για να βρούμε το ζητούμενο.

Για μια ν-αδα που κάθε στοιχείο της παίρνει τιμές 0 ή 1 υπάρχουν σύμφωνα με την πολλαπλασιαστική αρχή $2\cdot 2\cdot 2\cdot\ldots\cdot 2=2^\nu$ διαφορετικές επιλογές.Έτσι καταλήξαμε ότι ένα σύνολο με ν στοιχεία έχει 2^ν στοιχεία. ■

Κάθε πτώχος πλην τίμιος γραφιάς γνωρίζει ότι οι σελίδες ενός βιβλίου δεν είναι ποτέ αρκετές,έτσι λοιπόν,πολλά προβλήματα που μου άρεσαν και δεν βρήκαν την θέση τους λόγω χώρου στο βιβλίο, τα οπτικοποίησα ως βίντεο σε μορφή whiteboard animation και τα ανέβασα στο κανάλι μου στο Youtube.Συνεπώς,συχνά πυκνά θα βρίσκετε στο τέλος των σελίδων γραμμωτούς κώδικες (Qr Code) που παραπέμπουν με σάρωση του έξυπνου κινητού τηλεφώνου σας σε επιπλέον προβλήματα.



20.Με πόσους τρόπους μπορούμε να μοιράσουμε 8 καραμέλες,5 τσίχλες και 6 γλειφιτζούρια σε δυο παιδιά,αν:
i.Δεν υπάρχει κανένας περιορισμός.
ii.Κάθε παιδί πρέπει να πάρει 3 τουλάχιστον καραμέλες,2 τουλάχιστον τσίχλες και 1 τουλάχιστον γλειφιτζούρι.

Λύση

Όλα τα γλυκά θα μοιραστούν στα δυο παιδιά.Αν λοιπόν το πρώτο παιδί πάρει 3 καραμέλες,τότε το δεύτερο θα πάρει κατ ‘ ανάγκη 5 καραμέλες .Άρα για την μοιρασιά των γλυκών σημασία έχει πόσα θα πάρει το ένα παιδί (διότι το άλλο θα πάρει τα υπόλοιπα)

i.Το ένα από τα δυο παιδιά μπορεί να πάρει 0 ή 1 ή 2 ή …. ή 8 καραμέλες. Άρα οι τρόποι με τους οποίους μπορούμε να μοιράσουμε τις καραμέλες είναι 9 (0,1,…,8)
Με όμοιο τρόπο βρίσκουμε ότι οι 5 τσίχλες μπορούν να μοιραστούν με 6 τρόπους (0,1,2,3,4,5) και τα γλειφιτζούρια με 7 (0,1,..,6) τρόπους. Άρα τα γλυκά θα μοιραστούν στα δυο παιδιά με $9\cdot 6\cdot 7=378$ τρόπους.

ii.Το ένα από τα δυο παιδιά μπορεί να πάρει 3 ή 4 ή 5 καραμέλες. Άρα οι τρόποι με τους οποίους μπορούμε να μοιράσουμε τις καραμέλες είναι :

3 τρόποι (3,4,5)

Το ένα από τα δυο παιδιά μπορεί να πάρει 2 ή 3 τσίχλες. Άρα οι τρόποι με τους οποίους μπορούμε να μοιράσουμε τις τσίχλες είναι:

2 τρόποι (2,3)

Το ένα από τα δυο παιδιά μπορεί να πάρει 1 ή 2 ή…ή 5 γλειφιτζούρια.Άρα οι τρόποι με τους οποίους μπορούμε να μοιράσουμε τα γλειφιτζούρια είναι:

5 τρόποι (1,2,3,4,5)

Άρα τα γλυκά θα μοιραστούν στα δυο παιδιά με $3\cdot 2\cdot 5=30$ τρόπους. ■

21.Να βρείτε το πλήθος των θετικών διαιρετών του αριθμού 1400, συμπεριλαμβανόμενου του 1 και του 1400.

Ο αριθμός 1400 με ανάλυση σε γινόμενο πρώτων παραγόντων γράφεται ως εξής :

$$1400=2^3 \times 5^2 \times 7$$

Άρα ένας θετικός ακέραιος μ είναι διαιρέτης του 1400 αν και μόνο αν έχει την μορφή μ=$2^{\alpha} \times 5^{\beta} \times 7^{\gamma}$ όπου $a,\beta \in \mathbb{N}^*$ τέτοιο ώστε $0\le \alpha \le 3, 0\le \beta \le 2, 0\le \gamma \le 1$.Άρα κάθε θετικός διαιρέτης του 1400 βρίσκεται σε ένα προς ένα αντιστοιχία με τη τριάδα (α,β,γ) όπου $\alpha \in \{0,1,2,3\}, \beta \in \{0,1,2\}, \gamma \in \{0,1\}$. Σύμφωνα με την βασική αρχή απαρίθμησης μπορούμε να επιλέξουμε τέτοιες δυάδες με 4*3*2=24 τρόπους .Άρα ο αριθμός 1400 έχει 24 διαιρέτες.

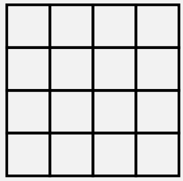
Γενικότερα, αποδεικνύεται ότι το πλήθος των διαιρετών ενός θετικού ακέραιου

$A=\pi_1^{\nu_1}\cdot \pi_2^{\nu_2}\cdot \pi_3^{\nu_3}\cdot \ldots \cdot \pi_\kappa^{\nu_\kappa}$ Είναι: $(\nu_1+1)(\nu_2+1)\cdot \ldots \cdot (\nu_\kappa+1)$ ■

Εφαρμογή του θέματος 21 έχει τεθεί ως διαγωνιστικό θέμα στον μαθηματικό διαγωνισμό Putnam,ο γραμμωτός κώδικας (Qr code) θα σας παραπέμψει στο κανάλι μου στο αντίστοιχο βίντεο με εκφώνηση-λύση.

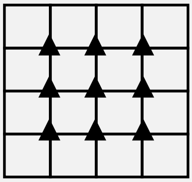


22.Τετράγωνο πλευράς 4 cm το χωρίζουμε με παράλληλες ευθείες σε 16 τετράγωνα πλευράς 1 cm όπως φαίνεται στο σχήμα. Πόσα συνολικά

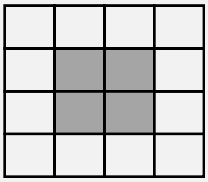


τετράγωνα με πλευρές παράλληλες προς τις αρχικές δημιουργούνται;

Τι είδους τετράγωνα δημιουργούνται και πως τα απαριθμούμε; Υπάρχουν χωρίς αμφιβολία 16 τετράγωνα πλευράς 1.Πόσα τετράγωνα πλευράς 2 υπάρχουν; Αρκεί να μετρήσουμε πόσα σημεία θα μπορούσαν να είναι κέντρα τετραγώνων πλευράς 2.(στο σχήμα 1 τα συμβολίζουμε με τρίγωνο ▼) πρόκειται για 9 σημεία άρα **έχουμε 9 τετράγωνα πλευράς 2 cm**.
Ομοίως για τα τετράγωνα πλευράς 3 μετράμε τα κεντρικά τους κελιά (στο σχήμα 2 τα χρωματίσαμε με γκρι χρώμα) άρα **έχουμε 4 τετράγωνα πλευράς 3 cm**.



Σχήμα 1



Σχήμα 2

Και δίχως αμφιβολία **έχουμε 1 τετράγωνο πλευράς 4 cm.Από** την προσθετική αρχή υπάρχουν συνολικά 16+9+4+1=30 τετράγωνα.
(Θα επανέλθουμε στο πρόβλημα να το γενικεύσουμεοταν εμπλουτισουμε το οπλοστάσιο μας με περαιτέρω τύπους.) ■

Ο Πινγκ Πονγκ υπερθεματίζει…

Άσκηση *είναι μια επαναλαμβανομένη πράξη που στοχεύει στην ενίσχυση αποκτηθείσας δεξιότητας.Η διαδικασία λύσης μιας άσκησης είναι μια επανάληψη γνωστών ενεργειών. Κατά βάση είναι μια μονοδιάστατη νοητική πράξη που εξαρτάται σε μεγάλο βαθμό από την μνήμη και την αυτοματοποιημένη επανάληψη αφομοιωμένων αντιδράσεων.*

Πρόβλημα *είναι κάθε εργασία για την όποια το άτομο που την αντιμετωπίζει θέλει ή έχει ανάγκη να την κάνει.*
▪ *Κάθε εργασία για την όποια το άτομο δεν έχει έτοιμη διαδικασία για να την εκτελέσει, δηλαδή να βρει λύση.*
▪ *Κάθε εργασία για την οποία το άτομο πρέπει να κάνει κάποια προσπάθεια να την εκτελέσει, δηλαδή να βρει την λύση.*

Ο Πινγκ Πονγκ μετά από την περιπέτεια του στην εφορία για την απόκτηση φορολογικής ενημερότητας προσθέτει:
Κάθε πρόβλημα σίγουρα έχει δυο λύσεις,η πιο σίγουρη είναι να το γράψεις στα παλιά σου τα παπούτσια!



23.i.Να βρείτε το πλήθος των μη αρνητικών ακέραιων λύσεων της εξίσωσης $x+y=8$.

ii.Να βρείτε το πλήθος των ακέραιων λύσεων της εξίσωσης $|x|+|y|=8$.

iii.Να βρείτε το πλήθος των ακέραιων λύσεων της εξίσωσης $|x|+|y|=\kappa$

(κ θετικός ακέραιος)

Λύση

i.Η τιμή του x καθορίζει μονοσήμαντα την τιμή του y ,για παράδειγμα, αν ο x είναι 5 για τον y υπάρχει μόνο μια τιμή 8-5=3,συνεπώς αρκεί να μετρήσουμε τις δυνατές τιμές του x και έχουμε απαντήσει στο αρχικό ερώτημα.

X		**Y**
0	⟷	8
1	⟷	7
2	⟷	6
3	⟷	5
4	⟷	4
5	⟷	3
6	⟷	2
7	⟷	1
8	⟷	0

Η παντοδυναμία της 1-1 αντιστοιχίας! Έχουμε αποκαταστήσει μια 1-1 αντιστοιχία των τιμών του x με το y=8-x. Αρκεί τώρα να μετρήσουμε τις διαφορετικές τιμές που λαμβάνει το x και έχουμε απαντήσει στο ερώτημα.



Οι δυνατές τιμές του x είναι: 0,1,2,3,4,5,6,7,8 συνεπώς οι θετικές ακέραιες λύσεις της εξίσωσης είναι 9.

ii.Ο x μπορεί να πάρει τις ακέραιες τιμές από -8 μέχρι 8 δηλαδή 17 τιμές.

Για x=8 και x=-8 έχουμε μια τιμή του y (y=0)

Για όλες τις άλλες ακέραιες τιμές του x από -7 μέχρι 7 (15 τιμές) έχουμε δυο τιμές του y, για παράδειγμα για το x=2 έχουμε y=4 ή y=-4

Συνολικά έχουμε: $2\cdot 15+1+1=32$ ζεύγη λύσεων.

iii.Με την βοήθεια του ερωτήματος (ii) γενικεύουμε:

Ο x μπορεί να πάρει τις ακέραιες τιμές από -κ μέχρι κ δηλαδή 2κ+1 τιμές.

Για x=κ και x=-κ έχουμε μια τιμή του y (y=0)

Για όλες τις άλλες ακέραιες τιμές του x από –(κ-1) μέχρι κ-1 (2(κ-1)+1 τιμές) έχουμε δυο τιμές του y.

Συνολικά έχουμε: $2\cdot(2(\kappa-1)+1)+1+1=2\cdot(2\kappa-1)+2=4\kappa-2+2=4\kappa$ ζεύγη λύσεων.

Καλό είναι να θυμάστε…

Για να διαπιστώσουμε αν ένας ακέραιος αριθμός διαιρείται ακριβώς από έναν άλλο, χωρίς να εκτελέσουμε την διαίρεση χρησιμοποιούμε ορισμένους κανόνες που ονομάζουμε κριτήρια διαιρετότητας.

Τα πιο γνωστά κριτήρια είναι:

-Ένας ακέραιος διαιρείται ακριβώς με το 2, αν το τελευταίο του ψηφίο είναι 0 ή 2 ή 4 ή 6 ή 8 (δηλ είναι άρτιος αριθμός).

-Ένας ακέραιος διαιρείται ακριβώς με το 3, όταν το άθροισμα των ψηφίων του είναι πολλαπλάσιο του 3.

-Ένας ακέραιος διαιρείται ακριβώς με το 4, όταν τα τελευταίο διψήφιο τμήμα του διαιρείται με το 4.

-Ένας ακέραιος διαιρείται ακριβώς με το 5, αν το τελευταίο του ψηφίο είναι 5 ή 0.

-Ένας ακέραιος διαιρείται ακριβώς με το 6 αν είναι ταυτόχρονα διαιρετός και με το 2 και με το 3.

-Ένας ακέραιος διαιρείται ακριβώς με το 8, όταν οι τρεις τελευταίοι αριθμοί σχηματίζουν αριθμό που διαιρείται με το 8.

-Ένας ακέραιος διαιρείται ακριβώς με το 9, όταν το άθροισμα των ψηφίων του είναι πολλαπλάσιο του 9.

-Ένας ακέραιος διαιρείται ακριβώς με το 10, αν το τελευταίο του ψηφίο είναι 0.

Να σημειωσουμε ότι στα περισσότερα προβλήματα γίνεται αναφορά σε θετικούς ακεραίους.

Υπάρχουν και άλλα κριτήρια διαιρετότητας για το 11,το 13 ή το 7 όμως δεν εμφανίζονται σε μαθηματικούς διαγωνισμούς. Αν παρόλα αυτά θέλετε να τα δείτε σκανάρετεμε το έξυπνο κινητό σας τηλέφωνο, το ακόλουθο Qr code.



24.Να βρείτε το πλήθος των εξαψήφιων θετικών ακεραίων (το 0 επιτρέπεται ως πρώτο από αριστερά ψηφίο) οι οποίοι έχουν τις εξής ιδιότητες:
-Το άθροισμα των πρώτων τριών ψηφίων είναι ίσο με το άθροισμα των τριών τελευταίων ψηφίων.
-Το άθροισμα των ψηφίων των αρτίων θέσεων είναι ίσο με το άθροισμα των ψηφίων στις περιττές θέσεις.
Για παράδειγμα, ο αριθμός 013112 (0+1+3=1+1+2 , 0+3+1=1+1+2)

(Leningrad Math Olympiad 1969)

Λύση

Αν συμβολίσουμε τους ζητούμενους αριθμούς ως $\overline{ΑΒΓΔΕΖ}$,ισχύει ότι:

Α+Β+Γ=Δ+Ε+Ζ (1)

Α+Γ+Ε=Β+Δ+Ζ (2)

Αφαιρούμε κατά μέλη: (1)-(2): Β-Ε=Ε-Β ή **Β=Ε** και η (1) γίνεται **Α+Γ=Δ+Ζ**

Η τιμή του Α+Γ μπορεί να πάρει οποιαδήποτε τιμή από το 0 μέχρι το 18.

Α+Γ=0 έχουμε μια δυνατή τιμή(το 0) για το Α και μονοσήμαντα ορισμένη τιμή για το Γ (το 0)

Ομοίως για το Δ+Ζ άρα από την πολλαπλασιαστική αρχή $\mathbf{1^2}$ τρόπος.

Α+Γ=1 έχουμε δυο δυνατές τιμές (0,1) για το Α και μονοσήμαντα ορισμένες τιμές για το Γ (1,0)

Ομοίως για το Δ+Ζ άρα από την πολλαπλασιαστική αρχή $\mathbf{2^2}$ διαφορετικοί τρόποι.

Α+Γ=2 έχουμε δυο δυνατές τιμές (0,1,2) για το Α και μονοσήμαντα ορισμένες τιμές για το Γ (2,1,0)

Ομοίως για το Δ+Ζ άρα από την πολλαπλασιαστική αρχή $\mathbf{3^2}$ διαφορετικοί τρόποι.

…

Α+Γ=9 έχουμε 10 δυνατές τιμές (0,1,…,9) για το Α και μονοσήμαντα ορισμένες τιμές για το Γ (9,…1,0)

Ομοίως για το Δ+Ζ άρα από την πολλαπλασιαστική αρχή $\mathbf{10^2}$ διαφορετικοί τρόποι.

Από εκεί και πέρα αλλάζει το μοτίβο οι τρόποι ελαττώνονται.

Α+Γ=10 έχουμε 9 δυνατές τιμές (1,…,9) για το Α και μονοσήμαντα ορισμένες τιμές για το Γ (9,…,1)

Ομοίως για το Δ+Ζ άρα από την πολλαπλασιαστική αρχή $\mathbf{9^2}$ διαφορετικοί τρόποι.

Α+Γ=11 έχουμε 8 δυνατές τιμές (2,…,9) για το Α και μονοσήμαντα ορισμένες τιμές για το Γ (9,…,2)

Ομοίως για το Δ+Ζ άρα από την πολλαπλασιαστική αρχή $\mathbf{8^2}$ διαφορετικοί τρόποι.

…

Α+Γ=18 έχουμε 1 δυνατή τιμή (9) για το Α και μονοσήμαντα ορισμένες τιμές για το Γ (9)

Ομοίως για το Δ+Ζ άρα από την πολλαπλασιαστική αρχή $\mathbf{1^2}$ τρόπος.

Συνολικά έχουμε:

$$1^2+2^2+3^2+....+10^2+9^2+8^2+...+1^2=670 \text{ τρόπους}$$

Για το Β και το Ε έχουμε 10 τρόπους άρα από την πολλαπλασιαστική αρχή συνολικά: 670*10=6700 αριθμούς.

Στην απαρίθμηση πλήθους λύσεων εξισώσεων θα επανέλθουμε όταν αναφερθούμε στους επαναληπτικούς συνδυασμούς.

Προσπάθησε να λύσεις τις ακόλουθες ασκήσεις-προβλήματα,επέμεινε,μην καταφύγεις στο κεφάλαιο των λύσεων παρά μόνο σε απόλυτη ανάγκη,για παράδειγμα,αν αρχίσει να βγαίνει από το δεξί σου αυτί καπνός!

Ασκήσεις,προβλήματα ***(Αντιστοιχία 1-1, αρχή εγκλεισμού- αποκλεισμού,βασική αρχή απαρίθμησης)***

Α1.Σε μια βιβλιοθήκη υπάρχουν 10 βιβλία με περιεχόμενο στην μαγειρική,8 βιβλία με περιεχόμενο στην ζαχαροπλαστική και 6 βιβλία με περιεχόμενο και στην μαγειρική και στην ζαχαροπλαστική.Πόσα βιβλία υπάρχουν με περιεχόμενο τουλάχιστον ένα από τα δύο θέματα;

Α2.Διαθέτουμε 4 κέρματα του 1 ευρώ, 2 κέρματα των 50 λεπτών και 5 κέρματα των 10 λεπτών.Με πόσους τρόπους μπορούμε να πληρώσουμε το ποσό των 1,7 ευρώ;(θεωρούμε ότι τα κέρματα είναι διακεκριμένα)

Α3.Εξι άνθρωποι παίρνουν το ασανσέρ μια οκταόροφης πολυκατοικίας και κατεβαίνουν σε διαφορετικούς ορόφους (1° ,2° ,3° ,…,8°).Με πόσους τρόπους γίνεται αυτό;

Α4. Πόσοι ακέραιοι υπάρχουν μεταξύ των αριθμών 123 και 321 που έχουν ως ψηφίο τον αριθμό 2 ακριβώς δύο φορές.

Α5. Η ακόλουθη παράγραφος αφορά μια ενημερωτική αναφορά του σχολείου Χ και δόθηκε στον Παπαδόπουλο.

Στο σχολείο Χ φοιτούν 45 παιδιά, εκ των όποιων 30 είναι αγόρια.

- *30 παιδιά έχουν άριστους βαθμούς και μεταξύ αυτών τα 16 είναι αγόρια.*
- *28 παιδιά παρακολουθούν μαθήματα σε φροντιστήριο το απόγευμα εκ των οποίων τα 18 είναι αγόρια και τα 17 έχουν άριστους βαθμούς.*
- *15 παιδιά παρακολουθούν μαθήματα σε φροντιστήριο το απόγευμα και έχουν άριστους βαθμούς.*

Ο Παπαδόπουλος δίχως να έχει καμία πρότερη γνώση για το σχολείο Χ ισχυρίστηκε ότι υπάρχει λάθος.Αιτιολογήστε.

(Υπόδειξη:Να βρείτε πόσα είναι τα κορίτσια που φοιτούν στο σχολείο δεν έχουν άριστους βαθμούς και παρακολουθούν μαθήματα σε φροντιστήριο.)

Α6.Να βρείτε τους τρόπους με τους οποίους μπορούμε να σχηματίσουμε πενταψήφιους αριθμού από τα ψηφία 0,3,4,5,6 όταν:

i. τα ψηφία είναι ανά δυο διαφορετικά.

ii. τα ψηφία μπορούν να επαναλαμβάνονται.

Α7.Ο Μήτσος ξέρει ότι το PIN –ο κωδικός εισόδου – στο κινητό του τηλέφωνο αποτελείται από τα ψηφία 8,9,6,5,χωρις όμως να θυμάται την σειρά των ψηφίων. Να βρείτε πόσες το πολύ δόκιμες απαιτούνται για να βρει ο Μήτσος τον κωδικό.

Α8.Ο Τοτός έχει στο συρτάρι του 5 τετράδια και 4 μολύβια. Πηγαίνει στο δωμάτιο του και παίρνει ένα τετράδιο ή ένα μολύβι. Με πόσους τρόπους μπορεί να το κάνει αυτό; Με πόσους τρόπους θα το έκανε αν έπαιρνε ένα τετράδιο και ένα μολύβι;

Α9.Ριχνουμε ένα κέρμα 5 φορές. Πόσες πεντάδες διαφορετικών αποτελεσμάτων μπορούμε να έχουμε;

Α10.Ενα τεστ μαθηματικών αποτελείται 3 ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής και κάθε ερώτηση έχει 4 πιθανές απαντήσεις.Ο κάθε διαγωνιζόμενος συμπλήρωσε μια απάντηση σε κάθε ερώτηση. Στο τεστ έλαβαν μέρος 65 μαθητές. Είναι δυνατόν πάντα να υπάρχουν τουλάχιστον δυο διαγωνιζόμενοι που έχουν δώσει ίδιες απαντήσεις;

Α11. Δυο ξεναγοί συνοδεύουν έξι τουρίστες. Οι ξεναγοί αποφασίζουν να χωρίσουν τους τουρίστες σε δυο ομάδες με την προϋπόθεση σε κάθε ομάδα να υπάρχει τουλάχιστον ένας τουρίστας. Με πόσους τρόπους μπορεί να γίνει η διαμέριση σε δυο ομάδες;
Α12.Ενα πουκάμισο μάρκας GIGI κατασκευάζεται σε τέσσερα μεγέθη: S,M,L,XL και σε άσπρο,μαύρο,κόκκινο και μπλε χρώμα.Πόσα τουλάχιστον πουκάμισα GIGI πρέπει να διαθέτει ένα κατάστημα για να εξυπηρετήσει ένα πελάτη που θα ζητήσει να αγοράσει ένα πουκάμισο της συγκεκριμένης μάρκας.
Α13. Μια κάλπη περιέχει 5 σφαιρίδια αριθμημένα από το 1 έως το 5.Παιρνουμε ένα σφαιρίδιο,καταγράφουμε τον αριθμό και το επανατοποθετούμε στην κάλπη. Επαναλαμβάνουμε την διαδικασία άλλες τέσσερεις φορές .
i.Να βρείτε πόσους πενταψήφιους αριθμούς μπορούμε να σχηματίσουμε.
ii.Αν δεν γίνει επανατοποθέτηση πόσοι είναι οι πενταψήφιοι αριθμοί
Α14. i.Πόσοι είναι οι πενταψήφιοι αριθμοί που το πρώτο ψηφίο τους (των δεκάδων χιλιάδων) είναι το 7;
ii.Πόσοι πενταψήφιοι αριθμοί έχουν το πρώτο ψηφίο (των δεκάδων χιλιάδων) άρτιο;
ii.Οι επιλογές για το πρώτο ψηφίο είναι 2,4,6,8 άρα $4\cdot10\cdot10\cdot10\cdot10=40000$ αριθμοί
Α15. Η ορθογώνια επιφάνεια ενός τραπεζιού αποτελείται από 16 τετράγωνα. Χρωματίζουμε τα τετράγωνα με μαύρο ή λευκό χρώμα.Πόσοι διαφορετικοί χρωματισμοί της επιφάνειας του τραπεζιού είναι δυνατό να προκύψουν;
Α16.Στο μακρινό Αβγατηγανιστάν χρησιμοποιούν ένα αλφάβητο που αποτελείται μόνο από τα τρία γράμματα €, ¥ και ® .Επίσης είναι γνωστό σε όλους ότι οι λέξεις που χρησιμοποιούν οι Αβγατηγανιστανοί έχουν ένα έως τέσσερα γράμματα. Πόσες το πολύ λέξεις είναι δυνατό να έχει το αλφάβητο στο Αβγατηγανιστάν.
Α17. Στον Γιαννάκη-κολοσσός στα μαθηματικά-έχει τεθεί το εξής πρόβλημα: «Πόσοι τριψήφιοι αριθμοί υπάρχουν με διαφορετικά μεταξύ τους ψηφία, που λαμβάνονται από τα ψηφία 3,4,5,6,7;»
Ο Γιαννάκης έδωσε την εξής λύση:
«Θα βρούμε με πόσους τρόπους ορίζεται τριψήφιος αριθμός. Έτσι θεωρούμε την επόμενη διαδικασία την οποία σπάμε σε δυο φάσεις:
*Φάση 1^{η} :Σχηματίζουμε ένα τετραψήφιο αριθμό με τα ψηφία 3,4,5,6,7.Το πρώτο ψηφίο το επιλέγουμε με 5 τρόπους , το δεύτερο με 4 κ.ο.κ άρα λοιπόν από την πολλαπλασιαστική αρχή υπάρχουν 5*4*3*2=120 τρόποι για να σχηματίζουμε έναν τετραψήφιο με τα δεδομένα ψηφία.*
*Φάση 2^{η}:Από τον τετραψήφιο μπορούμε να φτάσουμε στον τριψήφιο παραλείποντας ένα ψηφίο του.Η δεύτερη επιλογή γίνεται με 4 τρόπους.Από την πολλαπλασιαστική αρχή υπάρχουν 4*120=480 τρόποι πραγματοποίηση της διαδικασίας,οπότε υπάρχουν 480 τριψήφιοι που σχηματίζονται από τα ψηφία 3,4,5,6,7.»*
Είναι σωστή η λύση του Γιαννάκη;
Α18.Με πόσους τρόπους μπορούν να δοθούν 2 βραβεία σε 10 υποψηφίους, αν τα δυο βραβεία:
i. Μπορούν να δοθούν στο ίδιο άτομο;
ii.Δεν μπορούν να δοθούν στο ίδιο άτομο;
Α19. Με πόσους τρόπους μπορούμε να επιλέξουμε δυο αριθμούς Α,Β από τους αριθμούς 1,2,3,…..,2020 ώστε να είναι Α+Β περιττός.

Α20. *Παλινδρομικός* ή *καρκινικός* αριθμός είναι ένας θετικός ακέραιος αριθμός που διαβάζεται το ίδιο από τα αριστερά προς τα δεξιά και από τα δεξιά προς τα αριστερά. Για παράδειγμα, ο αριθμός 121.Ποσοι επταψήφιοι παλινδρομικοί αριθμοί υπάρχουν;

Α21. Να βρείτε το πλήθος των διατεταγμένων ζευγών (α,β), όπου α, β θετικοί ακέραιοι και ισχύει ότι το ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο των α, β είναι ο αριθμός $2^3 5^7 11^{13}$.

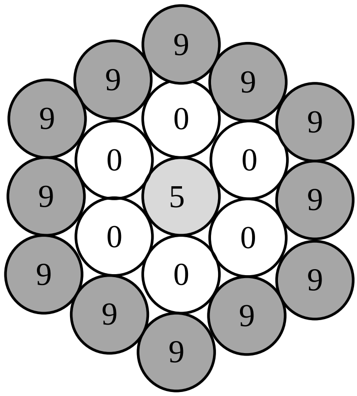
Α22. Ποιοι είναι περισσότεροι; Οι επταψήφιοι που περιέχουν ένα τουλάχιστον άσσο ή οι επταψήφιοι αριθμοί που δεν περιέχουν κανένα άσσο;

Α23. Κάθε αυτοκίνητο της εταιρείας Mitsoscorporation έχει ως κωδικό ένα μοναδικό θετικό ακέραιο με διαφορετικά ψηφία τέτοιο ώστε η απόλυτη τιμή της διαφοράς του $1^{ου}$ και του $4^{ου}$ ψηφίου να ισούται με 4.Πόσα το πολύ αυτοκίνητα διαθέτει η εταιρεία;

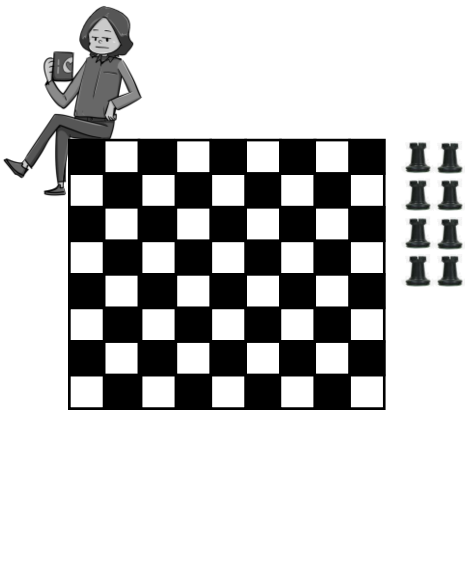
Α24. Να βρείτε το πλήθος των ακέραιων λύσεων της εξίσωσης $|x|+|y|=40$.

Α25. i.Έστω μια ηλεκτρονική κλειδαριά με την διάταξη πλήκτρων του σχήματος. Με πόσους τρόπους μπορούμε να πληκτρολογήσουμε τον αριθμό 509 με μοναδικό περιορισμό τα διαδοχικά πλήκτρα που θα πληκτρολογήσουμε να εφάπτονται και κάθε πλήκτρο να πατηθεί ακριβώς μια φορά;
ii. Πόσοι είναι οι τρόποι, αν πρέπει να πληκτρολογήσουμε τους αριθμούς 5099,5009;

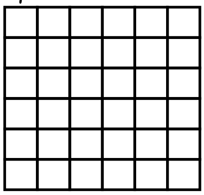




Α26. Με πόσους τρόπους μπορούμε να τοποθετήσουμε 8 πύργους πάνω σε μια σκακιέρα 8x8,αν δεν επιτρέπεται να υπάρχουν δυο πύργοι στην ίδια γραμμή ή στήλη και επιπλέον δεν επιτρέπεται η τοποθέτηση πύργου στα τέσσερα γωνιακά τετράγωνα.



Α27.Ένα τετράγωνο 6x6 διαιρείται σε 36 1x1 τετράγωνα .Οι κορυφές όλων αυτών των τετραγώνων σχηματίζουν ένα πλέγμα 49 σημείων. Να βρείτε τον αριθμό των ορθογωνίων τριγώνων με κορυφές σημεία του πλέγματος και κάθετες πλευρές παράλληλες προς τις πλευρές των τετραγώνων.



Α28.Σε ένα υπαίθριο χώρο έχουμε τοποθετήσει σε μια σειρά 120 καθίσματα. Ποιος είναι ο ελάχιστος αριθμός καθισμάτων που πρέπει να είναι κατειλημμένα έτσι ώστε το επόμενο πρόσωπο που θα έρθει σε όποιο κάθισμα και αν καθίσει να βρίσκεται δίπλα σε κατειλημμένη θέση.

Α29. Έστω ότι 100 φοιτητές εξετάζονται σε 3 θέματα.Είναι γνωστό ότι,100 απάντησαν σωστά σε τουλάχιστον ένα θέμα,70 απάντησαν σωστά σε τουλάχιστον δυο θεματα,10 απάντησαν σωστά σε τουλάχιστον τρία θέματα.Κάθε θέμα το απάντησε ο ίδιος αριθμός φοιτητών.Ποιος είναι ο αριθμός των φοιτητών που δεν απάντησε στο πρώτο θέμα;

Α30. Σε μια ευθεία παίρνουμε ένα πλήθος σημείων.Θεωρούμε όλα τα ευθύγραμμα τμήματα με άκρα τα σημεία.Κάποια από τα σημεία είναι στο εσωτερικό (δηλαδή όχι σε άκρο) σε 27 από αυτά τα ευθύγραμμα τμήματα.Κάποια άλλα από τα σημεία είναι στο εσωτερικό σε 35 από αυτά τα ευθύγραμμα τμήματα.Πόσα είναι τα σημεία;

Α31.Να δείξετε ότι μεταξύ των εξαψήφιων θετικών ακέραιων από το αριθμό 000000 μέχρι τον 999999 το πλήθος αυτών που τα ψηφία τους έχουν άθροισμα 27 είναι το ίδιο με το πλήθος αυτών που το άθροισμα των τριών πρώτων ψηφίων είναι το ίδιο με το άθροισμα των τριών τελευταίων ψηφίων.(*Leningrad Mathematical contest 1989)*

Α32.Ένας δρόμος συνδέει την πόλη Α με την πόλη Β και έχει μήκος 999 χιλιόμετρα. Στις δύο πόλεις αλλά και κατά μήκος τους δρόμου σε κάθε χιλιόμετρο υπάρχουν πινακίδες που δίνουν ταυτόχρονα την απόσταση τόσο από την πόλη Α όσο και από την πόλη Β όπως φαίνεται στο σχήμα.

0/999 1/998 2/997 3/996 …….. 998/1 999/0

Πόσες διαφορετικές πινακίδες υπάρχουν με δυο ακριβώς διαφορετικά αριθμητικά ψηφία; *(Australian Mathematics Competition 2018)*

Η πολλαπλασιαστική αρχή παρότι εξαιρετικά απλή στη σύλληψή της δίνει «έξυπνα» προβλήματα με τη λύση να βγαίνει σαν λαγός από καπέλο, καλή ώρα το διαγωνιστικό θέμα στον γραμμωτό κώδικα (Qr code) που θα σας παραπέμψει στο κανάλι μου στο αντίστοιχο βίντεο με εκφώνηση-λύση.



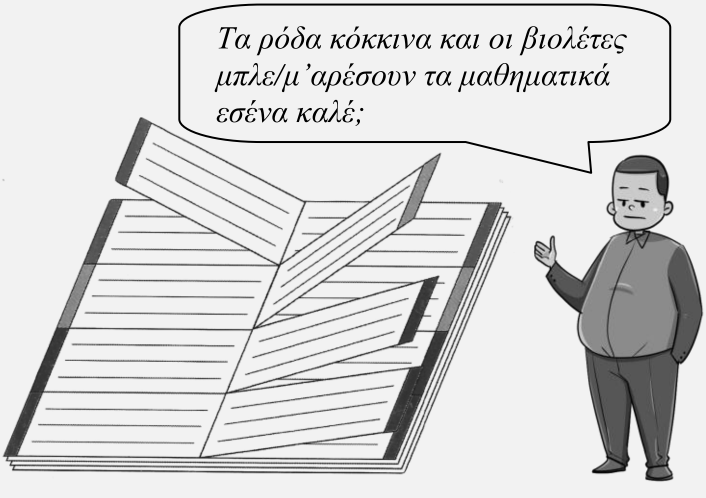
(AIME: *American Invitational Mathematics Examination)*

Η βασική αρχή απαρίθμησης και η ποίηση

Ο Raymond Queneau (1903-1976) συγγραφέας, ποιητής, στιχουργός, μεταφραστής και μαθηματικός έγραψε ένα μικρό βιβλιαράκι με τίτλο "Cent milliards de poemes" (Εκατό δισεκατομμύρια ποιήματα).Όπως αναφέρει ο ποιητής αυτό το μικρό βιβλίο επιτρέπει σε όλο τον κόσμο να ανασυνθέσει δισεκατομμύρια σονέτα,όλα κανονικά και κατανοητά.Το βιβλίο έχει όλες και όλες δέκα σελίδες,καθεμιά με ένα σονέτο.Αλλά σε κάθε σελίδα διαιρείται σε δεκατέσσερις λωρίδες,καθεμία από τις οποίες περιέχει ένα στίχο του σονέτου που εμφανίζεται στην σελίδα.Συνδυάζοντας τις οριζόντιες λωρίδες μπορούμε να δημιουργήσουμε 10^{14} σονέτα. Ο αριθμός αυτός είναι τεράστιος ,σκεφτείτε ότι ο πληθυσμός της γης είναι περίπου 7 δισεκατομμύρια,οπότε αναλογούν σε κάθε κάτοικο της υφηλίου περίπου 14 διαφορετικά σονέτα από το βιβλιαράκι του Queneau.Εάν ξοδέψουμε μισό λεπτό για να διαβάσουμε ένα από τα σονέτα και καθόλου χρόνο για να αλλάξουμε σονέτο, θα χρειάζονταν περισσότερα από 95 εκατομμύρια χρόνια για να τα διαβάσουμε.



Θα μνημονεύσω ένα συγγραφέα μαθηματικών βιβλίων για την μέση εκπαίδευση με ξεχωριστό στυλ,τον Ι.Μαντά. Την δεκαετία του 1990,λάνσαρε στην αγορά την *«Βιβλίο-μηχανή»,*ένα βιβλίο κατασκευής μαθηματικών διαγωνισμάτων που χρησιμοποιούσε την ίδια τεχνική με το βιβλίο ποιημάτων του Queneau.Κάθε σελίδα του είχε διαιρεθεί σε τέσσερεις λωρίδες και ήταν δυνατό να δημιουργηθούν 33554430 διαφορετικά διαγωνίσματα.



Ένας συμβολισμός….

Το γινόμενο $1\cdot 2\cdot 3\cdot .....\cdot(\nu-1)\cdot\nu$, $\nu\in\mathbb{N}^*$ συμβολίζεται $\nu!$.Διαβάζεται ν παραγοντικό και ισχύει: $1!=0!=1$.Θα πρέπει να εξοικειωθούμε με τον συμβολισμό του παραγοντικού και τον αλγεβρικό χειρισμό του καθώς θα το συναντήσουμε στους επόμενους τύπους.Μια πρώτη νύξη λοιπόν με μερικά παραδείγματα.

Παραδείγματα

25.Να υπολογιστούν τα εξαγόμενα:

i. $\dfrac{9!}{5!3!}$ ii. $\dfrac{100!}{98!3!}$ iii. $\dfrac{28!29!}{27!26!}$

Λύση

i. $\dfrac{9!}{5!3!}=\dfrac{5!\cdot 6\cdot 7\cdot 8\cdot 9}{5!3!}=\dfrac{6\cdot 7\cdot 8\cdot 9}{3!}=\dfrac{6\cdot 7\cdot 8\cdot 9}{1\cdot 2\cdot 3}=\dfrac{6\cdot 7\cdot 8\cdot 9}{6}=7\cdot 8\cdot 9=504$

ii.

$\dfrac{100!}{98!3!}=\dfrac{98!\cdot 99\cdot 100}{98!3!}=\dfrac{99\cdot 100}{2\cdot 3}=33\cdot 50=1650$

iii. $\dfrac{28!29!}{27!26!}=\dfrac{27!\cdot 28\cdot 26!\cdot 27\cdot 28\cdot 29}{27!26!}=$

$=28\cdot 27\cdot 28\cdot 29=613872$

26.Να αποδείξετε ότι

$(\nu+2)!-(\nu+1)!=(\nu+1)^2\nu!$

Λύση

$(\nu+2)!-(\nu+1)!=$

$(\nu+1)!(\nu+2)-(\nu+1)!=$

$=(\nu+1)!(\nu+2-1)=$

$\nu!(\nu+1)(\nu+1)=(\nu+1)^2\nu!$

27.Να αποδείξετε ότι $\dfrac{1}{3!}+\dfrac{1}{4!}+\dfrac{1}{5!}=\dfrac{26}{5!}$:

Λύση

$\dfrac{1}{3!}+\dfrac{1}{4!}+\dfrac{1}{5!}=$

$\dfrac{4\cdot 5}{3!4\cdot 5}+\dfrac{5}{4!\cdot 5}+\dfrac{1}{5!}=\dfrac{20}{5!}+\dfrac{5}{5!}+\dfrac{1}{5!}=\dfrac{26}{5!}$



28.Να αποδείξετε ότι $1+2+3+..+\nu=\dfrac{1}{2}\dfrac{(\nu+1)!}{(\nu-1)!}$

Λύση

$1+2+3+..+\nu=\dfrac{1}{2}\dfrac{(\nu+1)!}{(\nu-1)!}\Leftrightarrow\dfrac{\nu(\nu+1)}{2}=\dfrac{(\nu+1)!}{2(\nu-1)!}\Leftrightarrow\dfrac{\nu(\nu+1)}{2}=\dfrac{\nu(\nu+1)}{2}$ ■

Μεταθέσεις συνόλου ν αντικειμένων



Ας σκεφτούμε ένα αγώνα δρόμου και κάνουμε την υπόθεση ότι λαμβάνουν μέρος 5 αθλητές:Ο Γιώργος (Γ),ο Ανδρέας (Α),ο Βρασίδας (Β), ο Δημήτρης (Δ) και ο Θανάσης (Θ).Το ερώτημα είναι ποια θα είναι όλα τα δυνατά αποτελέσματα του αγώνα,για παράδειγμα μια πιθανή κατάταξη των αθλητών θα ήταν:

Γ,Α,Β,Δ,Θ

Ο Γιώργος τερμάτισε πρώτος και έπονται οι Ανδρέας,Βρασίδας,Δημήτρης ,Θανάσης.Η εύρεση όλων των πιθανών κατατάξεων είναι ουσιαστικά θέμα επιλόγων. Για την πρώτη θέση έχουμε 5 επιλογές,ο καθένας από του 5 αθλητές θα μπορούσε (θεωρητικά) να τερματίσει πρώτος,για την δεύτερη θέση οι επιλογές μας ελαττώνονται μένουν 4 αθλητές άρα με τέσσερεις τρόπους μπορούμε να γεμίσουμε την δεύτερη θέση, εντελώς ανάλογα με 3 τρόπους μπορούμε να γεμίσουμε την τρίτη θέση,με 2 την δεύτερη θέση και πάντα θα έχουμε μόνο μια επιλογή για την πέμπτη θέση. Συνολικά το πλήθος των τρόπων κατάταξης των αθλητών είναι $1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5=5!=120$
Ας γενικεύσουμε τα παραπάνω.
Έστω πλήθος ν αντικειμένων (διαφορετικών μεταξύ τους) και Α το σύνολο αυτών των αντικείμενων.Μια μετάθεση των στοιχείων του Α, δεν είναι παρά ένας τρόπος ταξινόμησης των στοιχείων αυτών,έτσι ώστε ένα από αυτά να θεωρείται ως πρώτο, ένα ως δεύτερο κλ.π μέχρι το ν-οστο.**Δηλαδή,μια μετάθεση (Permutation) των στοιχείων του Α, είναι ο σχηματισμός διατεταγμένης ν-αδας με τα στοιχεία του Α, στην όποια συμμετέχουν όλα και μόνο μια φορά το καθένα**.Μια μετάθεση των στοιχείων του Α επιτρέπει να το γράφουμε με τον ακόλουθο τρόπο

$$A=\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\ldots,\alpha_\nu\}$$

Με κάθε συγκεκριμένη μετάθεση λοιπόν ,τα στοιχεία του Α αποκτούν ένα καινούριο χαρακτηριστικό και ξεχωρίζουν εξ αιτίας του, αφού καθένα αποκτάει μια θέση, στην διαδοχική παρουσίαση των στοιχείων ένα προς ένα.Το πλήθος των μεταθέσεων ν στοιχείων συμβολίζεται με M_ν και χρησιμοποιώντας την βασική αρχή απαρίθμησης προκύπτει ότι είναι ίσο με $1\cdot2\cdot3\cdot.....\cdot\nu$,το γινόμενο $1\cdot2\cdot3\cdot.....\cdot\nu$ συμβολίζεται $\nu!$ συνεπώς

$$M_\nu=\nu!$$

Να θυμάστε ότι στις μεταθέσεις τα στοιχεία τοποθετούνται σε μια «σειρά» δηλ σε μια ευθεία γραμμή και είναι όλα διαφορετικά μεταξύ τους!



Ας δούμε πως χειριζόμαστε ασκήσεις με μεταθέσεις.

Παραδείγματα

29.Με πόσους τρόπους μπορούν να τερματίσουν 15 αθλητές σε ένα αγώνα δρόμου; *(Δεν ξέρουμε τίποτα για τις επιδόσεις τους)*

Οι αθλητές είναι διαφορετικοί μεταξύ τους και έχει σημασία η σειρά με την οποία θα τερματίσουν πρόκειται για μετάθεση των 15 στοιχείων.Άρα έχουμε $M_{15} = 15!$

30. Πόσοι αναγραμματισμοί της λέξης ΠΙΘΑΝΕΣ υπάρχουν;
ii. Πόσοι από αυτούς αρχίζουν με Π;
iii. Πόσοι από αυτούς αρχίζουν με Π και τελειώνουν σε Σ;
iv.Πόσοι από αυτούς αρχίζουν με φωνήεν;
v.Πόσοι από αυτούς έχουν τα φωνήεντα σε συνεχόμενες θέσεις;
vi. Να εξηγήσετε γιατί το πλήθος των αναγραμματισμών της λέξης ΑΠΙΘΑΝΕΣ δεν είναι ίσο με μεταθέσεις των 8 M_8.

(Αναγραμματισμός μιας λέξης είναι η δημιουργία μιας άλλης λέξης με μετάθεση των γραμμάτων της πρώτης.)

Λύση

i. Όλα τα γράμματα της λέξης ΠΙΘΑΝΕΣ είναι διαφορετικά μεταξύ τους. Έτσι, το πλήθος των αναγραμματισμών της λέξης είναι ίσο με: $M_7 = 7! = 5040$

ii Ο υπολογισμός γίνεται σε δύο φάσεις. Στην πρώτη φάση είναι η τοποθέτηση του Π στην πρώτη θέση, η οποία και γίνεται μόνο με έναν τρόπο και η δεύτερη φάση είναι οι μεταθέσεις των υπόλοιπων 6 διαφορετικών γραμμάτων στις επόμενες 6 θέσεις,που είναι ίσο με: $M_6 = 6! = 720$

iii. Ο υπολογισμός γίνεται σε τρεις φάσεις. Στην πρώτη φάση είναι η τοποθέτηση του Π στην πρώτη θέση, η οποία και γίνεται μόνο με έναν τρόπο. Στην δεύτερη φάση είναι η τοποθέτηση του Σ στην τελευταία θέση, η οποία και γίνεται πάλι μόνο με έναν τρόπο. Στην τρίτη φάση, όπου πρέπει να τοποθετήσουμε τα υπόλοιπα 5 γράμματα στις θέσεις που απομένουν, έχουμε: $M_5 = 5! = 120$ τρόπους.
Συνολικά, έχουμε 1 · 1 · 120 = 120 τρόπους.

iv. Στην πρώτη φάση πρέπει να τοποθετήσουμε ένα φωνήεν. Αυτό γίνεται με 3 διαφορετικούς τρόπους, γιατί έχουμε μόνο 3 φωνήεντα. Στη δεύτερη φάση πρέπει να τοποθετήσουμε τα 6 υπόλοιπα γράμματα στις υπόλοιπες 6 θέσεις. Αυτό μπορεί να γίνει με $M_6 = 6! = 720$ τρόπους.
Συνολικά, έχουμε 3 · 6! = 3 · 720 = 2160 τρόπους.

v.Αν θεωρήσουμε τα τρία φωνήεντα Α,Ε,Ι ως ένα αντικείμενο, τότε μαζί με τα υπόλοιπα 4 σύμφωνα έχουμε 5 διαφορετικά αντικείμενα, για να τα τοποθετήσουμε σε σειρά. Άρα, σε πρώτη φάση έχουμε $M_5 = 5! = 120$ διαφορετικές μεταθέσεις.Στη δεύτερη φάση έχουμε όλες τις μεταθέσεις των τριών φωνηέντων, δηλαδή $M_3 = 3! = 6$.
Συνολικά, έχουμε 5! · 3! = 120 · 6 = 720 τρόπους.

vi. Το πλήθος όλων των αναγραμματισμών της λέξης ΑΠΙΘΑΝΕΣ δεν μπορεί να αποτελέσει μεταθέσεις των 8, γιατί τα 8 γράμματα της λέξης δεν είναι όλα διαφορετικά μεταξύ τους. Στους αναγραμματισμούς θα επανέλθουμε. ■

31.Έξι παιδιά μεταξύ των οποίων η Μαρία και ο Γιάννης, θα καθίσουν τυχαία το ένα δίπλα στο άλλο σε 6 αριθμημένες θέσεις έτσι ώστε η Μαρία και ο Γιάννης να καθίσουν σε διπλανές θέσεις.Με πόσους τρόπους μπορεί να γίνει αυτό;

Τα ζεύγη των διπλανών θέσεων είναι ($1^η$,$2^η$),($2^η$,$3^η$) ,($3^η$,$4^η$) ,($4^η$,$5^η$),($5^η$,$6^η$) δηλαδή πλήθος 5. Χωρίζουμε την διαδικασία σε 3 φάσεις:

$1^η$ φάση :Επιλογή ζεύγους διπλανών θέσεων με 5 τρόπους.

$2^η$ φάση: Η σειρά με την οποία θα καθίσουν στις διπλανές θέσεις η Μαρία και ο Γιάννης με $M_2 = 2!$ τρόπους (Μαρία, Γιάννης),(Γιάννης, Μαρία).

$3^η$ φάση:Επιλογή του τρόπου με τον οποίο θα καθίσουν στις υπόλοιπες 4 θέσεις τα υπόλοιπα 4 παιδιά με $M_4 = 4!$ τρόπους.

Τελικά έχουμε $5 \cdot 2! \cdot 4!$ τρόπους. ■

32.Έξι Αμερικάνοι, πέντε Ρώσοι και τέσσερις Έλληνες θα τοποθετηθούν σε σειρά, για να παρακολουθήσουν ένα συνέδριο.

i. Να βρείτε με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορεί να γίνει η τοποθέτηση αυτή, χωρίς κανένα περιορισμό.

ii. Να βρείτε με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορεί να γίνει η τοποθέτηση αυτή, έτσι ώστε τα άτομα της κάθε εθνικότητας να καθίσουν σε συνεχόμενα καθίσματα.

iii. Γράφουμε τα ονόματα των παραπάνω συνέδρων σε 15 χαρτάκια και τα βάζουμε σε ισάριθμους πανομοιότυπους φάκελους και τα ανακατεύουμε. Ποιος είναι ο ελάχιστος αριθμός από φάκελους που πρέπει να επιλέξουμε τυχαία έτσι ώστε να έχουμε τουλάχιστον 4 σύνεδρους από την ίδια εθνικότητα;

i.Κάθε τοποθέτηση των 15 συνέδρων σε σειρά, χωρίς κανένα περιορισμό,ισοδυναμεί με μια μετάθεση 15 αντικειμένων. Συνεπώς, η τοποθέτηση των συνέδρων μπορεί να γίνει με $M_{15} = 15! = 1307674368000$ τρόπους.

ii. Στη πρώτη φάση θεωρούμε τα άτομα της κάθε εθνικότητας ως ένα αντικείμενο. Επομένως, κάθε τοποθέτηση των ατόμων των τριών εθνικοτήτων ισοδυναμεί με μιαν απλή μετάθεση 3 αντικειμένων. Στην πρώτη φάση το πλήθος των τοποθετήσεων είναι 3!. Στη δεύτερη φάση, για καθεμιά από τις τοποθετήσεις της πρώτης φάσης, οι έξι Αμερικάνοι μπορούν να καθίσουν με 6! τρόπους,οι πέντε Ρώσοι με 5! τρόπους και οι τέσσερις Έλληνες με 4! τρόπους.Συνεπώς,από την πολλαπλασιαστική αρχή της απαρίθμησης,η τοποθέτηση των ατόμων των εθνικοτήτων σε συνεχόμενα καθίσματα μπορεί να πραγματοποιηθεί με $3! \cdot 6! \cdot 5! \cdot 4! = 12441600$ τρόπους.

iii.Ας σκεφτούμε την «χειρότερη περίπτωση». Αν επιλέξουμε 3 Αμερικανούς, 3 Ρώσους και 3 Έλληνες τότε δεν έχουμε επιτύχει τον στόχο μας. Αν επιλέξουμε ένα φάκελο ακόμα τότε όποια και είναι η εθνικότητα του σύνεδρου σίγουρα θα έχουμε 4 σύνεδρους από την ίδια εθνικότητα. Άρα πρέπει να επιλέξουμε 10 φακέλους. ■

33.Με πόσους τρόπους μπορούν να καθίσουν σε μια ευθεία γραμμή 3 αγόρια και 4 κορίτσια, αν πρέπει:

i.Να είναι όλα μαζί τα κορίτσια και όλα μαζί τα αγόρια.

ii.Να κάθονται εναλλάξ.

iii. Να είναι όλα μαζί τα κορίτσια.

iv.Να κάθεται στην πρώτη και την τελευταία θέση αγόρι.

Λύση

i.Χωρίζουμε την διαδικασία σε τρεις φάσεις.

Φάση 1^{η} :Η τοποθέτηση των φύλων μπορεί να γίνει με $M_2 = 2!$ τρόπους.

Φάση 2^{η} :Έστω ότι επιλέχτηκε μια σειρά φύλων (για παράδειγμα, κορίτσια αριστερά, αγόρια δεξιά). Τότε τα 4 κορίτσια μπορούν να καταλάβουν τις 4 θέσεις τους με $M_4 = 4!$ τρόπους.

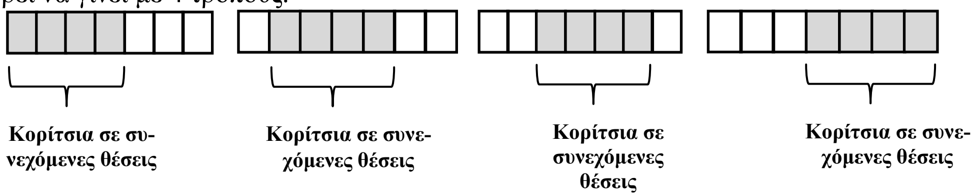
Φάση 3^{η} :Τα 3 αγόρια μπορούν να καταλάβουν τις 3 θέσεις τους με $M_3 = 3!$ τρόπους.

Συνεπώς έχουμε συνολικά 2!4!3!=288 τρόπους.

ii.Οι θέσεις των κοριτσιών είναι από την φύση του προβλήματος καθορισμένες (1^{η} ,3^{η} ,5^{η} ,7^{η}) και των αγοριών επίσης (2^{η} ,4^{η} ,6^{η}) .Τα 4 κορίτσια μπορούν να καταλάβουν τις θέσεις τους με $M_4 = 4!$ τρόπους. Τα 3 αγόρια μπορούν να καταλάβουν τις θέσεις τους με $M_3 = 3!$ τρόπους.

Συνεπώς έχουμε συνολικά 4!3!=144 τρόπους.

iii. Η επιλογή των 4 διαδοχικών θέσεων στις οποίες μπορούν να καθίσουν τα κορίτσια μπορεί να γίνει με 4 τρόπους.



Στην συνέχεια τα 4 κορίτσια μπορούν καταλάβουν τις 4 θέσεις τους με $M_4 = 4!$ τρόπους και τα 3 αγόρια στις θέσεις τους με $M_3 = 3!$ τρόπους.

Επομένως έχουμε συνολικά $4 \cdot 4! \cdot 3! = 567$.

iv.Η επιλογη των 2 αγοριων από τα 3 -ας τα συμβολισουμε { Α1,Α2,Α3}-που θα καθισουν στην πρωτη και στην τελευταία θέση γίνεται με 6 τροπους .

A1						A2
A2						A1
A1						A3
A3						A1
A3						A2
A2						A3

Φυσικά θα μπορούσαμε να θεωρήσουμε τις δυο θέσεις (πρώτη και τελευταία) ως μια μετάθεση και να έχουμε $M_3 = 3! = 6$ *τρόπους .*



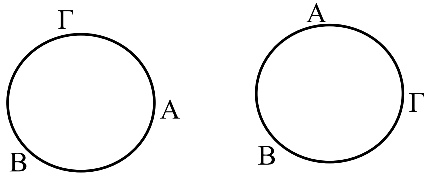
Μένουν λοιπόν οι υπόλοιπες θέσεις , πεντάδες που θα συμπληρωθούν με 4 κορίτσια και 1 αγόρι.Επομένως έχουμε $M_5 = 5!$ τροπους.Άρα,έχουμε συνολικά $3! \cdot 5! = 720$ τρόπους. ■

Κυκλικές μεταθέσεις ν στοιχείων

Τρία παιδιά κάθονται σε μια ευθεία γραμμή.Με πόσους τρόπους μπορούν να μπουν στην σειρά; Πρόκειται για μια μετάθεση τριών ατόμων και από την προηγούμενη ενότητα γνωρίζουμε ότι γίνεται με M_3=3! τρόπους. Αν θέλουμε να καταγράψουμε και τους τρόπους με του οποίους γίνεται η τοποθέτηση σε μια ευθεία θα είχαμε:

ΑΒΓ,ΑΓΒ,ΒΑΓ,ΒΓΑ,ΓΑΒ,ΓΒΑ

Ας αλλάξουμε το σενάριο.Τώρα τα τρία παιδιά θα καθίσουν σε ένα κυκλικό τραπέζι με καθορισμένη φορά (δεξιόστροφα). Έχουμε μόνο δυο περιπτώσεις:



ΒΓΑ **ΒΑΓ**

Αν δούμε τις απλές μεταθέσεις των τριών στοιχείων: ΑΒΓ,ΑΓΒ,ΒΑΓ,ΒΓΑ,ΓΑΒ,ΓΒΑ και τις κυκλικές μεταθέσεις των ίδιων τριών στοιχείων: ΒΓΑ,ΒΑΓ παρατηρούμε ότι οι δεύτερες είναι λιγότερες καθώς σε ένα τραπέζι οι απλές μεταθέσεις ΒΓΑ,ΓΑΒ,ΑΒΓ αποτελούν την ίδια κυκλική μετάθεση ΒΓΑ.Επειδή, ακριβώς μπορούμε να εκλάβουμε ως πρώτη θέση όποια θέλουμε ,κάθε κυκλική μετάθεση δίνει 3 απλές μεταθέσεις.

Αν το γενικεύσουμε με ν στοιχεία.Γνωρίζουμε ότι έχουμε M_ν= ν! απλές μεταθέσεις και κάθε κυκλική μετάθεση ν στοιχείων παράγει ν απλές μεταθέσεις άρα έχουμε

$K_\nu = \frac{\nu!}{\nu} = (\nu-1)!$ κυκλικές μεταθέσεις.

(Το πληθος των κυκλικων μεταθεσεων(circular permutation) συμβολίζεται με K_ν *).*

Για παράδειγμα,

Με πόσους τρόπους μπορούν να καθίσουν γύρω από ένα τραπέζι 5 πολιτικοί;

Πρόκειται για κυκλικές μεταθέσεις 5 στοιχείων άρα έχουμε K_5=(5-1)!=4!=24 τρόπους.

34.Οκτώ μαθητές θα χορέψουν σε κύκλο.

i. Να βρείτε με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορεί να γίνει η τοποθέτηση χωρίς κανένα περιορισμό.

ii. Να βρείτε με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορεί να γίνει η τοποθέτηση, έτσι ώστε δύο συγκεκριμένοι μαθητές να χορέψουν ο ένας πλάι στον άλλο.

Λύση

i. Κάθε τοποθέτηση των 8 μαθητών σε κύκλο χωρίς κανένα περιορισμό ισοδυναμεί με μια κυκλική μετάθεση 8 αντικειμένων.Συνεπώς,η τοποθέτηση των μαθητών μπορεί να γίνει με K_8=(8-1)!=7!=5040 τρόπους.

ii. Στη πρώτη φάση θεωρούμε τους δύο συγκεκριμένους μαθητές, οι οποίοι θα είναι ο ένας πλάι στον άλλο,ως ένα αντικείμενο.Επομένως,υπολογίζουμε το πλήθος των κυκλικών μεταθέσεων 7 αντικειμένων με K_7=6! Στη δεύτερη φάση, για καθεμιά από τις τοποθετήσεις της πρώτης φάσης,οι δύο αυτοί μαθητές μπορούν να τοποθετηθούν με 2! τρόπους, ο ένας πλάι στον άλλο.Συνεπώς, από την πολλαπλασιαστική αρχή της απαρίθμησης,οι δύο αυτοί μαθητές μπορούν να χορέψουν ο ένας πλάι στον άλλο με $6!\cdot 2!$ = 1440 τρόπους. ■

Αναγραμματισμοί για αρχάριους

Αναγραμματισμός μιας λέξης είναι η δημιουργία μιας άλλης λέξης με μετάθεση των γραμμάτων της πρώτης.Για παράδειγμα, αν δοθούν τα γράμματα Α,Β,Γ τότε οι αναγραμματισμοί που δημιουργούνται είναι ΑΒΓ,ΑΓΒ,ΒΓΑ,ΒΑΓ,ΓΑΒ και ΓΒΑ. Σε καθένα από τα επόμενα προβλήματα ζητείται να υπολογιστεί το πλήθος των διαφορετικών λέξεων (αναγραμματισμοί) που δημιουργούνται αλλάζοντας την σειρά των γραμμάτων της λέξης που δίνεται.

35.Να βρεθεί το πλήθος των αναγραμματισμών της λέξης ΒΑΡΟΣ.

Όλα τα γράμματα είναι διαφορετικά , πρόκειται για τον αριθμό των μεταθέσεων 5 γραμμάτων άρα $M_5 = 5! = 120$

36. Να βρεθεί το πλήθος των αναγραμματισμών της λέξης ΒΟΛΟΣ.

Εδώ παρατηρούμε ότι το γράμμα Ο εμφανίζεται δυο φορές ενώ τα υπόλοιπα γράμματα εμφανίζονται μια φορά. Ας θεωρήσουμε ότι τα δυο γράμματα Ο είναι δυο διαφορετικά γράμματα Ο1,Ο2 τότε έχουμε τις μεταθέσεις 5 γραμμάτων άρα συνολικά έχουμε $M_5 = 5! = 120$ αναγραμματισμούς.Ωστόσο, δυο αναγραμματισμοί που μπορούν να προκύψουν ο ένας από τον άλλον αντιμεταθέτοντας τα γράμματα Ο1 και Ο2 είναι στην πραγματικότητα οι ίδιοι.

Για παράδειγμα,

- $ΛΟ_1ΒΟ_2Σ$ είναι ίδιος αναγραμματισμός με τον $ΛΟ_2ΒΟ_1Σ$
- $ΣΟ_1ΒΟ_2Λ$ είναι ίδιος αναγραμματισμός με τον $ΣΟ_2ΒΟ_1Λ$
- $ΣΟ_1Ο_2ΛΒ$ είναι ίδιος αναγραμματισμός με τον $ΣΟ_1Ο_2ΛΒ$ κ.ο.κ

Έτσι λοιπόν οι 120 αναγραμματισμοί που βρήκαμε αποτελούνται από ζεύγη ίδιων αναγραμματισμών.Τελικά η απάντηση είναι $\frac{120}{2} = 60$.

37.Να βρεθεί το πλήθος των αναγραμματισμών της λέξης ΑΠΑΡΤΙΑ.

Εδώ βλέπουμε ότι το γράμμα Α εμφανίζεται τρεις φορές ενώ τα υπόλοιπα γράμματα εμφανίζονται μια φορά. Θεωρούμε πάλι τα τρία γράμματα Α είναι τρία διαφορετικά γράμματα Α1,Α2,Α3 τότε έχουμε τις μεταθέσεις 7 γραμμάτων άρα συνολικά έχουμε $M_7 = 7!$ αναγραμματισμούς. Ωστόσο όλοι οι αναγραμματισμοί που προκύπτουν από την μετάθεση των Α1,Α2,Α3 είναι ίδιοι.Τα τρία γράμματα Α1,Α2,Α3 τοποθετούνται στον αναγραμματισμό με 3! διαφορετικούς τρόπους άρα οι 7! αναγραμματισμοί χωρίζονται σε 3! ίδιους αναγραμματισμούς.Έτσι η τελική απάντηση είναι $\frac{7!}{3!} = 840$

38. Να βρεθεί το πλήθος των αναγραμματισμών της λέξης ΚΟΚΚΙΝΟ.

Εδώ τώρα έχουμε 2 φορές τα γράμμα Ο ,3 φορές το γράμμα Κ και τα υπόλοιπα από μια φορά ,αν πάλι σκεφτούμε όπως προηγουμένως θεωρώντας όλα τα γράμματα διαφορετικά έχουμε 7! αναγραμματισμούς. Μπορούμε να μεταθέσουμε τα ίδια γράμματα Ο κατά 2! τρόπους , τα 3 ίδια γράμματα Κ κατά 3! τρόπους και έχουμε συνολικά

$\frac{7!}{3! \cdot 2!} = 420$ αναγραμματισμούς. ■

Συμπεραίνουμε λοιπόν από τα προηγουμενα,στο ερώτημα:

«Με πόσους τρόπους τοποθετούμε ν αντικείμενα σε μια ευθεία ,όταν μας ενδιαφέρει η θέση τους,από τα οποία τα k_1 είναι ίδια μεταξύ τους, τα k_2 είναι ίδια μεταξύ τους,…,τα k_i είναι ίδια μεταξύ τους και ισχύει $k_1+k_2+\ldots+k_i=\nu$ »

Η απάντηση στο πρόβλημα αυτό δίνεται από τον τύπο $\dfrac{\nu!}{k_1!k_2!\cdot\ldots\cdot k_i!}$

Τοποθετήσεις σαν την παραπάνω ονομάζονται **επαναληπτικές μεταθέσεις.**

39.i.Με πόσους τρόπους μπορούμε να βαλουμε σε μια ευθεία γραμμή 3 κόκκινα σφαιρίδια και 4 πράσινα σφαιρίδια.

ii.Πόσους πενταψήφιους αριθμούς μπορούμε να σχηματίσουμε με πέντε αριθμημένες κάρτες,από τις οποίες οι τρεις φέρουν την ένδειξη 4,μια το 5 και μια τον 6.

i.Έχουμε επαναληπτικές μεταθέσεις 7 αντικειμένων από τα οποία 3 είναι ίδια μεταξύ τους (κόκκινα) και 4 είναι ίδια μεταξύ τους (πράσινα).Άρα από τον παραπάνω τύπο:

$$\frac{7!}{3!4!}=\frac{5\cdot6\cdot7}{6}=35 \quad \text{τρόποι}$$

ii. Έχουμε επαναληπτικές μεταθέσεις 5 αντικειμένων από τα οποία 3 είναι ίδια μεταξύ τους (τεσσάρια), 1(πεντάρι) και 1(εξάρι).Άρα από τον τύπο: $\dfrac{5!}{3!1!1!}=20$ τρόποι. ■

40.Εχουμε 20 διαφορετικά κουτιά,10 όμοια άσπρα κουτιά και 10 όμοια μαύρα κουτιά.Με πόσους τρόπους μπορούμε να τοποθετήσουμε από ένα κουτί σε ένα συρτάρι;

Πρόκειται για επαναληπτική μετάθεση 20 αντικειμένων από τα οποία τα 10 είναι ίδια μεταξύ τους (μαύρα) και και τα άλλα 10 επίσης ίδια μεταξύ τους(άσπρα) άρα,

Άρα από τον τύπο: $\dfrac{20!}{10!10!}=184756$ τρόποι

Αρκετές φορές για την επίλυση ενός προβλήματος απαρίθμησης πρέπει να σκεφτούμε «ανάποδα», ίσως να είναι πιο εύκολο να μετρήσουμε όχι τι μας ζητούν αλλά τι δεν μας..ζητούν.Να δούμε ένα παράδειγμα. ■

41.Στην μακρινή Λοξολάνδη το αλφάβητο συνιστάται από 6 γράμματα, για κάθε λέξη που χρησιμοποιείται σε αυτή την εξωτική (!) χώρα ισχύουν απαρεγκλίτως δυο κανόνες:

I. Αποτελείται από ακριβώς 5 γράμματα.

II. Έχει τουλάχιστον δυο ίδια γράμματα.

Από πόσες λέξεις το πολύ αποτελείται το Λοξολανδιανό λεξιλόγιο.

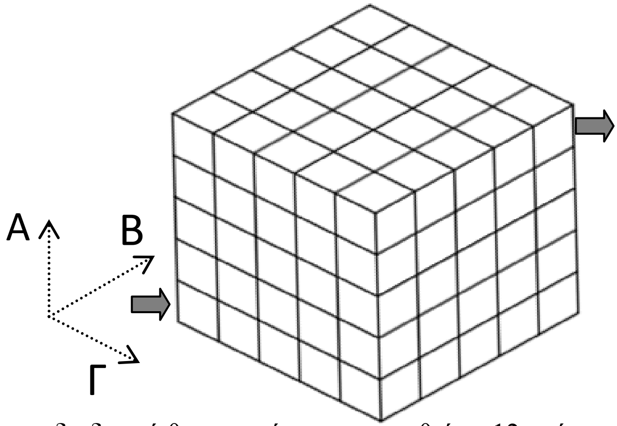
Μια πρώτη προσέγγιση είναι να μετρήσουμε πόσες λέξεις έχουν 2 γράμματα ίδια ,κατόπιν πόσες λέξεις έχουν 3 γράμματα ίδια,κατόπιν πόσες λέξεις έχουν 4 γράμματα ίδια κ.ο.κ και στην συνέχεια να προσθέσουμε.Είναι όμως ευκολότερο να απαριθμήσουμε όλες τις λέξεις που δημιουργούνται από τα 6 γράμματα του Λοξολανδιανού αλφαβήτου (από την πολλαπλασιαστική αρχή είναι 6^5) και ύστερα να αφαιρέσουμε το πλήθος αυτών που δεν μας «κάνουν». Στο συγκεκριμένο παράδειγμα ,δεν μας «κάνουν» οι λέξεις που έχουν όλα τα γράμματα διαφορετικά (πλήθος μεταθέσεων 6 στοιχείων δηλαδή $M_6=6!$).Έτσι, προκύπτουν $6^5-6!=7056$ λέξεις. ■

Οι αναγραμματισμοί εμφανίζονται εκεί που δεν τους περιμένεις.

42.Έστω ότι έχουμε ένα κύβο πλευράς 5 μονάδων, ο οποίος υποδιαιρείται σε 125 μοναδιαίους κύβους.Ένα σημείο βρίσκεται στο κέντρο ενός μοναδιαίου κύβου που είναι γωνιακός σε σχέση με τον αρχικό κύβο.Το μετακινούμε από την αρχική του θέση προς το κέντρο ενός κύβου, με τον οποίο ο γωνιακός κύβος έχει κοινή έδρα. Στην συνέχεια κάνουμε το ίδιο από την νέα θέση, με τέτοιον τρόπο, ώστε να αυξάνει συνεχώς την απόσταση του από την αρχική του θέση. Με πόσους τρόπους μπορεί να μετακινηθεί το σημείο σε γωνιακό κύβο που απέχει την μεγαλύτερη απόσταση σε σχέση με την αρχική θέση;

Λύση

Το σημείο για να καλύψει την μεγαλύτερη απόσταση σε σχέση με την αρχική του θέση πρέπει να φτάσει στο γωνιακό κύβο που βρίσκεται αντιδιαμετρικά σε σχέση με τον κεντρικό μοναδιαίο κύβο, δηλ,να μετακινηθεί συνολικά 12 φορές,4 προς κάθε μια διεύθυνση. Ονομάζουμε τις μετακινήσεις της $1^{ης}$ διεύθυνσης Α, τις μετακινήσεις της $2^{ης}$ διεύθυνσης Β και τις μετακινήσεις της $3^{ης}$ διεύθυνσης Γ.



Οποιαδήποτε διαδρομή θα μπορεί να παρασταθεί με 12 γράμματα Α,Β,Γ και το κάθε γράμμα να έχει χρησιμοποιηθεί ακριβώς 4 φορές, άρα πρόκειται για τους αναγραμματισμούς 12 γραμμάτων με τα Α,Β,Γ να επαναλαμβάνονται

4 φορές το καθένα,δηλαδή $\frac{12!}{4!\cdot 4!\cdot 4!}=34650$ ■

Το ζήτημα στην μαθηματική σκέψη είναι να μαντεύεις και να αποδεικνύεις. Δεν υπάρχουν καθορισμένα διαδικαστικά πρότυπα.Δοκιμάζουμε τούτο και το άλλο.Διατυπώνουμε εικασίες.Προσπαθούμε να γενικεύσουμε το αποτέλεσμα, ώστε να καταστήσουμε την απόδειξη ευκολότερη. Δοκιμάζουμε ειδικές περιπτώσεις, για να δούμε μήπως μπορούμε έτσι να κατανοήσουμε κάτι.Τέλος-και ποιος ξέρει πως;-ισως καταλήξουμε σε μια απόδειξη.



Απλουστεύοντας την εκφώνηση!

43.Ο Κλεόβουλος είναι ένας τραγουδιστής με μικρό ρεπερτόριο,γνωρίζει μόνο επτά τραγούδια: τρεις μπαλάντες και τέσσερα χορευτικά τραγούδια.Σε κάθε παράσταση του, παίζει μόνο αυτά τα επτά τραγούδια από μια φορά το καθένα.Αλλάζει όμως τη σειρά που τα παίζει δηλαδή για κάθε ζεύγος παραστάσεων που έδωσε η σειρά που έπαιξε τα επτά τραγούδια του είναι διαφορετική.Πάντα όμως εφαρμόζει τον ακόλουθο κανόνα.Ποτέ δεν τραγουδά τρία τραγούδια στην σειρά ,πάντα μια μπαλάντα να είναι μεταξύ δυο χορευτικών τραγουδιών.
Πόσες διαφορετικές παραστάσεις μπορεί να δώσει ο Κλεόβουλος;

Μπορούμε να μετασχηματίσουμε την εκφώνηση κάνοντας την απλούστερη.Αν ονομάσουμε τις μπαλάντες (διαφορετικές) με τα γράμματα Α,Ι,Ε και τα χορευτικά κομμάτια (διαφορετικά) με τα γράμματα Μ,Γ,Κ,Σ. Η παραπάνω εκφώνηση παίρνει την ισοδύναμη μορφή:

Πόσοι είναι οι αναγραμματισμοί της λέξης ΜΑΓΙΚΕΣ αν δεν βρίσκεται κανένα φωνήεν απομονωμένο μεταξύ δυο συμφώνων;

Πως το χειριζόμαστε;

«Σε ξέρω από κάπου;» Η αναζήτηση αναλόγου γνωστού προβλήματος είναι η ευρετική του λαού αλλά μην γελιέστε αυτό δεν την αποδυναμώνει.



Αρχικά παρατηρούμε ότι δεν υπάρχουν όμοια γράμματα.Τι σημαίνει η φράση:«**δεν βρίσκεται κανένα φωνήεν απομονωμένο μεταξύ δυο συμφώνων»**
Τα φωνήεντα θα πηγαίνουν δυο–δυο σαν τους Χιώτες ή και τρία μαζί εκτός αν βρίσκονται μόνα τους στην αρχή ή στο τέλος της λέξης.
Ας διακρίνουμε περιπτώσεις:
-Τα φωνήεντα πάνε τρία μαζί ,τότε τα θεωρούμε ως ένα αντικείμενο το οποίο μπορεί να γράφει με 3! τρόπους. Τώρα η λέξη αποτελείται από το «μεγάλο» φωνήεν και 4 σύμφωνα (1+4=5 αντικείμενα) άρα μπορεί να γραφεί με 3!*5! τρόπους.

-Ένα φωνήεν είναι στην αρχή της λέξης με 3 τρόπους κατόπιν βάζουμε ένα σύμφωνο με 4 τρόπους. Δεν θα μπορούσαμε να βάλουμε τα δυο φωνήεντα έχουμε ήδη μετρήσει αυτήν την περίπτωση. Θεωρούμε πάλι τα άλλα δυο φωνηέντα ως ένα αντικείμενο και αυτό γίνεται με 2! τρόπους έχουμε λοιπόν 3*4*2!4! τρόπους

-Ένα φωνήεν είναι στο τέλος της λέξης με 3 τρόπους ,βάζουμε ένα σύμφωνο πριν με 4 τρόπους. Δεν θα μπορούσαμε να βάλουμε τα δυο φωνήεντα πριν ,έχουμε ήδη μετρήσει αυτήν την περίπτωση. Θεωρούμε τα άλλα δυο φωνηέντα ως ένα αντικείμενο και αυτό γίνεται με 2! τρόπους έχουμε λοιπόν 3*4*2!4! τρόπους
Συνολικά 3!*5! + 2*3*4*2!4!=1872 τρόποι . ■

Αριθμητικές καλλιτεχνικές χειριλασίες και υπολογιστικές ουτοπίες

1234567891011121314151617
1819202122232425262728293
0313233343536373839404142
4344454647484950515253545
5565758596061626364656667
6869707172737475767778798
0818283848586878889909192
93949....

Το 1965, στην Βαρσοβία,ο Πολωνός καλλιτέχνης Roman Opałka στο ατελιέ του,σε ένα καμβά 196 × 135 cm με αφετηρία την πάνω αριστερά γωνία ζωγράφισε ένα πολύ μικρό 1 και κατόπι ένα 2, και συνέχισε,γεμίζοντας τον καμβά με διαδοχικούς αριθμούς μέχρι που όταν γέμισε,έβαλε έναν νέο και συνέχισε από εκεί που είχε μείνει κ.ο.κ.Ονόμασε αυτήν την συλλογή με πίνακες *Λεπτομέρειες (Details).*Όλοι τους είχαν τις ίδιες διαστάσεις και το ίδιο όνομα *1965 / 1 – ∞.*

Σχεδόν αφιέρωσε την υπόλοιπη ζωή του σε αυτό το εικαστικό εγχείρημα. *«Όλη μου η δουλειά είναι ένα απλό πράγμα»,* είπε, *«Η αναπαράσταση των αριθμών από το ένα μέχρι το άπειρο.Ένα απλό πράγμα,μια απλή ζωή…Το πρόβλημα είναι ότι τώρα ήμαστε, και πρόκειται στο μέλλον να μην ήμαστε…»*(Αυτό γίνεται ωραίο ζειμπέκικο!)

Αρχικά, είχε ζωγραφίσει λευκούς αριθμούς σε μαύρο φόντο,αλλά το 1972 άρχισε σταδιακά να ανοίγει το χρώμα στο φόντο λέγοντας ότι ο στόχος ήταν *«να παραμείνει το λευκό στο λευκό και παρόλα αυτά να είναι ζωντανό».*Ανέμενε ότι αυτό θα γινόταν όταν θα έφτανε στον αριθμό 7777777.Τον πρόλαβε ο θάνατος το 2011,είχε φτάσει μέχρι τον αριθμό 5607249.

Ένας από τους αγαπημένους μου συγγραφείς-δάσκαλους των μαθηματικών,ο Α.Ποσαμέντιερ στο εξαιρετικό βιβλίο του *Mathematical amazements and surprises,* αναρωτιέται πόσους αριθμούς μπορεί να μετρήσει ένας άνθρωπος την ενήλικη ζωή του.Απλή αριθμητική.Αρχικά,θεώρει ότι ο μέσος άνθρωπος προφέρει ένα διψήφιο σε χρόνο ενός δευτερόλεπτου και ένα εξαψήφιο σε πέντε δευτερόλεπτα.Οπότε θεωρεί ότι χρειάζεται κατά μέσο όρο τέσσερα δευτερόλεπτα για να προφέρει ένα αριθμό.Υποθέτει ότι αρχίζει να μετρά μόλις κλείσει τα δέκα του χρόνια και τελειώνει το μέτρημα στα εβδομήντα του χρόνια.Αγνοώντας τα δίσεκτα έτη δίχως ύπνο ή οποιαδήποτε άλλη δραστηριότητα που θα διέκοπτε το μέτρημα,αυτό το αεικίνητο ανθρώπινο ον θα έφτανε στον αριθμό 473040000. Σκεφτείτε με εξήντα χρόνια συνεχούς μετρήματος
(60 χρόνια) *(365 μέρες)*(24 ώρες) *(60 λεπτά)*(60 δευτερόλεπτα).
Όποτε λαμβάνουμε τον αριθμό

$$\frac{60 \cdot 365 \cdot 24 \cdot 60 \cdot 60}{4} = 473040000$$



Διατάξεις ν διαφορετικών αντικειμένων ανά κ

Θέλουμε να διατάξουμε –να τοποθετήσουμε σε μια σειρά- 5 από 8 αντικείμενα. Πως το χειριζόμαστε;

Η τοποθέτηση σε σειρά των 5 από τα 8 διαφορετικά αντικείμενα σε 3 θέσεις μπορεί να πραγματοποιηθεί σε 5 φάσεις.Η πρώτη φάση είναι η τοποθέτηση αντικειμένου στην πρώτη θέση, η οποία μπορεί να πραγματοποιηθεί με 8 τρόπους, γιατί υπάρχουν 8 διαθέσιμα αντικείμενα.Για καθέναν από αυτούς, η δεύτερη φάση είναι η τοποθέτηση αντικειμένου στη δεύτερη θέση, η οποία μπορεί να πραγματοποιηθεί με 8-1=7 τρόπους, γιατί υπάρχουν 8-1=7 διαθέσιμα αντικείμενα (ένα αντικείμενο έχει τοποθετηθεί στην πρώτη θέση),….,και για καθέναν από αυτούς, η κ-φάση είναι η τοποθέτηση αντικειμένου στη κ-θέση, η οποία μπορεί να πραγματοποιηθεί με 8-(κ-1) τρόπους, γιατί υπάρχουν 8-(κ-1) διαθέσιμα αντικείμενα (τα άλλα κ- 1 αντικείμενα έχουν τοποθετηθεί).

Φάσεις	$1^{η}$ θέση	$2^{η}$ θέση	……….	5 θέση
Τρόποι	8	7	…………	4

Συνεπώς, με βάση την πολλαπλασιαστική αρχή της απαρίθμησης, η τοποθέτηση των αντικειμένων μπορεί να πραγματοποιηθεί με 8·7·6·5·4=6720 διαφορετικούς τρόπους

Ας το γενικεύσουμε,

Διάταξη ν διαφορετικών αντικειμένων ανά κ είναι κάθε τοποθέτηση των κ από τα ν αντικείμενα σε σειρά.

Αποδεικνύεται γενικεύοντας το προηγούμενο παράδειγμα,ότι:

Το πλήθος των διατάξεων ν διαφορετικών αντικειμένων ανά κ συμβολίζεται με Δ_κ^ν και ισχύει:

$$\Delta_\kappa^\nu = \frac{\nu!}{(\nu-\kappa)!} \quad \text{ή} \quad \Delta_\kappa^\nu = \nu\cdot(\nu-1)\cdot.....\cdot(\nu-\kappa+1)$$

Μερικά παραδείγματα.

44.Ο Γιάννης θα επιλέξει 5 από 9 διαφορετικά πουκάμισα, για να φορέσει ένα, διαφορετικό κάθε μέρα, από τη Δευτέρα μέχρι και την Παρασκευή. Να βρείτε με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορεί να πραγματοποιηθεί η επιλογή του.

Ζητούμε όλες τις δυνατές **διατεταγμένες** πεντάδες από ένα σύνολο 9 στοιχείων. Επομένως, όλοι οι διαφορετικοί τρόποι επιλογής 5 πουκαμίσων είναι το πλήθος των διατάξεων των 9 ανά 5.Δηλαδή, έχουμε

$$\Delta_5^9 = \frac{9!}{(9-5)!} = \frac{9!}{4!} = \frac{4!\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8\cdot9}{4!} = 5\cdot6\cdot7\cdot8\cdot9 = 15120 \text{ διαφορετικούς τρόπους. } \blacksquare$$

(Εναλλακτικά θα μπορούσαμε να χρησιμοποιήσουμε την βασική αρχή απαρίθμησης.)

45. Σε μια κούρσα αλόγων τρέχουν 10 άλογα. Με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορούν να τερματίσουν στις 2 πρώτες θέσεις, αν έχει σημασία η σειρά τερματισμού;
Ζητούμε όλα τα δυνατά **διατεταγμένα** ζεύγη από ένα σύνολο 10 στοιχείων. Επομένως, όλοι οι διαφορετικοί τρόποι τερματισμού των δύο αλόγων είναι το πλήθος των διατάξεων των 10 ανά 2.Δηλαδή, έχουμε $\Delta_2^{10} = \frac{10!}{(10-2)!} = \frac{10!}{8!} = 9 \cdot 10 = 90$ διαφορετικούς τρόπους τερματισμού.

46.Η Μαρία ξέχασε τον τετραψήφιο κωδικό του συναγερμού στο σπίτι της. Θυμάται όμως ότι αποτελείται από κάποια από τα ψηφία 1, 2, 3, 4, 5 και ότι όλα τα ψηφία του κωδικού είναι διαφορετικά.
i. Να βρείτε πόσοι είναι όλοι οι δυνατοί κωδικοί που μπορούν να σχηματιστούν με τα πιο πάνω δεδομένα.
ii. Να βρείτε πόσοι είναι όλοι οι δυνατοί κωδικοί που μπορούν να σχηματιστούν, αν η Μαρία θυμάται ότι το τελευταίο ψηφίο του κωδικού είναι το 1.
Λύση
i.Κάθε τοποθέτηση σε σειρά των 4 από τα 5 διαφορετικών ψηφίων ισοδυναμεί με μια διάταξη 5 αντικειμένων ανά 4. Συνεπώς, το πλήθος των κωδικών είναι το πλήθος των διατάξεων 5 αντικειμένων ανά 4: $\Delta_4^5 = \frac{5!}{(5-4)!} = \frac{5!}{1!} = 120$

ii.Αφού η τελευταία θέση είναι ήδη συμπληρωμένη, μας απομένει να συμπληρώσουμε τις υπόλοιπες τρεις θέσεις με τα 4 ψηφία που έχουν απομείνει. Έχουμε, δηλαδή, διατάξεις των 4 ανά 3: $\Delta_3^4 = \frac{4!}{(4-3)!} = 24$ ■

47.Είκοσι αθλητές αγωνίζονται στον μαραθώνιο με τους τρεις πρώτους να λαμβάνουν μετάλλιο.Από τους τρόπους που είναι δυνατό να τερματίσουν οι τρεις αθλητές που θα πάρουν μετάλλιο να βρείτε σε πόσους παίρνει μετάλλιο ο Παπαδόπουλος.
(Ο Παπαδόπουλος είναι ένας δρομέας από τους 20 που έλαβαν μέρος στον μαραθώνιο.)

Το πλήθος των διατάξεων των τριών αθλητών που τερματίζουν από τους 20 που έλαβαν μέρος είναι $\Delta_3^{20} = \frac{20!}{(20-3)!} = 20 \cdot 19 \cdot 18 = 6840$.Από αυτές,άλλες έχουν ως μέλος τον Παπαδόπουλο και άλλες όχι .Κάθε μια από αυτές που δεν έχουν ως μέλος τον Παπαδόπουλο, συμπίπτει με διάταξη των υπολοίπων 19 αντικειμένων του συνόλου ανά τρία. Το πλήθος αυτών είναι ίσο με $\Delta_3^{19} = \frac{19!}{(19-3)!} = 19 \cdot 18 \cdot 17 = 5814$.

Το ζητούμενο πλήθος λοιπόν των τριάδων που έχουν ως μέλος τον Παπαδόπουλο είναι 6840-5814=1026 ■

48.Με πόσους τρόπους μπορούμε να ονομάσουμε ένα τετράγωνο αν στην διάθεση μας έχουμε τα γράμματα:

Α,Β,Γ,Δ,Ε,Ζ,Η,Θ,Ι,Κ

Λύση

Δεν έχουμε επανάληψη και παίζει ρόλο η σειρά άρα οι κορυφές του τετραγώνου μπορούν να ονομαστούν με $\Delta_4^{10} = \frac{10!}{6!} = 7\cdot 8\cdot 9\cdot 10 = 5040$ τρόπους. ■

49.Πόσοι πενταψήφιοι αριθμοί υπάρχουν με τα ψηφία τους διαφορετικά;

Λύση

Κάθε πενταψήφιος αριθμός ,π.χ ο 67451 ή ο 53987 είναι μια διάταξη των 10 ψηφίων 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9 ανά 5, με την προϋπόθεση το ψηφίο 0,να μην καταλαμβάνει την πρώτη προς τα αριστερά θέση. Επειδή όμως οι διατάξεις που έχουν ως πρώτο ψηφίο το μηδέν είναι όσες και οι διατάξεις των 9 ψηφίων 1,2,3,4,5,6,7,8,9 ανά 4 , το ζητούμενο πλήθος είναι:

$$\Delta_5^{10} - \Delta_4^{9} = \frac{10!}{(10-5)!} - \frac{9!}{(9-4)!} = \frac{10!}{5!} - \frac{9!}{5!} = 6\cdot 7\cdot 8\cdot 9\cdot 10 - 6\cdot 7\cdot 8\cdot 9 =$$ ■

$$= 6\cdot 7\cdot 8\cdot 9\cdot (10-1) = 6\cdot 7\cdot 8\cdot 9^2 = 27216$$

50.Σε μια σειρά εννέα καθισμάτων πρόκειται να καθίσουν έξι φοιτητές και οι καθηγητές τους, ο κύριος Α., ο κύριος Β. και ο κύριος Γ. Οι τρεις καθηγητές φτάνουν νωρίτερα από τους φοιτητές και επιλέγουν τις θέσεις τους έτσι ώστε καθένας από τους καθηγητές να βρίσκεται μεταξύ δυο φοιτητών.Με πόσους τρόπους μπορεί να γίνει αυτό; *(AHSME1994)*

Λύση

Α τρόπος

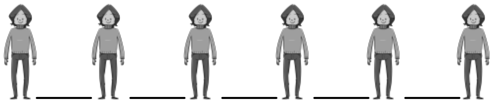
Για να πληρούνται οι προϋποθέσεις του προβλήματος, στο πρώτο και στο τελευταίο κάθισμα- κοιτώντας από αριστερά- πρέπει να καθίσουν φοιτητές. Έτσι οι καθηγητές έχουν να επιλέξουν μεταξύ των υπολοίπων 7 καθισμάτων.Αν αριθμήσουμε τα 7 αυτά καθίσματα από το 2 μέχρι το 8 ,τα τρία καθίσματα που θα επιλέξουν οι τρεις καθηγητής είναι:

(2,4,6), (2,4,7), (2,4,8), (2,5,7), (2,5,8),
(2,6,8), (3,5,7), (3,5,8), (3,6,8), (4,6,8)

Κάθε τριάδα καθηγητών μπορεί να διαταχτεί κατά 3! τρόπους άρα από την πολλαπλασιαστική αρχή ο συνολικός αριθμός τρόπων είναι 3!*10=10*6=60.

Β τρόπος

Αν φανταστούμε τους 6 φοιτητές να στέκονται σε μια σειρά πριν ακόμα καθίσουν. Υπάρχουν 5 κενά μεταξύ τους, το καθένα μπορεί να καταληφτεί από το πολύ έναν καθηγητή από τους τρεις.



Έχουμε λοιπόν διατάξεις 5 διαφορετικών αντικειμένων ανά 3 ,δηλ

$$\Delta_3^5 = \frac{5!}{(5-3)!} = \frac{5!}{2!} = 3\cdot 4\cdot 5 = 60 \text{ τρόπους.}$$ ■

Διατάξεις ν διαφορετικών αντικειμένων ανά κ με επανάληψη

Διάταξη (με επανάληψη των ν στοιχείων ενός συνόλου ανά κ λέγεται κάθε επιλογή κ στοιχείων από τα ν όπου το καθένα μπορεί να επαναλαμβάνεται μέχρι και κ φορές. Για παράδειγμα, αν θέλουμε να βρούμε πόσοι πενταψήφιοι αριθμοί σχηματίζονται με τα ψηφία 1,2,3,4,5,6,7 .Κάθε ψηφίο έχει 7 δυνατότητες επιλογής (μπορεί να επαναλαμβάνεται) και επομένως οι πενταψήφιοι αριθμοί έχουν πλήθος $7\cdot7\cdot7\cdot7\cdot7=7^5$.Το πλήθος αυτό είναι όσες και οι διατάξεις με επανάληψη των 7 ανά 5.

Γενικότερα ισχύει το συμπέρασμα:

Οι διατάξεις με επανάληψη των ν στοιχείων ανά κ είναι $R\Delta_{\kappa}^{\nu}=\nu^{\kappa}$

51.Ποσες στήλες του ΠΡΟ-ΠΟ πρέπει να συμπληρώσουμε για να πετύχουμε 13αρι;

Κάθε στήλη του ΠΡΟ-ΠΟ είναι μια διάταξη με επανάληψη των 3 στοιχείων 1,2,x ανά 13 . Συνεπώς, για να πετύχουμε σίγουρα 13-αρι,πρέπει να συμπληρώσουμε

3^{13}=1567323 στήλες ■

52.Δέκα ταξί εξυπηρετούν τα χωριά Α,Β. Με πόσους τρόπους μπορεί κάποιος – που μετακινείται μόνο με ταξί- να μεταβεί από το χωριό Α στο χωριό Β και να επιστρέψει αν:

i.Πάρει διαφορετικό ταξί;

ii.Έστω και με το ίδιο ταξί;

Λύση

i.Από τα δέκα ταξί επιλέγουμε τα 2 με καθορισμένη σειρά μετάβασης και επιστροφής. Τέτοιες επιλογές είναι όσες και οι διατάξεις των 10 αντικειμένων ανά 2:

$$\Delta_2^{10}=\frac{10!}{2!}=90$$

ii.Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε δυο διαφορετικά ταξί ή και δυο φόρες το ίδιο.Άρα το πλήθος των τρόπων , είναι όσο και πλήθος των διατάξεων με επανάληψη των 10 ανά δυο, δηλαδή $R\Delta_2^{10}=10^2=100$

Εναλλακτικά,

i.Η διαδρομή από το Α προς το Β μπορεί να γίνει με 10 τρόπους. Η διαδρομή από το Β προς το Α μπορεί να γίνει με 10-1=9 τρόπους. Συνεπώς, κάποιος είναι δυνατό να κάνει την διαδρομή από το Α στο Β και να επιστρέψει στο Α με διαφορετικό ταξί με $9\cdot10=90$ τρόπους.

ii.Η διαδρομή από το Α στο Β γίνεται με 10 τρόπους και η διαδρομή από το Β στο Α γίνεται επίσης με 10 τρόπους, άρα κάποιος μπορεί να μεταβεί από το Α στο Β και να επιστρέψει με διαφορετικό ταξί ή έστω και με το ίδιο με $10\cdot10=100$ τρόπους. ■

Οι διατάξεις με επανάληψη είναι ίσως η απλούστερη εφαρμογή της πολλασιαστικής αρχής

Η τράπουλα και η ηλικία του σύμπαντος!

Μια συνηθισμένη τράπουλα έχει 52 χαρτιά άρα ο συνολικός αριθμός των διαφορετικών τρόπων που μπορούμε να την ανακατέψουμε είναι 52!
Όπου 52! είναι περίπου 8.06582×10^{67}
Οι επιστήμονες εικάζουν ότι η ηλικία του σύμπαντος είναι ανάμεσα στα 10 και 16 δισεκατομμύρια χρόνια (16000000000)
Ας πάρουμε την μεγαλύτερη τιμή $16000000000=16 \times 10^{9}$ χρόνια και ας το μετατρέψουμε σε δευτερόλεπτα



Έχουμε:
-60 δευτερόλεπτα σε ένα λεπτό.
-60 λεπτά σε μια ώρα.
-24 ώρες σε μια ημέρα.
-365 ημέρες σε ένα χρόνο (366 στα δίσεκτα έτη).
Άρα η μέγιστη εκτίμηση της ηλικίας του σύμπαντος σε δευτερόλεπτα είναι :
$60 \times 60 \times 24 \times 365 \times 16000000000 = 504576000000000000$ περίπου 5×10^{17} δευτερόλεπτα. Παρατηρούμε ότι: $8.06582 \times 10^{67} > 5 \times 10^{17}$
Άρα είναι σαφές ότι υπάρχουν περισσότεροι τρόποι να ανακατευτεί μια τράπουλα από ότι η ηλικία του σύμπαντος σε δευτερόλεπτα.

2.Ασκήσεις,προβλήματα ***(Μεταθέσεις,κυκλικές μεταθέσεις, διατάξεις,επαναληπτικές διατάξεις)***

Α33. Μια εταιρεία διαθέτει 4 επιστημονες,15 ειδικευμένους εργάτες και 20 ανειδίκευτους. Με πόσους τρόπους μπορεί να συγκροτηθεί μια τριμελής επιτροπής με ένα άτομο από κάθε ομάδα;

Α34. Με πόσους τρόπους μπορούν 5 επιβάτες να καθίσουν σε 5 κενές θέσεις ενός τραίνου;

Α35. i. Με πόσους τρόπους μπορούν να καθίσουν 8 μαθητές γύρω από ένα στρογγυλό τραπέζι.
ii. Με πόσους τρόπους μπορούν να καθίσουν 8 μαθητές γύρω από ένα στρογγυλό τραπέζι σε δέκα αριθμημένες θέσεις.

Α36. Να βρείτε το πλήθος των διατάξεων των συμβολών ♣,▼,¥,● ανά 2.

Α37. Σε ένα πρωτάθλημα ποδοσφαίρου κάθε ομάδα δίνει δυο αγώνες με όλες τις υπόλοιπες. Να βρείτε πόσες ομάδες πρέπει να συμμετέχουν στο πρωτάθλημα αν είναι γνωστό ότι πραγματοποιήθηκαν συνολικά 240 αγώνες.

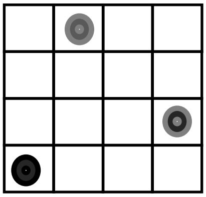
Α38. Τρεις άνθρωποι έχουν γενέθλια τον Μάρτιο. Να βρείτε με πόσους τρόπους:
i.Οι τρεις έχουν γενέθλια την ίδια μέρα;
ii.Οι τρεις έχουν γενέθλια διαφορετικές μέρες;

Α39. Απο μια τράπουλα 52 φύλλων παίρνουμε διαδοχικά 2 χωρίς επανατοποθέτηση.Με πόσους τρόπους μπορεί να γίνει αυτό;Με επανατοποθέτηση;

Α40. i.Με πόσους τρόπους μπορούμε να τοποθετήσουμε 10 διαφορετικά βιβλία σε ένα ράφι το ένα δίπλα στο άλλο;
ii.Με πόσους τρόπους μπορούμε από 10 βιβλία να πάρουμε τα 5 και να τα τοποθετήσουμε σε ένα ράφι βιβλιοθήκης, το ένα δίπλα στο άλλο;

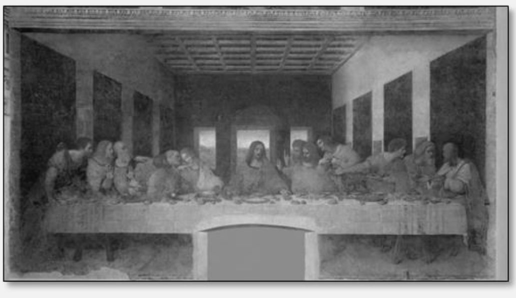
Α41. Ποσοι εξαψήφιοι θετικοί ακέραιοι έχουν τουλάχιστον ένα άρτιο ψηφίο.

Α42.Από τέσσερεις πόλεις,την Λαμία, το Μεσολόγγι ,το Αγρίνιο και την Θεσσαλονίκη επιλέχτηκαν τρεις μαθηματικοί να εκπροσωπήσουν τις πόλεις τους σε ένα μαθηματικό συνέδριο. Με πόσους τρόπους οι εννέα μαθηματικοί μπορούν να καθίσουν σε μια σειρά καθισμάτων έτσι ώστε οι μαθηματικοί κάθε πόλης να κάθονται μαζί (δίπλα– δίπλα);
Α43.Με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορούν να ταχτοποιηθούν σε ένα οριζόντιο ράφι 5 βιβλία μαθηματικων,3 βιβλία χημείας και 4 βιβλία φυσικής,
i.Χωρίς κανένα περιορισμό.
ii.Τα βιβλία χημείας να είναι μαζί.
iii. Τα βιβλία κάθε θεματικής ενότητας να είναι μαζί;
Α44.Δυο πόλεις Α και Β αποτελούν τα άκρα μιας σιδηροδρομικής γραμμής με 6 ενδιαμέσους σταθμούς.Πόσα είδη εισιτήριων χρειάζεται να τυπωθούν για να εξυπηρετήσουν αυτό το δίκτυο; (Το τυπωμένο εισιτήριο μιας διαδρομής από το από το Γ στο Δ είναι διαφορετικό από το τυπωμένο εισιτήριο από το Δ στο Γ)
Α45.Οχτω δρόμοι συνδέουν δυο πόλεις Α και Β .Με πόσους τρόπους μπορούμε να ταξιδέψουμε από την πόλη Α στην πόλη Β και να επιστρέψουμε έτσι ώστε να μην χρησιμοποιήσουμε τον ίδιο δρόμο στην επιστροφή;
Α46.Σε πόσες διατάξεις των αριθμών 1,2,3,4,5,6,7,8,9,10 ανά 7 παρουσιάζεται η τριάδα 1,2,3 με αυτήν την σειρά σε τρεις συνεχόμενες θέσεις;
Α47.Σε ένα τετραγωνικό πλαίσιο 4x4 ,σε τρία διαφορετικά κελιά, τοποθετούμε τρία διαφορετικά κέρματα.Με πόσους τρόπους μπορούμε να τοποθετήσουμε τα κέρματα έτσι ώστε να μην υπάρχει ζεύγος κερμάτων που βρίσκονται στην ίδια γραμμή ή στην ίδια στήλη;



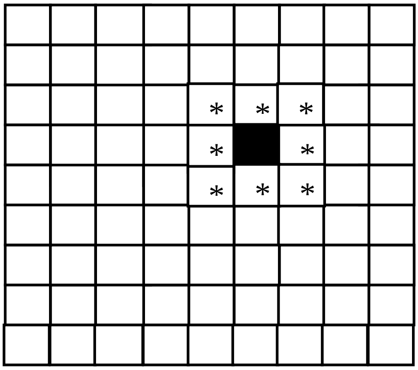
Μερικά…αντίγραφα

Όλοι γνωρίζουν τον πίνακα «Ο Μυστικός Δείπνος» του Λεονάρντο Ντα Βίντσι στο οποίο αναπαριστώνται ο Ιησούς Χριστός και οι δώδεκα απόστολοι του. Αν ο Ντα Βίντσι είχε αποφασίσει να κάνει αντίγραφα του πίνακα αλλάζοντας την θέση των συνδαιτυμόνων, θα έπρεπε να ζωγραφίσει 13!=6.227.020.800 πίνακες, περισσότερους από 6 δισεκατομμύρια.Αν είχε αποφασίσει ότι ο Ιησούς έπρεπε πάντα να είναι στο κέντρο,θα είχε γλυτώσει κάμποσο κόπο, αλλά και πάλι θα έπρεπε να ζωγραφίσει 12!=479.001.600,δηλαδη πάνω από 479 εκατομμύρια πίνακες.



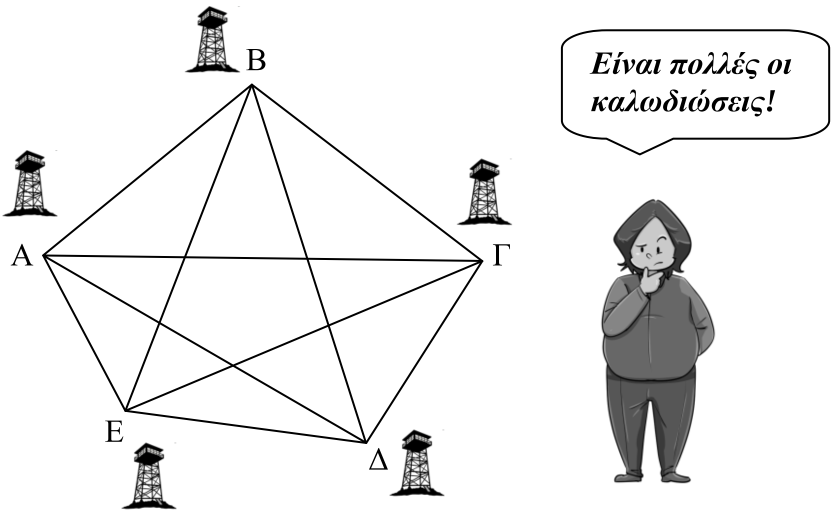
«Ο Μυστικός Δείπνος» του Λεονάρντο Ντα Βίντσι, έργο ζωγραφισμένο μεταξύ 1495 και 1947 σε έναν τοίχο της τραπεζαρίας του μοναστηριού της Σάντα Μαρία Γκράτσιε στο Μιλάνο.

Α48.Σε μια ιδιότυπη σκακιέρα 9x9, με πόσους τρόπους μπορούμε να τοποθετήσουμε δυο όμοια νομίσματα, ώστε να βρίσκονται σε τετράγωνα που έχουν κοινή πλευρά ή έστω μια κοινή κορυφή; Παράδειγμα, αν ένα από τα νομίσματα τοποθετηθεί στο μαύρο τετράγωνο,όπως στο διπλανό σχήμα, τότε υπάρχουν 8 διαφορετικές επιλογές για την τοποθέτηση του αλλού νομίσματος στην συγκεκριμένη σκακιέρα.



Α49.Πόσοι είναι οι αναγραμματισμοί της λέξης ΜΠΟΥΦΟΣ;
ii.Πόσοι από αυτούς αρχίζουν με το γράμμα Σ;
iii.Πόσοι με φωνήεν;
iv.Πόσοι με σύμφωνο;
v.Πόσοι από αυτούς δεν έχουν ως τελευταίο γράμμα το Μ;
Α50. Γράφουμε όλους τους αναγραμματισμούς της λέξης ΚΟΥΠΑ σε μια στήλη κατά αλφαβητική σειρά. Ποιο είναι τελευταίο γράμμα του $78^{ο}$ αναγραμματισμού;
Α51.Με τους αριθμούς 3,4,5,6,7,8 σχηματίζουμε πενταψήφιους αριθμούς με διαφορετικά ψηφία.
i. Πόσοι τέτοιοι αριθμοί υπάρχουν; ii.Πόσοι από τους αριθμούς είναι πολλαπλάσια του 5 ,iii. Πόσοι από αυτούς είναι περιττοί;
iv.Σε πόσους από αυτούς τα ψηφία 7 και 8 βρίσκονται σε διπλανές θέσεις;
v. Πόσοι από αυτούς είναι μικρότεροι του 66000;
vi.Πόσοι από αυτούς είναι πολλαπλάσια του 9;
Α52.Ο Παπαδόπουλος διαθέτει 10 διαφορετικά κλειδιά, από τα οποία μόνο το ένα ταιριάζει στο συρτάρι του γραφείου του, όμως δεν γνωρίζει ποιο είναι αυτό.Κάνει λοιπόν το αυτονόητο,δοκιμάζει τα κλειδιά το ένα μετά το άλλο μέχρι να ξεκλειδώσει το συρτάρι.
Με πόσους τρόπους μπορεί να τα καταφέρει,αν:
i. το συρτάρι ανοίξει στην $7^{η}$ δόκιμη.
ii.το συρτάρι ανοίξει μέχρι την $6^{η}$ δόκιμη.
iii. το συρτάρι να ανοίξει με την τελευταία δοκιμή
Α53.Να βρείτε το πλήθος των οκταψήφιων θετικών ακεραίων που σχηματίζονται από τα ψηφία 0,1,2,3,…,9 χωρίς επανάληψη των ψηφίων και είναι πολλαπλάσια του 9 .

Α54.*Να αποδείξετε ότι το πλήθος των οκταψηφίων αριθμών με όλα τα ψηφία τους άρτια ή περιττά είναι αριθμός περιττός.
Α55.Ο Γιάννης έχει 15 φίλους.Με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορεί να τους προσκαλέσει σε δείπνο;
Α56.Σε μια ουρά στο ταμείο για την αγορά του νέου βιβλίου του μεταμοντέρνου ποιητή Πότη Μούτα περιμένουν 20 άτομα. Μεταξύ αυτών,ο Μάκης και ο Τάκης.
i.Με πόσους τρόπους ο Μάκης και ο Τάκης είναι δυνατό να βρίσκονται σε γειτονικές θέσεις;
ii.Με πόσους τρόπους ο Μάκης προηγείται του Τάκη στην ουρά και όχι απαραίτητα μόνο μια θέση;
Α57.Πέντε παρατηρητήρια (Α,Β,Γ,Δ,Ε) σε ένα δάσος πρέπει να συνδεθούν - ανά δυο- ενσύρματα με μια γραμμή τηλεφώνου (σχήμα). Διαθέτουμε 5 διαφορετικά είδη καλωδίωσης (Κ1,Κ2,Κ3,Κ4,Κ5).Κάθε παρατηρητήριο συνδέεται με το άλλο μόνο με ένα είδος καλωδίωσης. Για να γίνει η σύνδεση χωρίς παράσιτα στην επικοινωνία είναι απαραίτητο κάθε τριάδα παρατηρητηρίων να συνδέεται (ανά δυο παρατηρητήρια) να έχει διαφορετικό είδος καλωδίωσης.Πόσες διαφορετικές συνδέσεις υπάρχουν;



Α58. Να βρείτε το πλήθος των αναγραμματισμών της λέξης ΚΑΝΕΝΑ στις οποίες δεν εμφανίζονται δυο όμοια γράμματα σε διπλανές θέσεις.
Α59. Στο βιβλίο του διακεκριμένου μαθηματικού του προηγούμενου αιώνα Γ.Κ. Χάρντι *Η απολογία ενός μαθηματικού*,ο Χάρντι διηγείται μια ιστορία από τις επισκέψεις του στο νοσοκομείο του Putney, όπου νοσηλευόταν ο Ραμανουτζάν και βρισκόμενος όπως πάντα σε αμηχανία για το πώς θα ξεκινήσει τη συζήτηση είπε:
«Νομίζω ότι αριθμός κυκλοφορίας του ταξί που με έφερε ήταν 1729.Μου φάνηκε πολύ αδιάφορος αριθμός».
Για να λάβει την απάντηση από τον Ραμανουτζάν:
«Οχι, Χάρντι, όχι !Είναι πολύ ενδιαφέρων αριθμός, είναι ο μικρότερος αριθμός που μπορεί να γραφεί ως άθροισμα δύο κύβων με δύο διαφορετικούς τρόπους.»

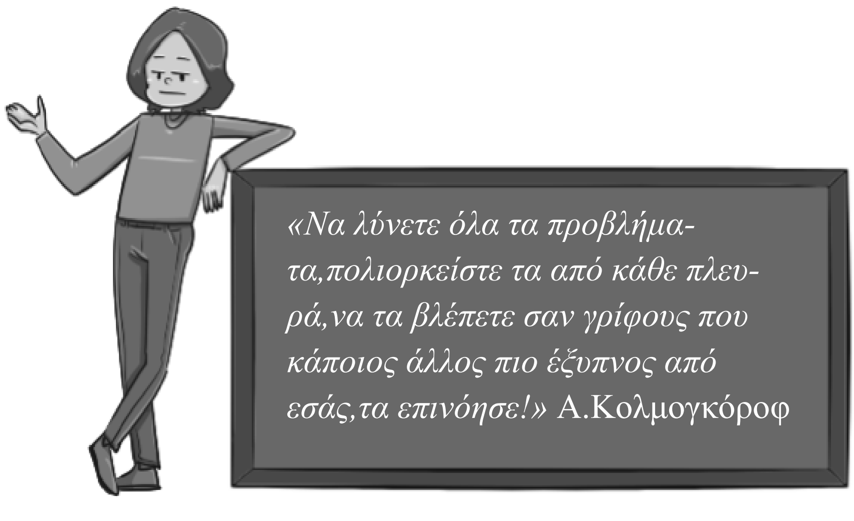
Πραγματικά,ο αριθμός 1729 γράφεται: $1729 = 1^3 + 12^3 = 9^3 + 10^3$
Αν θεωρήσουμε όλους τους τετραψήφιους αριθμούς που σχηματίζονται με χρήση των ψηφίων 1,7,2,9 χωρίς να επαναλαμβάνεται κανένα από αυτά τα ψηφία.
i.Πόσοι τέτοιοι αριθμοί υπάρχουν; ii.Ποιο είναι το άθροισμα τους;

Α60.Ο Πλάτωνας στην *Πολιτεία* αναφέρει ένα μυθικό αντικείμενο ,το *Δαχτυλίδι του Γύγη* που έδινε στον ιδιοκτήτη του την ικανότητα να γίνεται αόρατος με τη θέλησή του. Αυτό είναι γνωστό ,αυτό που δεν είναι γνωστό είναι ότι δεν ήταν ένα το δακτυλίδι αλλά έξι διαφορετικά και έπρεπε-σύμφωνα με τον μύθο- να φορεθούν σε τουλάχιστον ένα δάκτυλο του αριστερού χεριού πλην του αντίχειρα. Με πόσους τρόπους μπορεί να γίνει αυτό;

Α61. Μια παρέα 5 αγοριών και 4 κοριτσιών τοποθετείται σε ένα στρογγυλό τραπέζι με την προϋπόθεση δυο κορίτσια να μην βρίσκονται σε διπλανές θέσεις.
i.Με πόσους τρόπους μπορεί να γίνει αυτό;
ii.Αν έχουμε α αγόρια και β κορίτσια;
iii.Αν τα 9 παιδιά τοποθετούνται σε ευθεία γραμμή πως λύνεται το ίδιο πρόβλημα

Α62.Σε ένα δρόμο υπάρχουν ν σπίτια αριθμημένα από το 1 έως το ν. Τα σπίτια με περιττό αριθμό βρίσκονται στην μια πλευρά και τα σπίτια με άρτια στην άλλη.Ένας ταχυδρόμος θέλει να παραδώσει από μια εφημερίδα σε κάθε σπίτι. Με πόσους τρόπους μπορεί να το κάνει αν θέλει να παραδίδει τις γράμματα εναλλάξ από την μια πλευρά στην άλλη,αν:
i.$\nu=20$ ii. $\nu=21$

Α63. Ένας εννιαψήφιος θετικός ακέραιος αριθμός που αποτελείται από τα ψηφία 1 έως 9 (κάθε ψηφίο έχει χρησιμοποιηθεί ακριβώς μια φορά) ονομάζεται «πολυπράγμων».Έστω εννέα (όχι κατά ανάγκη διαφορετικοί) πολυπράγμονες αριθμοί. Ποιος είναι μέγιστος δυνατός αριθμός από μηδενικά που μπορεί να τελειώνει το άθροισμα τους; *(kvant magazine)*



Το «θεώρημα» των άπειρων πιθήκων

Έστω ότι έχουμε ένα πίθηκο μπροστά σε μια γραφομηχανή,αν του δοθεί αρκετός χρόνος (μερικές χιλιάδες χρόνια ή και περισσότερο) πληκτρολογώντας στην τύχη,θα γράψει τελικά ανάμεσα σε πολλά άλλα σίγουρα και ένα από τα έργα του Σαίξπηρ.Η εικασία αυτή αποδίδεται σε ελεύθερη μετάφραση *«θεώρημα των απείρων πιθήκων» (Infinite monkey theorem)* και δραματοποιεί δυο στοιχεία των τυχαίων ακολουθιών: *«Οτιδήποτε μπορεί να προκύψει και το αποτέλεσμα δεν θα είναι απαραίτητα τυχαίο.»* Η εικασία πάει ένα βήμα παραπέρα και ισχυρίζεται ότι αν ο χιμπατζής συνεχίζει να πατά πλήκτρα επ' άπειρον τότε με βεβαιότητα Θα γράψει οποιοδήποτε δοθέν κείμενο.Ας το δούμε λίγο με όρους συνδυαστικής και ας προσομοιώσουμε την διαδικασία της πληκτρολόγησης με την χρήση δυο ζαριών, και ένα πινάκα διπλής εισόδου.Φανταστείτε ότι έχετε δυο ζάρια και ένα πινάκα 6Χ6 με όλα τα γράμματα του ελληνικού αλφάβητου καθώς και τα σημεία στίξης ακόμα και το κενό (μην ξεχνάτε ότι μιλάμε για έργο του Σαίξπηρ). Ρίχνουμε τα δυο ζάρια και ανάλογα με τους αριθμούς που θα φέρνουμε γράφουμε στο χαρτί το αντίστοιχο σύμβολο του πινάκα. Για παράδειγμα,αν φέρουμε 3 και 4. Γράφουμε στο χαρτί το σύμβολο που Βρίσκεται στην τρίτη γραμμή και στην τέταρτη στήλη δηλαδή το γράμμα Π. Αν συνεχίσουμε να ρίχνουμε τα ζάρια είναι σχεδόν βέβαιο ότι θα πέσουμε πάνω σε κάποια λέξη με τρία ή περισσότερα γράμματα.Ας δούμε πόσες ρίψεις θα χρειαστούμε κατά μέσο όρο για να εμφανιστεί η λέξη:

1ο ΖΑΡΙ (στήλες) — **2ο ΖΑΡΙ** (γραμμές)

	1	2	3	4	5	6
1	Α	Β	Γ	Δ	Ε	Ζ
2	Η	Θ	Ι	Κ	Λ	Μ
3	Ν	Ξ	Ο	Π	Ρ	Σ
4	Τ	Υ	Φ	Χ	Ψ	Ω
5	.	,	;	!	:	‘
6	‘	(	)	»	«	

ΣΥΝΔΥΑΣΤΙΚΗ

Ο κάθε χαρακτήρας του πίνακα έχει από την ρίψη των ζαριών μια προσδοκία εμφάνισης 1/36 άρα πρέπει να ρίξουμε κατά μέσο 36 φόρες τα ζάρια για να πετύχουμε τον χαρακτήρα,δεδομένου ότι η λέξη έχει 11 χαρακτήρες πρέπει να ρίξουμε τα ζάρια 36* 36 * 36*36 * 36*36 *36*36 *36*36*36 $=36^{11}$ φορές Δηλαδή 131621703842267136 φορές.Αν αναρωτηθούμε πόσες ρίψεις ζαριών πρέπει να κάνουμε για να παραξουμε τα άπαντα του Σαίξπηρ.Με μια μετριοπαθή υπόθεση ότι όλα τα έργα του Σαίξπηρ αποτελούνται συνολικά από 5.000.000 χαρακτήρες τότε Θα απαιτούνταν $36^{5000000}$ ρίψεις.Ένας χιμπατζήςο οποίος θα πληκτρολογούσε περίπου 10 χαρακτήρες το δευτερόλεπτο θα του έπαιρνε $3*10^{2385597}$ χρόνια για να ολοκληρώσει …το έργο του Σαίξπηρ.



Συνδυασμοί ν διαφορετικών αντικειμένων ανά κ

Συνδυασμός (combination) ν διαφορετικών αντικειμένων ανά κ λέγεται κάθε ομάδα των κ από τα ν αντικείμενα, **χωρίς να μας ενδιαφέρει** η διάταξή τους σε σειρά.

Συμβολίζεται $\binom{\nu}{\kappa}$ ή C_{κ}^{ν}

Όπως γνωρίζουμε, το πλήθος των διατάξεων ν αντικειμένων ανά κ δίνεται από

τον τύπο: $\Delta_{\kappa}^{\nu} = \dfrac{\nu!}{(\nu-\kappa)!}$ (1)

Θα βρούμε τώρα το Δ_{κ}^{ν}, χρησιμοποιώντας την έννοια των συνδυασμών.

Κάθε διάταξη ν αντικειμένων ανά κ μπορεί να γίνει σε δύο φάσεις.

Στην πρώτη φάση, παίρνουμε κ από τα ν αντικείμενα, το οποίο μπορεί να γίνει με $\binom{\nu}{\kappa}$ τρόπους, όσοι δηλαδή και οι συνδυασμοί των ν αντικειμένων ανά κ.

Στη δεύτερη φάση, τοποθετούμε τα κ αντικείμενα που επιλέξαμε σε σειρά, το οποίο μπορεί να γίνει με κ! τρόπους.

Έτσι από την πολλαπλασιαστική αρχή ισχύει: $\Delta_{\kappa}^{\nu} = \kappa! \cdot \binom{\nu}{\kappa}$ (2)

Από (1),(2): $\dfrac{\nu!}{(\nu-\kappa)!} = \kappa! \cdot \binom{\nu}{\kappa} \Leftrightarrow \binom{\nu}{\kappa} = \dfrac{\nu!}{\kappa!(\nu-\kappa)!}$

Άρα αποδείξαμε ότι :

Το πλήθος των συνδυασμών ν διαφορετικών αντικειμένων ανά κ που συμβολίζεται με $\binom{\nu}{\kappa}$ δίνεται από τον τύπο: $\binom{\nu}{\kappa} = \dfrac{\nu!}{\kappa!(\nu-\kappa)!}$

Παρατηρήσεις

- Το $\binom{\nu}{1}$ εκφράζει το πλήθος των διαφορετικών τρόπων, με τους οποίους μπορούμε να επιλέξουμε ένα στοιχείο από ένα σύνολο με ν στοιχεία. Είναι προφανές ότι έχουμε ν διαφορετικές επιλογές. Εφαρμόζοντας τον τύπο, λαμβάνουμε:

$$\binom{\nu}{1} = \frac{\nu!}{1!(\nu-1)!} = \frac{(\nu-1)! \cdot \nu}{1!(\nu-1)!} = \nu$$

● Το $\binom{\nu}{\nu}$ εκφράζει το πλήθος των διαφορετικών τρόπων, με τους οποίους μπορούμε να επιλέξουμε ν στοιχεία από το σύνολο που περιέχει ν στοιχεία. Είναι προφανές ότι έχουμε 1 μόνο τρόπο να κάνουμε αυτή την επιλογή (επιλέγοντας τα όλα).

Εφαρμόζοντας τον τύπο, παίρνουμε: $\binom{\nu}{\nu}=\frac{\nu!}{\nu!(\nu-\nu)!}=\frac{\nu!}{\nu!\cdot 0!}=1$

● Το $\binom{\nu}{0}$ εκφράζει το πλήθος των διαφορετικών τρόπων, με τους οποίους μπορούμε να επιλέξουμε κανένα στοιχείο από το σύνολο που περιέχει ν στοιχεία. Είναι προφανές ότι έχουμε έναν μόνο τρόπο. Εφαρμόζοντας τον τύπο, παίρνουμε: $\binom{\nu}{0}=\frac{\nu!}{0!(\nu-0)!}=1$

● Μια βασική ιδιότητα στους συνδυασμούς είναι η σχέση:

$$\binom{\nu}{\kappa}=\binom{\nu}{\nu-\kappa},\nu\geq\kappa$$

Το $\binom{\nu}{\kappa}$ εκφράζει το πλήθος των διαφορετικών τρόπων, με τους οποίους μπορούμε να επιλέξουμε κ στοιχεία από ένα σύνολο που περιέχει ν στοιχεία, $\nu\geq\kappa$. Σε κάθε επιλογή μιας ομάδας με κ στοιχεία αντιστοιχεί και μια ομάδα από (ν-κ) στοιχεία, τα οποία δεν επιλέγονται. Επομένως, το πλήθος των $\binom{\nu}{\nu-\kappa}$ θα είναι το ίδιο με το $\binom{\nu}{\kappa}$.

Δηλαδή,αν η κυβέρνηση αποφάσιζε να δώσει επίδομα «φραπέ» σε 5 από 20 άτομα τότε θα μπορούσε να το κάνει με $\binom{20}{5}$ τρόπους και με το ίδιο πλήθος τρόπων 15 στους 20 δηλ $\binom{20}{15}$ δεν θα έπαιρναν το επίδομα,άρα όπως το περιμέναμε ισχύει:

$$\binom{20}{5}=\binom{20}{15}$$



Αλγεβρικά αποδεικνύεται πολύ απλά:

$$\binom{\nu}{\nu-\kappa}=\frac{\nu!}{(\nu-\kappa)!(\nu-\nu+\kappa)!}=\frac{\nu!}{(\nu-\kappa)!\cdot\kappa!}=\binom{\nu}{\kappa}$$

Παραδείγματα

53. Σε μια επιτροπή συμμετέχουν 10 άτομα.
i. Με πόσους τρόπους μπορεί να γίνει επιλογή 2 ατόμων από αυτά;
ii. Με πόσους τρόπους μπορεί να γίνει επιλογή 8 ατόμων από αυτά;

Λύση

i. Οι τρόποι που ζητούνται είναι οι συνδυασμοί 10 ατόμων ανά 2, δηλαδή:

$$\binom{10}{2}=\frac{10!}{2!(10-2)!}=\frac{10!}{2!\cdot 8!}=\frac{8!\cdot 9\cdot 10}{2!\cdot 8!}=45$$

Άρα, η επιλογή αυτή μπορεί να γίνει με 45 τρόπους.

ii. Οι τρόποι που ζητούνται είναι οι συνδυασμοί 10 ατόμων ανά 8, δηλαδή:

$$\binom{10}{8}=\frac{10!}{8!(10-8)!}=\frac{10!}{8!\cdot 2!}=\frac{8!\cdot 9\cdot 10}{8!\cdot 2!}=\frac{9\cdot 10}{2}=45$$

Άρα, η επιλογή αυτή μπορεί να γίνει με 45 τρόπους.

Αναμενοταν ότι σε κάθε συνδυασμό 8 ατόμων που επιλέγονται από τα 10 άτομα, μένουν τα υπόλοιπα 2, τα οποία δεν επιλέγονται.Αφού λοιπόν σε κάθε 2 άτομα που επιλέγονται έχουμε αντίστοιχα και 8 που δεν επιλέγονται, τότε ισχύει : $\binom{10}{8}=\binom{10}{2}$ ■

54.Πόσα υποσύνολα με 4 στοιχεία μπορούμε να δημιουργήσουμε με στοιχεία από το σύνολο Μ={α,β,γ,δ,ε,ζ,η,θ,ι,κ,λ,ο};

Λύση

Αφού στον σχηματισμό ενός συνόλου δεν μας ενδιαφέρει η σειρά με την οποία επιλέγουμε το κάθε στοιχείο,τότε το πλήθος όλων των υποσυνόλων με 4 στοιχεία από τα 2 που έχει το σύνολο Μ είναι ίσο με το πλήθος των συνδυασμών των 12 ανά 4.Επομένως,έχουμε:

$$\binom{12}{4}=\frac{12!}{4!(12-4)!}=\frac{12!}{4!8!}=\frac{8!\cdot 9\cdot 10\cdot 11\cdot 12}{4!8!}=\frac{9\cdot 10\cdot 11\cdot 12}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}=495$$ υποσύνολα του με 4 στοιχεία το καθένα. ■



55.Σε ένα κουτί υπάρχουν 5 κόκκινες ,7 άσπρες και 3 πράσινες σφαίρες.Τραβάμε 4 σφαίρες.Πόσες τετράδες περιέχουν 2 κόκκινες 1 άσπρη και 1 πράσινη σφαίρα;

Λύση

Οι δυο κόκκινες μπορούν να επιλεγούν από τις 5 κατά $\binom{5}{2}$ τρόπους .Η μια άσπρη από τις 7 κατά $\binom{7}{1}$ τρόπους και η μια πράσινη κατά $\binom{3}{1}$ τρόπους. Επειδή το κάθε ζευγάρι κόκκινων θα συνδυαστεί με μια άσπρη και μια πράσινη, οι δυνατές τετράδες θα είναι: $\binom{5}{2}\cdot\binom{7}{1}\cdot\binom{3}{1}=210$ ■

56.Ένα σχολείο θα προσλάβει 4 καθηγητές μαθηματικών.Έκαναν αίτηση 5 γυναίκες και 7 άντρες.Με πόσους τρόπους μπορεί να γίνει η επιλογή,αν:
i. δεν υπάρχει κανένας περιορισμός
ii.πρέπει να προσληφθούν 2 άντρες και 2 γυναίκες
iii. πρέπει να προσληφθούν τουλάχιστον 3 γυναίκες.

Λύση

i. Αφού δεν υπάρχει κανένας περιορισμός στην επιλογή, σημαίνει ότι από ένα σύνολο 12 ατόμων (5 γυναίκες και 7 άντρες) επιλέγουμε 4 άτομα. Οι τρόποι που μπορεί να γίνει αυτό είναι: $\binom{12}{4}=\frac{12!}{4!(12-4)!}=\frac{12!}{4!8!}=\frac{8!\cdot 9\cdot 10\cdot 11\cdot 12}{4!8!}=\frac{9\cdot 10\cdot 11\cdot 12}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}=495$

ii. Η επιλογή των 4 ατόμων θα γίνει σε 2 φάσεις. Στη μία φάση επιλέγονται 2 από τους 7 άντρες, το οποίο μπορεί να γίνει με

$\binom{7}{2}=\frac{7!}{2!(7-2)!}=\frac{7!}{2!5!}=21$ διαφορετικούς τρόπους.

Στην άλλη φάση γίνεται επιλογή των 2 γυναικών από τις 5, το οποίο γίνεται με

$\binom{5}{2}=\frac{5!}{2!(5-2)!}=\frac{5!}{2!3!}=10$ διαφορετικούς τρόπους.

Επομένως, σύμφωνα με την πολλαπλασιαστική αρχή, υπάρχουν συνολικά

$\binom{7}{2}\cdot\binom{5}{2}=21\cdot 10=210$ διαφορετικοί τρόποι.

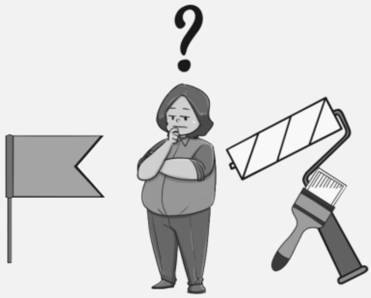
iii. Οι ομάδες 4 ατόμων με τουλάχιστον 3 γυναίκες περιλαμβάνουν είτε 3 γυναίκες και έναν άντρα είτε 4 γυναίκες.Στην πρώτη περίπτωση, το πλήθος τους είναι:

$\binom{5}{3}\cdot\binom{7}{1}=\frac{5!}{2!3!}\cdot\frac{7!}{1!6!}=70$

Στη δεύτερη περίπτωση,το πλήθος τους είναι: $\binom{5}{4}=\frac{5!}{4!1!}=5$

Έτσι, σύμφωνα με την προσθετική αρχή έχουμε συνολικά 70 + 5 =75 διαφορετικούς τρόπους. ■

Πως θα καταλαβαίνω αν πρόκειται για συνδυασμούς ή διατάξεις;
Μπορούμε να έχουμε στο νου το ακόλουθο παράδειγμα.
Διαθέτουμε 12 διαφορετικά χρώματα και θέλουμε να κάνουμε:
I. Νέες αποχρώσεις αναμιγνύοντας τρία διαφορετικά χρώματα.
II. Σημαίες τριών χρωμάτων (τρεις ρίγες).
Πόσες (αποχρώσεις,σημαίες) θα πάρουμε σε κάθε περίπτωση;
Ρωτώ: *«Εχει σημασία η σειρά;»* Στην πρώτη περίπτωση δεν έχει σημασία η σειρά με την οποία βάζουμε τα χρώματα, αφού δεν θα έχει καμία αλλαγή στο τελικό αποτέλεσμα άρα πρόκειται για συνδυασμούς 12 χρωμάτων ανά 3.
($\binom{12}{3}=\frac{12!}{3!9!}=220$ τρόποι)



Στην δεύτερη περίπτωση όμως για τις σημαίες πρέπει να δούμε πως τοποθετούνται οι ρίγες, αφού στην περίπτωση αυτή η σειρά έχει σημασία, πρόκειται για διατάξεις 12 χρωμάτων που λαμβάνονται ανά 3.
($\Delta_3^{12}=\frac{12!}{9!}=1320$ διαφορετικές σημαίες)

57.Απο μια ομάδα 6 αγοριών και 6 κοριτσιών διαλέγουμε μια τετραμελή επιτροπή. Με πόσους τρόπους,μπορεί να γίνει αυτό αν:
i. η επιτροπή περιέχει δυο αγόρια και δυο κορίτσια,
ii.η επιτροπή περιλαμβάνει και τα δυο φύλα,
iii. στην επιτροπή συμμετέχει ο Γιάννης ή η Μαρία αλλά όχι και οι δυο μαζί.

i.Επιλέγουμε τα 2 αγόρια με $\binom{6}{2}$ τρόπους και τα 2 κορίτσια με $\binom{6}{2}$ τρόπους,άρα έχουμε $\binom{6}{2}\cdot\binom{6}{2}=225$ τρόπους .

ii.Όλες οι δυνατές επιλογές της επιτροπής είναι $\binom{12}{4}=495$.

Οι επιτροπές που έχουν μόνο αγόρια είναι $\binom{6}{4}=15$.

Οι επιτροπές που έχουν μόνο κορίτσια είναι $\binom{6}{4}=15$.

Οι επιτροπές που εκπροσωπούνται και από τα δυο φύλα είναι 495-15-15=465.

iii.Αν στην επιτροπή συμμετέχει ο Γιάννης, τότε δεν συμμετέχει η Μαρία άρα επιλέγουμε άλλα 3 άτομα με $\binom{10}{3}=120$ τρόπους. Ομοίως όταν συμμετέχει η Μαρία, δεν συμμετέχει ο Γιάννης άρα επιλέγουμε άλλα 3 άτομα με $\binom{10}{3}=120$ τρόπους. Άρα έχουμε συνολικά 120+120=240 τρόπους. ■

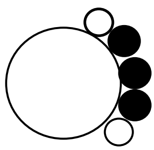
58.Δεκαπέντε ιππότες είναι καθισμένοι σε ένα στρογγυλό τραπέζι.Τρεις από αυτούς επιλέγονται τυχαία για μια αποστολή, να σκοτώσουν ένα δράκο.Με πόσους τρόπους είναι δυνατό να επιλεγούν οι ιππότες αν,
i.δεν υπάρχει κανένας περιορισμός,
ii. κάθονται οι δυο από τους τρεις σε γειτονικές (διαδοχικές) θέσεις;

Λύση

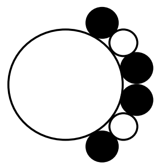
i.Επιλέγουμε χωρίς να έχει σημασία η σειρά 3 ιππότες από τους 15.

$$\binom{15}{3}=\frac{15!}{3!(15-3)!}=\frac{15!}{3!\cdot 12!}=\frac{13\cdot 14\cdot 15}{6}=455$$

ii.Για τους τρεις ιππότες που θα επιλεγούν είτε θα κάθονται και οι τρεις σε γειτονικά διαδοχικά καθίσματα είτε μόνο οι δυο.



Σχήμα 1



Σχήμα 2

● Έστω ότι κάθονται και οι τρεις σε γειτονικά καθίσματα τότε αρκεί να επιλέξουμε ένα ιππότη και οι άλλοι δυο θα κάθονται δεξιά του.Αυτό μπορεί να γίνει με 15 τρόπους.(Σχήμα 1)

● Έστω ότι οι δυο μόνο από τους τρεις ιππότες κάθονται σε γειτονικές θέσεις, τότε επιλέγουμε το έναν (Α) με 15 τρόπους και ο άλλος (Β) θα κάθεται δεξιά του.Η σειρά που κάθονται ο Α και ο Β δεν έχει σημασία ,λογίζεται ως ένας τρόπος αν κάθονται ΑΒ,ΒΑ.Ο τρίτος δεν μπορεί να καθίσει ούτε αριστερά από τον Α ούτε δεξιά από τον Β καθώς θα είχαμε και τους τρεις σε συνεχόμενα καθίσματα συνεπώς μένουν για τον τρίτο 15-2-2=11 δυνατά καθίσματα, από την πολλαπλασιαστική αρχή προκύπτει 15*11= 165 τρόποι.

Από την προσθετική αρχή η τελική απάντηση είναι:15+165=180 τρόποι. ■

59.i.Δίνεται κύκλος με κέντρο Ο και ακτίνα ρ και 6 σημεία του. Πόσα τρίγωνα μπορούμε να δημιουργήσουμε;
ii.Πόσες ευθείες ορίζουν τα 6 σημεία;
iii.Να βρεθεί το πλήθος των διαγωνίων ενός κυρτού πολυγώνου με ν κορυφές.

Λύση

i. Τα 6 σημεία βρίσκονται πάνω στον κύκλο άρα είναι βέβαιο ότι ανά τρία δεν είναι συνευθειακά.Τα τρίγωνα που δημιουργούνται είναι οι συνδυασμοί των 6 ανά 3,δηλαδή,

$$\binom{6}{3}=\frac{6!}{3!(6-3)!}=\frac{6!}{3!3!}=\frac{3!\cdot 4\cdot 5\cdot 6}{3!3!}=20 \text{ τρίγωνα.}$$

ii. Τα 6 σημεία βρίσκονται πάνω στον κύκλο άρα είναι βέβαιο ότι ανά τρία δεν είναι συνευθειακά.Έτσι κάθε δυο σημεία ορίζουν και μια ευθεία, συνεπώς οι ζητούμενοι τρόποι (ευθείες) είναι όσοι και οι συνδυασμοί των 6 ανά 2:

$$\binom{6}{2}=\frac{6!}{2!(6-2)!}=\frac{6!}{2!4!}=\frac{4!\cdot 5\cdot 6}{2!4!}=\frac{5\cdot 6}{2}=15 \text{ ευθείες}$$

iii. Οι ζητούμενες διαγώνιες θα είναι όσοι και οι συνδυασμοί των ν κορυφών ανά 2 μείον τις πλευρές του πολυγώνου που είναι ν, δηλαδή,

$$\binom{\nu}{2}-\nu=\frac{\nu!}{2!(\nu-2)!}-\nu=\frac{(\nu-1)\nu}{2}-\nu=\frac{(\nu-1)\nu-2\nu}{2}=\frac{\nu(\nu-3)}{2} \text{ διαγώνιες}$$ ■

60.Πόσες λέξεις του Ελληνικού αλφαβήτου με 4 διαφορετικά γράμματα μπορούμε να σχηματίσουμε, αν χρησιμοποιήσουμε 2 φωνήεντα και 2 σύμφωνα;
Από τα 24 γράμματα του Ελληνικού αλφαβήτου τα 7 είναι φωνήεντα και τα 17 σύμφωνα.

Λύση

Τα 2 φωνήεντα μπορούν επιλεγούν από τα 7 κατά $\binom{7}{2}$ τρόπους.

Τα 2 σύμφωνα μπορούν επιλεγούν από τα 7 κατά $\binom{17}{2}$ τρόπους.

Άρα, οι λέξεις με 2 φωνήεντα και 2 σύμφωνα θα είναι $\binom{7}{2}\cdot\binom{17}{2}$ και οι αναγραμματισμοί αυτοί που υπάρχουν στους συνδυασμούς είναι όσες και οι απλές μεταθέσεις των 4 γραμμάτων δηλαδή 4!.

Τελικά από την πολλαπλασιαστική αρχή οι δυνατοί τρόποι είναι :

$$\binom{7}{2}\cdot\binom{17}{2}\cdot 4!=68544$$

Αυτό που ενδιαφέρει στην συγκεκριμένη άσκηση είναι η σειρά των γραμμάτων,για αυτό πολλαπλασιάζουμε με τις απλές μεταθέσεις των 4 γραμμάτων. ■

61.Δέκα ποδοσφαιρικές ομάδες κληρώνονται να αγωνιστούν για το πρωτάθλημα. Κάθε ζεύγος ομάδων πρόκειται να δώσει δυο αγώνες (εντός και εκτός έδρας). Να βρεθεί πόσες διαφορετικές κληρώσεις μπορούν να προκύψουν;

Λύση

Θα ομαδοποιήσουμε 10 διαφορετικά αντικείμενα (ομάδες) σε 5 ομάδες των δυο αντικειμένων. Η πρώτη ομάδα των δυο ομάδων μπορεί να επιλεχτεί από 10 ομάδες με $\binom{10}{2} = \frac{10!}{2! \cdot 8!}$ τρόπους. Η δεύτερη ομάδα των 2 αντικειμένων μπορεί να επιλεγεί από τα 8 υπόλοιπα αντικείμενα με $\binom{8}{2}$ τρόπους. Όμοια η τρίτη μπορεί να επιλεγεί με $\binom{6}{2}$ τρόπους η τέταρτη με $\binom{4}{2}$ και η πέμπτη ομάδα των 2 αντικειμένων μπορεί να επιλεγεί από τις δυο τελευταίες ομάδες που έμειναν με $\binom{2}{2} = 1$ τρόπο. Άρα σύμφωνα με την πολλαπλασιαστική αρχή μπορούμε να σχηματίσουμε:

$$\binom{10}{2} \cdot \binom{8}{2} \cdot \binom{6}{2} \cdot \binom{4}{2} \cdot \binom{2}{2} = \frac{10!}{(2!)^5} = 113400 \text{ πεντάδες των δυο αγώνων.}$$

Όμως έχουμε μετρήσει την κάθε πεντάδα περισσότερες από μια φορές .Για παράδειγμα, αν οι ομάδες είναι οι $O_1,O_2,O_3,O_4,O_5,O_6,O_7,O_8,O_9,O_{10}$ μια τέτοια πεντάδα είναι:

$$(O_1, O_8) , (O_3, O_4) , (O_5, O_6) , (O_7, O_9) , (O_{10}, O_2) \qquad (1)$$

Αλλά η βασική αρχή απαρίθμησης που χρησιμοποιήσουμε για να βρούμε το πλήθος αυτό λαμβάνει υπόψη της και την διάταξη των 5 ζευγαριών:

$$(O_1, O_8) , (O_3, O_4) , (O_5, O_6) , (O_7, O_9) , (O_{10}, O_2)$$

Δηλαδή μέσα στον αριθμό 113400 έχουμε μετρήσει την πεντάδα (1) 5! φορές. Επειδή εδώ δεν μας ενδιαφέρει η διάταξη των 5 ζευγαριών

$$(O_1, O_8) , (O_3, O_4) , (O_5, O_6) , (O_7, O_9) , (O_{10}, O_2)$$

Οι διαφορετικές πεντάδες σαν την (1) που μπορούμε να σχηματιστούμε είναι:

$$\frac{113400}{5!} = 945$$

■

62. Δεκαπέντε διαφορετικά βιβλία πρόκειται να μοιραστούν εξίσου σε 5 φοιτητές.Με πόσους τρόπους μπορεί να γίνει αυτό;

Λύση

Ο πρώτος φοιτητής θα πάρει 3 από τα 15.Αυτο μπορεί να γίνει κατά $\binom{15}{3}$ τρόπους.

Ο δεύτερος φοιτητής θα πάρει 3 από τα υπόλοιπα βιβλία δηλαδή 15-3=12.Αυτο μπορεί να γινει με $\binom{12}{3}$ τρόπους .Ο τρίτος φοιτητής θα πάρει 3 από τα υπόλοιπα 9-3=6, που

μπορεί να γίνει κατά $\binom{9}{3}$ τρόπους, ο τέταρτος φοιτητής θα πάρει 3 από τα υπόλοιπα 9-3=6 που μπορεί να γίνει κατά $\binom{6}{3}$ τρόπους ,ο τελευταίος φοιτητής θα πάρει τα 3 που μένουν κατά 1 τρόπο.

Άρα η διανομή μπορεί να γίνει κατά $\binom{15}{3}\cdot\binom{12}{3}\cdot\binom{9}{3}\cdot\binom{6}{3}=168168000$ τρόπους

Εναλλακτικά θα μπορούσαμε να το χειριστούμε ως εξής :
Αν αριθμήσουμε τα βιβλία από το 1 μέχρι το 15 τότε έχουμε:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Α	Α	Α	Β	Β	Β	Γ	Γ	Γ	Δ	Δ	Δ	Ε	Ε	Ε

Δηλαδή κάθε διανομή είναι ένας αναγραμματισμός με γράμματα που επαναλαμβάνονται γίνεται με $\dfrac{15!}{3!\cdot 3!\cdot 3!\cdot 3!\cdot 3!}=168168000$ τρόπους. ■

63.Δίνεται το ερώτημα:
Με πόσους τρόπους μπορεί μια ομάδα 12 ατόμων να χωριστεί σε δυο ομάδες των 6 ατόμων;
Ένας μαθητής έγραψε:
Επιλέγουμε πρώτα τα 6 από τα 12 άτομα με $\binom{12}{6}$ ***τρόπους και στην συνέχεια τα υπόλοιπα 6 με*** $\binom{6}{6}$ ***τρόπους. Συνολικά έχουμε*** $\binom{12}{6}\cdot\binom{6}{6}=924$
Η λύση όμως ήταν λανθασμένη.Αιτιολογήστε.
Λύση
Το λάθος στην παραπάνω λύση είναι ότι κάθε χωρισμός των 12 σε 2 ομάδες των 6 μετράται δυο φορές. Για να γίνει αυτό αντιληπτό. Έστω $X_1,X_2,X_3,X_4,X_5,X_6,X_7,X_8,X_9,X_{10},X_{11},X_{12}$ τα αρχικά άτομα.Αν στην πρώτη φάση της παραπάνω λύσης επιλεγούν, για παράδειγμα, οι X_1,X_2,X_3,X_4,X_5,X_6 τότε οι υπόλοιποι $X_7,X_8,X_9,X_{10},X_{11},X_{12}$ θα αποτελούν την δεύτερη εξάδα. Έχουμε έτσι ένα χωρισμό. Αν στην πρώτη φάση επιλεγούν $X_7,X_8,X_9,X_{10},X_{11},X_{12}$ τότε οι υπόλοιποι X_1,X_2,X_3,X_4,X_5,X_6 θα είναι η δεύτερη εξάδα. Όμως αυτός ο χωρισμός ταυτίζεται με τον προηγούμενο.Έτσι κάθε χωρισμός μετράται δυο φορές, οπότε η σωστή απάντηση είναι $\dfrac{924}{2}=462$ τρόποι.

Εναλλακτικά, η άσκηση αντιμετωπίζεται ως εξής: Έστω ένα συγκεκριμένο άτομο X από τα 12 αρχικά άτομα. Από τα υπόλοιπα 11 άτομα επιλέγουμε 5,που μαζί με τον X θα αποτελέσουν την πρώτη εξάδα με $\binom{11}{5}$ τρόπους.

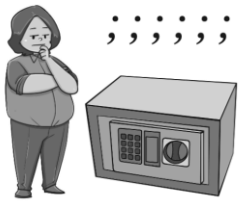
Η άλλη εξάδα επιλέγεται τότε με ένα μόνο τρόπο (αφού έχουν μείνει μόνο 6 άτομα για την δημιουργία εξάδας).

Επομένως ,έχουμε συνολικά $\binom{11}{5} = \frac{11!}{5!(11-5)!} = \frac{11!}{5!\cdot 6!} = 462$ τρόπους. ■

Με τον ίδιο τρόπο συμπεραίνουμε ότι αν θέλουμε να χωρίσουμε μια ομάδα 12 ατόμων σε τρεις ομάδες των 4 ατόμων, τότε αυτό μπορεί να γίνει με $\binom{11}{3}\cdot\binom{7}{3}$ *τρόπους και* ***όχι*** *με* $\binom{12}{4}\cdot\binom{8}{4}$ *τρόπους.*

64. Ο Μπάμπης αγόρασε ένα χρηματοκιβώτιο για να ασφαλίσει τα κοσμήματα της συζύγου του, το νέο χρηματοκιβώτιο έχει εξαψήφιο κωδικό,για να μην τον ξεχάσει τον έγραψε σε ένα χαρτί. Όμως, έχασε το χαρτί και τώρα στέκει και κοιτά το κλειστό χρηματοκιβώτιο με απόγνωση. Δεν θυμάται τον κωδικό αλλά θυμάται σίγουρα ότι αποτελείται μόνο από τα ψηφία 0,1 και 2 καθώς επίσης και ότι το άθροισμα των ψηφίων του κωδικού είναι άρτιος. Πόσες το πολύ ημέρες θα χρειαστεί ο Μπάμπης για να ανοίξει το χρηματοκιβώτιο αν μπορεί να δοκιμάσει μόνο μια φορά την ημέρα να εισάγει κωδικό;

Λύση



Αυτό που ζητείται είναι το πλήθος των διατεταγμένων εξάδων $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5,\alpha_6)$ που μπορούν να δημιουργηθούν, αν οι αριθμοί $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5,\alpha_6$ μπορούν να πάρουν τις τιμές 0,1 και 2 και το άθροισμα $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4+\alpha_5+\alpha_6$ είναι άρτιος. Το άθροισμα $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4+\alpha_5+\alpha_6$ είναι άρτιος όταν το πλήθος των 1 είναι άρτιο, δηλαδή 0,2,4,6.

-Αν δεν έχουμε καθόλου 1, οι δυνατές επιλογές είναι 2^6 ,αφού για καθέναν από του α_i έχουμε δυο επιλογές (0 ή 2)

-Αν έχουμε δυο 1, τότε την θέση τους μπορούμε να επιλέξουμε με $\binom{6}{2}$ τρόπους και στις υπόλοιπες τέσσερεις θέσεις έχουμε 2^4 επιλογές. Δηλαδή συνολικά έχουμε $2^4\cdot\binom{6}{2}$ δυνατές εξάδες.

-Αν έχουμε τέσσερα 1, τότε τη θέση τους μπορούμε να την επιλέξουμε με $\binom{6}{4}$ τρόπους και στις υπόλοιπες 2 θέσεις έχουμε 2^2 επιλογές. Δηλαδή συνολικά έχουμε $2^2\cdot\binom{6}{4}$ δυνατές εξάδες.Αν έχουμε έξι 1 ,τότε προφανώς ότι έχουμε ένα τρόπο.

Συνολικά έχουμε: $2^6 + 2^2\cdot\binom{6}{4} + 2^4\cdot\binom{6}{2} + 1 = 365$ εξάδες.

Άρα,ο Μπάμπης θέλει το πολύ ένα χρόνο για να ανοίξει το χρηματοκιβώτιο!

Μεζεδάκια Ευρετικής: Υιοθετώντας διαφορετική οπτική

Ένα κουτί περιέχει 4 σφαίρες. Σε κάθε σφαίρα είναι γραμμένος ένας από τους αριθμούς 3,5,7,9.



Επιλέγουμε τυχαία μια-μια τις σφαίρες από το κουτί και τοποθετούμε τις σφαίρες που επιλέγουμε από τα αριστερά προς τα δεξιά.

i. Πόσοι είναι οι δυνατοί θετικοί ακέραιοι τετραψήφιοι αριθμοί που μπορούν να προκύψουν;

ii. Πόσοι είναι οι δυνατοί θετικοί ακέραιοι πρώτοι τετραψήφιοι αριθμοί που μπορούν να προκύψουν; *(Πρώτος αριθμός είναι θετικός ακέραιος διάφορος της μονάδας που διαιρείται μόνο με τον εαυτό του και την μονάδα).*

Λύση

i.Το πρώτο ερώτημα είναι εύκολο να το χειριστούμε με χρήση τη πολλαπλασιαστικής αρχής.

Το πλήθος των τετραψήφιων που προκύπτουν με χρήση καθενός από τα 4 ψηφία χωρίς να επαναλαμβάνεται κάποιο είναι: $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$

ii.Για το δεύτερο ερώτημα ,οι περισσότεροι μαθητές βλέποντας το πρόβλημα ,καταγράφουν όλες τις δυνατές περιπτώσεις επιλογής και ελέγχουν σε ποια περίπτωση ο αριθμός που προκύπτει είναι πρώτος.

3579	5379	7953	9573
3597	5397	7935	9535
3759	5739	7395	9573
3595	5793	7359	9537
3975	5973	7539	9357
3957	5793	7593	9375



Αν κάνουμε σωστά τους υπολογισμούς θα οδηγηθούμε στην απάντηση. Αλλά η διαδικασία είναι εξαιρετικά χρονοβόρα. Για ένα τετραψήφιο αριθμό, για να ελέγξουμε αν είναι πρώτος πρέπει να κάνουμε στην χειρότερη των περιπτώσεων 500 διαιρέσεις και οι αριθμοί είναι 24,αυτό μας οδηγεί στο συμπέρασμα ότι πρέπει να υπάρχει και άλλος τρόπος. Ας προσπαθήσουμε να δούμε το πρόβλημα με «άλλο μάτι». Τα ψηφία όλων αυτών των αριθμών είναι τα 3,5,7 και 9.Το άθροισμα τους είναι:3+5+7+9=24,ο 24 είναι αριθμός πολλαπλάσιο του 3 άρα σίγουρα ο καθένας από τους αριθμούς είναι πολλαπλάσιο του 3 οπότε σίγουρα δεν είναι πρώτος.Συνεπώς,κανένας τετραψήφιος από τους παραπάνω δεν είναι πρώτος!

65.Ο Γιάννης έχει 4 πανομοιότυπα χρυσά κέρματα και 4 πανομοιότυπα ασημένια κέρματα. Καθένα από τα 8 κέρματα στην μια όψη έχει Κεφαλή και στην άλλη Γράμματα. Με πόσους τρόπους μπορει ο Γιάννης να τοποθετήσει τα 8 κέρματα σε μια στοίβα αν δεν υπάρχουν δυο διαδοχικά κέρματα - το πάνω στο άλλο-έτσι ώ-στε να εφάπτονται Κεφαλή με Κεφαλή. ***(2005 AIME)***

Λύση

Το πρόβλημα συνιστάται από δυο διαφορετικές φάσεις.

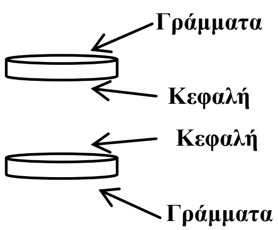
-Μέταλλο κέρματος (χρυσό ή ασημένιο)

-Προσανατολισμός (Κεφαλή ή Γράμματα)

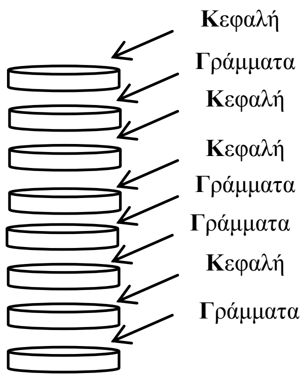
Υπάρχουν $\binom{8}{4}=70$ τρόποι να τοποθετήσουμε τα 4 χρυσά νομίσματα στην στοίβα των 8.

Συμβολίζουμε την στοίβα με μια σειρά 8 γραμμάτων Κ,Γ (Κεφαλή ή Γράμματα) για τον προσανατολισμό των κερμάτων προς τα πάνω, για παράδειγμα, μια σειρά 8 γραμ-μάτων ΚΓΚΚΓΓΚΓ από αριστερά προς τα δεξιά (σχήμα 1) αντιστοιχίζεται με μια το-ποθέτηση της στοίβας των 8 κερμάτων από πάνω προς τα κάτω.

Μη επιτρεπτή τοποθέτηση **ΓΚ**



Σχήμα 2



Σχήμα 1

Για να ισχύει ο περιορισμός τους προβλήματος δεν πρέπει να έχουμε δυο κέρματα τοποθετημένα (ΓΚ)(ΚΓ) (σχήμα 2).Συνεπως, οι ζητούμενες τοποθετήσεις πρέπει να είναι μια διαδοχική σειρά **Κεφαλών** ακολουθουμένη από μια διαδοχική σειρά **Γραμμάτων** εφόσον μετά από το πρώτο κέρμα με Γράμματα δεν ακολουθεί κέρμα με Κεφαλή.Το πρώτο κέρμα Γ μπορεί να εμφανιστεί το πολύ 8 φορές στην στοίβα πάντα με όψη προς τα πάνω ή να μην εμφανιστεί καθόλου άρα 9 περιπτώσεις συνολικά. Από την πολλαπλασιαστική αρχή έχουμε $70\cdot 9=630$ τρόπους. ■

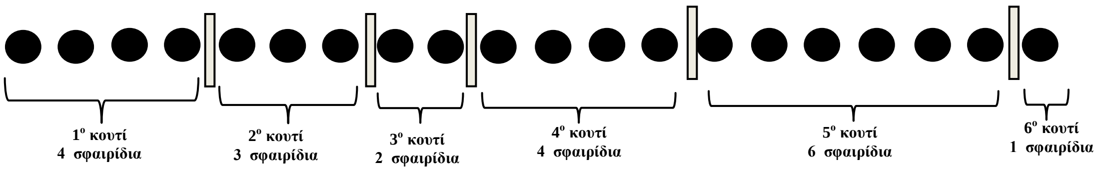
66.Έστω έξι κουτιά τα οποία έχουμε αριθμήσει από το 1 μέχρι το 6 .Με πόσους τρόπους μπορούμε να τοποθετήσουμε 20 πανομοιότυπα σφαιρίδια στα κουτιά έτσι ώστε κανένα κουτί να μην είναι άδειο;

Λύση

Το πρόβλημα λύνεται με το αγαπημένο μου τέχνασμα στην συνδυαστική. Τοποθετούμε τα 20 σφαιρίδια σε μια γραμμή.



Για να ορίσουμε την κατανομή των σφαιριδίων στα έξι κουτιά αρκεί να χωρίσουμε τα σφαιρίδια σε έξι ομάδες χρησιμοποιώντας 5 ιδεατά χωρίσματα. Για παράδειγμα ,στο ακόλουθο σχήμα βάλαμε 5 χωρίσματα.



Αριστερά από το πρώτο χώρισμα έχουμε 4 σφαιρίδια άρα στο 1ο κουτί θεωρούμε ότι τοποθετήσαμε 4 σφαιρίδια, ανάμεσα στο 2ο και στο 3ο χώρισμα έχουμε τοποθετήσει 3 σφαιρίδια άρα στο δεύτερο κουτί θεωρούμε ότι τοποθετήσαμε 3 σφαιρίδια, ομοίως στο 3ο κουτί έχουμε τοποθετήσει 2 σφαιρίδια,στο τέταρτο κουτί 4 σφαιρίδια ,στο 5ο κουτί 6 σφαιρίδια και στο έκτο κουτί 1 σφαιρίδιο.Άρα ο αριθμός των τρόπων με τους οποίους μπορούμε να τοποθετήσουμε τα 20 σφαιρίδια στα 6 κουτιά ισούται με τον αριθμό των τρόπων που μπορούμε να τοποθετήσουμε τα 5 ιδεατά χωρίσματα στα 19 κενά μεταξύ των σφαιριδίων στην σειρά με την προϋπόθεση ότι δεν μπορούμε να βάλουμε δυο ή περισσότερα χωρίσματα σε ένα κενό. Άρα οι δυνατές τοποθετήσεις είναι $\binom{19}{5}$ μπορεί να γραφεί και $\binom{20-1}{6-1}$ που θα μας δώσει την γενική μορφή. Γενικευεται για ν σφαιριδια και κ κουτια με τον τυπο $\binom{\nu-1}{\kappa-1}$ ■

67. Πόσες είναι οι θετικες ακέραιες λύσεις της εξισωσης

$$x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6=20$$

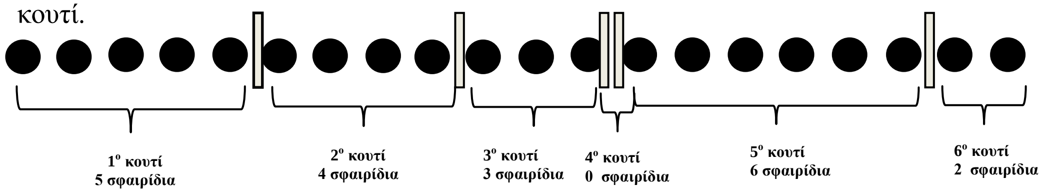
Το πρόβλημα είναι ισοδύναμο με την τοποθέτηση 20 σφαιρών σε 6 κουτιά έτσι ώστε όλα τα κουτιά να έχουν σφαίρες.Ακριβώς το προηγούμενο παραδειγμα,άρα το αποτέλεσμα είναι $\binom{19}{5}$.Αναλόγως αποδεικνύεται:

Πόσες είναι οι θετικες ακέραιες λύσεις της εξισωσης

$$x_1+x_2+....+x_\nu=\kappa, \nu\le\kappa$$

Η απάντηση είναι: $\binom{\kappa-1}{\nu-1}$

68.Έστω έξι κουτιά τα οποία έχουμε αριθμήσει από το 1 μέχρι το 6 .Με πόσους τρόπους μπορούμε να τοποθετήσουμε 20 πανομοιότυπα σφαιρίδια στα κουτιά. Αυτήν φόρα είναι δυνατό ένα ή περισσότερα κουτιά να είναι άδεια.
Τοποθετούμε τα 20 σφαιρίδια και τα 5 χωρίσματα σε μια γραμμή.Άρα έχουμε μια γραμμή 25 αντικειμένων –καθώς τα χωρίσματα μπορούν έχουν τοποθετηθεί οπουδήποτε ακόμα και σε διαδοχικές θέσεις, αυτό θα σήμαινε ότι είναι δυνατό να έχουμε άδειο κουτί.



Μια τοποθέτηση των 20 σφαιριδίων στα 6 κουτιά αντιστοιχίζεται μονοσήμαντα με την τοποθέτηση των 5 χωρισμάτων σε 25 θέσεις σφαιριδίων-χωρισμάτων,ένα συνδυασμό 5 από 25.Το πλήθος των συνδυασμών είναι: $\binom{25}{5}$ μπορεί να γραφεί

$\binom{20+6-1}{6-1}$.Γενικευεται για κ σφαιριδια και ν κουτια με τον τυπο

$$\binom{\kappa+\nu-1}{\nu-1}=\binom{\kappa+\nu-1}{\kappa}$$

69.Πόσες είναι οι μη αρνητικές ακέραιες λύσεις της εξίσωσης

$$x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6=20$$

Το πρόβλημα είναι ισοδύναμο με την τοποθέτηση 20 σφαιρών σε 6 κουτιά έτσι ώστε κάποια κουτιά ενδεχομένως να είναι άδεια .Ακριβώς το προηγούμενο,άρα το αποτέλεσμα είναι $\binom{20+6-1}{5}=\binom{25}{5}$.

Αναλόγως αποδεικνύεται:

Πόσες είναι οι μη αρνητικές ακέραιες λύσεις της εξίσωσης

$$x_1+x_2+....+x_\nu=\kappa,\nu\le\kappa$$

Η απαντηση είναι: $\binom{\nu+\kappa-1}{\kappa}$ ή $\binom{\nu+\kappa-1}{\nu-1}$

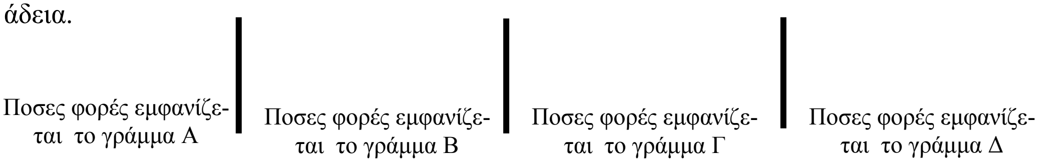


Η συγκεκριμένη ευρετική τεχνική με τα σφαιρίδια και τα χωρίσματα πιστώνεται στον Αμερικανο-Κροάτη μαθηματικό William Feller και έχει την ονομασία «Stars and bars».Ο Feller χρησιμοποίησε αστερίσκους αντί για σφαιρίδια.

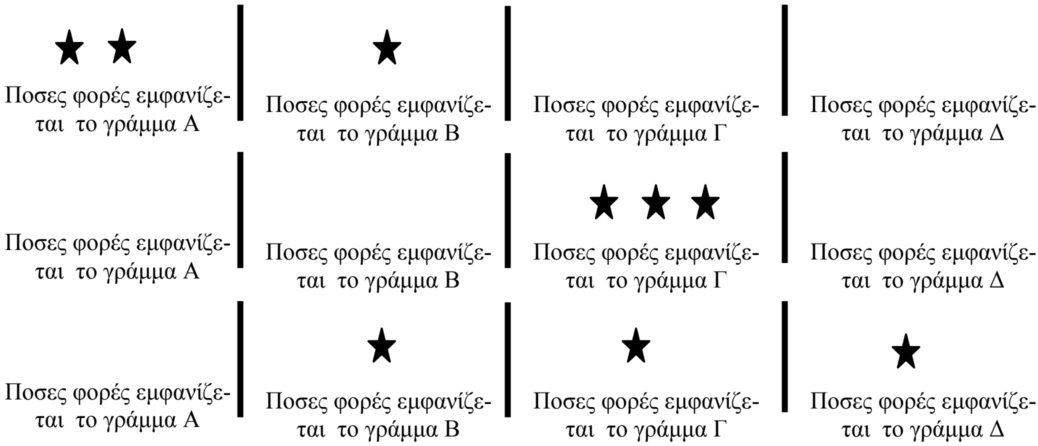
Τα προηγούμενα δυο παραδείγματα τα αντιμετωπίσαμε κατά περίπτωση,ήρθε λοιπόν η ώρα να μιλήσουμε για επαναληπτικούς συνδυασμούς.

Επαναληπτικός συνδυασμοί (Combinations with repetition)

Δίνονται τέσσερα γράμματα Α,Β,Γ,Δ. Ποιο είναι το πλήθος των διαφορετικών τριάδων;
Τι σημαίνει αυτό; Καθένα από τα γράμματα μπορεί να επιλεγεί το πολύ τρεις φορές,η σειρα των γραμμάτων δεν λαμβάνεται υπόψη.
Αν επιτεθούμε κατά μέτωπο και βρούμε όλες τις τριάδες τότε θα έχουμε:
ΑΑΑ,ΑΑΒ,ΑΑΓ,ΑΑΔ,ΑΒΒ,ΑΒΓ,ΑΒΔ,ΑΓΓ,ΑΓΔ,ΑΔΔ,ΒΒΒ,ΒΒΓ,ΒΒΔ,ΒΓΓ, ΒΓΔ,ΒΔΔ, ΓΓΓ,ΓΓΔ,ΓΔΔ,ΔΔΔ
Η απάντηση στο ερώτημα είναι 20.Τι συνιστούν για μας οι τριάδες;
Οι τριάδες είναι επαναληπτικοί συνδυασμοί, δεν μας ενδιαφέρει η σειρά και μπορούμε να επιλέξουμε ένα γράμμα μέχρι τρεις φορές. Δυο επαναληπτικοί συνδυασμοί είναι ίδιοι αν έχουν τα ίδια ακριβώς στοιχεία με το ίδιο ακριβώς πλήθος καθενός.
Για παράδειγμα, οι επαναληπτικοί συνδυασμοί ΑΑΒ,ΒΑΑ,ΑΒΑ είναι ίδιοι.
Πως θα το αντιμετωπίζαμε αν επρόκειτο για περισσότερα γράμματα;
Θεωρούμε τρία χωρίσματα και τοποθετουμε σε κάθε κουτι αστερισκους που συμβολιζουν το πλήθος κάθε γραμματος στο κουτί.Ενδεχομένως κάποια κουτιά να μείνουν άδεια.



Τα χωρίσματα δίνουν 4 κουτιά και οι αστερισκοι τοποθετούνται στα κουτιά.Για παράδειγμα, ο επαναληπτικός συνδυασμός ΑΑΒ παριστάνεται με την πρώτη τοποθέτηση, ο συνδυασμός ΓΓΓ από την δεύτερη και ο συνδυασμός ΒΓΑ από την τρίτη.



Οπότε το πρόβλημα ανάγεται στις διαφορετικές τοποθετήσεις των 3+3=6 αντικειμένων (χωρίσματα,αστερισκοι) ανά 3 και το πλήθος των τοποθετήσεων είναι
$\binom{6}{3}=20$.Το αποτέλεσμα γράφεται $\binom{4+3-1}{3}$ που μας δίνει την γενική μορφή για τοποθέτηση κ γραμμάτων ανά ν-ιαδες με καθένα από τα γράμματα να μπορεί να

επιλεγεί το πολύ ν φορές και είναι $\binom{\kappa+\nu-1}{\nu}$.Έτσι ερχόμαστε να διατυπώσουμε τον ορισμό:

Επαναληπτικός συνδυασμός (combination) ν διαφορετικών αντικειμένων ανά κ λέγεται κάθε ομάδα των κ από τα ν αντικείμενα, **χωρίς να μας ενδιαφέρει** η διάταξή τους σε σειρά και κάθε στοιχείο μπορεί να επαναλαμβάνεται το πολύ κ φόρες

Συμβολίζεται $\begin{bmatrix} \nu \\ \kappa \end{bmatrix}$ ή RC_{κ}^{ν} και αποδεικνύεται ότι ισχύει

$$\begin{bmatrix} \nu \\ \kappa \end{bmatrix} = \binom{\nu+\kappa-1}{\kappa} = \binom{\nu+\kappa-1}{\nu-1}$$

70. i.Πόσες είναι οι διαφορετικές ζαριές στο τάβλι; Πόσες από αυτές τις δυάδες δεν έχουν τον ίδιο αριθμό;
ii.Πόσες ζαριές θα υπήρχαν σε ένα τάβλι με δέκα ζάρια;

i.Η πρώτη σκέψη είναι *«Απλό είναι 6^2=36!»*.Όμως τα ζάρια δεν είναι διαφορετικά (άσπρο, μαύρο) ,αν ηταν διαφορετικά ναι, οι ενδείξεις (3,4) κα(4,3) θα είναι διαφορετικές και θα ήταν επαναληπτικές διατάξεις οπότε θα είχαμε δίκιο. Όμως οι ταβλαδόροι γνωρίζουν πολύ καλά ότι τα ζάρια είναι όμοια,δεν τους ενδιαφέρει η σειρά εμφάνισης των ενδείξεων των δυο ζαριών.Έτσι το ζητούμενο πλήθος είναι ο αριθμός των επαναληπτικών συνδυασμών 2 αντικείμενων από 6.

Αυτός είναι: $\begin{bmatrix} 6 \\ 2 \end{bmatrix} = \binom{6+2-1}{2} = \binom{7}{2} = \frac{7!}{2!5!} = 21$

Όταν όμως εχουμε δυαδες διαφορετικών αριθμών τότε πρόκειται για πλήθος συνδυασμών των ενδείξεων 1,2,3,4,5,6 χωρίς επανάληψη.Έχουμε $\binom{6}{2} = 15$ δυάδες.

ii.Με 10 ζάρια τα πράγματα ζορίζουν καθώς με άμεση μέτρηση θα έπαιρνε χρόνο. Το ζητούμενο πλήθος είναι ο αριθμός των επαναληπτικών συνδυασμών 10 αντικείμενων από 6 .

$$\begin{bmatrix} 10 \\ 6 \end{bmatrix} = \binom{6+10-1}{10} = \binom{15}{10} = \frac{15!}{10!5!} = 3003$$ ∎

71.Με πόσους τρόπους μπορούμε να μοιράσουμε 10 καραμέλες στον Γιάννη, την Μαρία, τον Μήτσο και την Χαρά;

Είναι δυνατό κάποιο ή κάποια παιδιά να μην πάρουν καραμέλες ή σε κάποιο ή κάποια παιδιά να δοθούν περισσότερες από μια καραμέλες.

Ουσιαστικά πρόκειται για επιλογή με επανάληψη 4 αντικειμένων (παιδιά) από 10 αντικείμενα (καραμέλες). Έχουμε λοιπόν συνδυασμούς με επανάληψη των 10 καραμελών ανά 4 παιδιά. Άρα η μοιρασιά μπορεί να γίνει με $\binom{10+4-1}{4-1} = \binom{13}{3}$ τρόπους.

Γενέθλια

● Έστω 10 άτομα με ημερομηνία γέννησης οποιαδήποτε από τις 365 ήμερες του έτους. Αν τα άτομα αυτά θεωρηθούν μια διαταγμένη ν-αδα, τότε το πλήθος των δυνατών περιπτώσεων τα 10 αυτά άτομα να έχουν γεννηθεί μια οποιαδήποτε ήμερα του έτους είναι 365^{ν}.

● Έστω 10 άτομα, αν θέλουμε αυτά τα άτομα να έχουν γεννηθεί την ίδια ημερομηνία, τότε αυτή θα είναι μια από τις 365 μέρες του έτους , δηλαδή υπάρχουν 365 περιπτώσεις.

● Έστω 10 άτομα ,αν θέλουμε αυτά τα άτομα να έχουν γεννηθεί ανά δυο διαφορετική ημερομηνία, τότε αυτό μπορεί να γίνει ανά $\Delta_{10}^{365} = \dfrac{365!}{(365-10)!}$ τρόπους.

● Έστω 10 άτομα ,αν θέλουμε από αυτά τα άτομα τουλάχιστον 2 να έχουν γεννηθεί την ίδια ημερομηνία ,τότε αυτό μπορεί να γίνει ανά
$365^{\nu} - \Delta_{10}^{365} = 365^{\nu} - \dfrac{365!}{(365-10)!}$ τρόπους.

● Έστω 10 άτομα , αν θέλουμε από αυτά τα 10 άτομα –έστω $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5,\alpha_6,\alpha_7,\alpha_8,\alpha_9,\alpha_{10}$- τα $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ να έχουν γεννηθεί την ίδια ημερομηνία ,ενώ τα υπόλοιπα σε άλλες και διαφορετικές ανά 2 ημερομηνίες αυτό μπορεί να γίνει με $365\Delta_{10-4}^{364} = 365\Delta_{6}^{364} = 365\cdot\dfrac{364!}{(364-6)!} = \dfrac{365!}{358!}$

● Έστω 10 άτομα , αν θέλουμε από αυτά τα 10 άτομα –έστω $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5,\alpha_6,\alpha_7,\alpha_8,\alpha_9,\alpha_{10}$- τα 4 να έχουν γεννηθεί την ίδια ημερομηνία, ενώ τα υπόλοιπα σε άλλες και διαφορετικές ανά 2 ημερομηνίες, τότε αυτό μπορεί να γίνει κατά
$\binom{10}{4}\cdot 365\cdot\Delta_{6}^{364}$

Όλες οι παραπάνω παρατηρήσεις γενικεύονται για ν άτομα.

72. Πόσοι τρόποι υπάρχουν ώστε 6 άτομα να έχουν γενέθλια:
i.την ίδια ημερομηνία του έτους.
ii.διαφορετικές (ανά δυο) ημερομηνίες του έτους.
iii. τουλάχιστον δυο άτομα να έχουν γενέθλια την ίδια ημερομηνία του έτους.
iv. τουλάχιστον ένα από τα έξι άτομα να έχει γενέθλια 12 Μάρτιου.

Λύση

i.Τα 6 άτομα μπορούν να θεωρηθούν ως μια διατεταγμένη εξάδα, και καθένας τους μπορεί να γεννηθεί οποιαδήποτε μέρα του χρόνου. Επειδή το ζητούμενο είναι να έ-

χουν γεννηθεί την ίδια ημερομηνία, τότε αυτή θα είναι μια από τις 365 μέρες του έτους. Δηλαδή, θα υπάρχουν 365 τρόποι.

ii. Θέλουμε να έχουν γεννηθεί σε διαφορετικές (ανά δυο) ημερομηνίες του έτους, αυτό μπορεί να γίνει κατά $\Delta_6^{365} = \frac{365!}{(365-6)!}$ τρόπους.

iii. Επειδή θέλουμε τουλάχιστον δυο άτομα αν έχουν γεννηθεί την ίδια ημερομηνία του έτους,θα πρέπει,από τους 365^6 τρόπους που υπάρχουν ώστε καθένας τους να έχει γεννηθεί οποιαδήποτε μέρα του έτους, να αφαιρέσουμε τους τρόπους που υπάρχουν ώστε καθένας τους ,να εχει γεννηθεί σε διαφορετικές (ανά δυο) ημερομηνίες του έτους. Επομένως, το να έχουν γεννηθεί 2 τουλάχιστον άτομα την ίδια ημερομηνία του έτους μπορεί να συμβεί κατά $365^6 - \Delta_6^{365} = 365^6 - \frac{365!}{(365-6)!}$ τρόπους

iv. θέλουμε τουλάχιστον ένα από τα έξι άτομα να έχει γενέθλια μια συγκεκριμένη ημερομηνία (12 Μάρτιου) .Θα βρούμε με πόσους τρόπους και τα έξι άτομα έχουν γενέθλια ημερομηνία διαφορετική από 12 Μαρτίου ,αυτό γίνεται με 364^6 τρόπους. Γνωρίζουμε υπάρχουν 365^6 τρόποι ώστε καθένας τους να έχει γεννηθεί οποιαδήποτε μέρα του έτους. Άρα τουλάχιστον ένα από τα έξι άτομα να έχει γενέθλια μια συγκεκριμένη ημερομηνία γίνεται με $365^6 - 364^6$ τρόπους. ■

Οι δέκα εντολές του George Polya προς τον δάσκαλο των μαθηματικών!



1.Να δείχνεις ενδιαφέρον προς το αντικείμενο σου.
2.Να γνωρίζεις το αντικείμενο σου.
3.Γνώριζε τους τρόπους μάθησης.Ο καλύτερος τρόπος για να μάθεις κάτι είναι να το ανακαλύψεις μόνος σου.
4.Προσπαθησε να διαβάζεις τα πρόσωπα των μαθητών σου, προσπάθησε να δεις τις προσδοκίες και τις δυσκολίες τους, τοποθέτησε τον εαυτό σου στην θέση τους.
5.Δώσε στους μαθητές σου όχι μόνο πληροφορία αλλά και καθοδήγηση χειρισμού των γνώσεων τους, και μάθε τους την συνήθεια της μεθοδικής εργασίας.
6.Άφηνε τους να μάθουν να κάνουν νοερές εκτιμήσεις.
7.Άφηνε τους να μάθουν να αποδεικνύουν.
8.Εχε τον νου σου να επισημαίνεις στα διαθέσιμα προβλήματα εκείνα τα χαρακτηριστικάπου μπορεί να αποβούν χρήσιμα για την επίλυση επομένων προβλημάτων – προσπάθησε να αποκαλύψεις ένα γενικό μοτίβο (αν υπάρχει) που βρίσκεται πίσω από την παρούσα συγκεκριμένη κατάσταση.
9.Μην χαρίζεις ολόκληρο το μυστικό σου μονομιάς–άφησε τους μαθητές να μαντεύουν, να εκτιμούν πριν τους το πεις, άφησε τους να το βρουν μόνοι τους όσο είναι εφικτό.
10.Να προτείνεις,να μην τους βάζεις με το ζόρι να καταπιούν την πληροφορία.

Η μαγεία της συνδυαστικής και η μεγάλη διαφορά της από τα αλγοριθμικά μαθηματικά που δεσπόζουν στην μέση εκπαίδευση είναι ότι πολλές προτάσεις αποδεικνύονται χωρίς την χρήση άλγεβρας αλλά με συνδυαστικά επιχειρήματα,τακτική που απαιτεί από τον μαθητή βαθιά κατανόηση της έννοιας και αναλυτική ικανότητα.

Δείτε το ακόλουθο παράδειγμα:

73.Να αποδείξετε ότι για κάθε $\kappa,\nu \in \mathbb{N}^*, \kappa \le \nu$ ισχύει:

$$\binom{\nu+1}{\kappa} = \binom{\nu}{\kappa} + \binom{\nu}{\kappa-1}$$

Υποθέτουμε ότι έχουμε μια ομάδα ν+1 μαθητών. Θέλουμε να επιλέξουμε κ μαθητές από τους ν+1.Μας είναι αδιάφορη η σειρά επιλογής,οπότε έχουμε συνδυασμούς. Μπορούμε να το κάνουμε με $\binom{\nu+1}{\kappa}$ τρόπους.

Ας τους μετρήσουμε και διαφορετικά. Θεωρούμε έναν από αυτούς έστω τον Α . Αναζητούμε το πλήθος των ομάδων που περιέχουν τον Α και το πλήθος των ομάδων που δεν περιέχουν τον Α.

Το πλήθος των ομάδων που περιέχουν τον Α είναι $\binom{\nu}{\kappa-1}$ -έχει ήδη επιλεγεί ο Α απομένουν κ-1 να επιλέξουμε ενώ το πλήθος των ομάδων που δεν περιέχουν τον Α είναι $\binom{\nu}{\kappa}$,επιλέγουμε κ άτομα από τα ν,ο Α εξαιρείται. Άρα το σύνολο των τρόπων επιλογής είναι $\binom{\nu}{\kappa} + \binom{\nu}{\kappa-1}$.

Τελικά, προκύπτει με συνδυαστικό επιχείρημα ότι $\binom{\nu+1}{\kappa} = \binom{\nu}{\kappa} + \binom{\nu}{\kappa-1}$ ■

*Οι **συνδυαστικές αποδείξεις** βασίζονται στην συνδυαστική σημασία των συμβόλων που παρουσιάζονται ενώ οι **αλγεβρικές** ή **υπολογιστικές αποδείξεις** χρησιμοποιούν αποκλειστικά το αριθμητικό περιεχόμενο των συμβόλων που χρησιμοποιούνται.Μια τεχνική που βοηθά τον μαθητή να κατανοεί τις συνδυαστικές αποδείξεις είναι η εύρεση συνδυαστικού επιχειρήματος (Combinatorial Reasoning).*



Συνδυαστικό επιχείρημα.*Αν αυτή είναι η απάντηση,τότε ποια είναι η ερώτηση;*

Θυμάμαι μια πολύ ωραία ζεν ιστορία όπου ο μαθητής ρωτούσε τον δάσκαλο: *«Δάσκαλε, ποια είναι η σοφότερη ερώτηση που θα μπορούσα να σου κάνω και τι θα απαντούσες;»* Ο μεγάλος δάσκαλος είπε: *«Αυτή η ερώτηση που έκανες πριν από λίγο και η απάντηση αυτή που σου δίνω τώρα.»* Η αλήθεια είναι τα ερωτήματα ζεν είναι πολύ και καθόλου αλλά η παραπάνω ιστορία συνάδει μια ευρετική τεχνική που βοηθά στην κατανόηση και εμβάθυνση σύνθετων εννοιών.Εξηγούμαι,η πεπατημένη στην μελέτη των μαθηματικών είναι εκφώνηση-λύση,αλλά σκεφτείτε,αν διαβάζετε αυτή την σελίδα έχετε ήδη διαβάσει για μεταθέσεις,διατάξεις,κυκλικές μεταθέσεις,συνδυασμούς,επιλογές με επανάληψη,επιλογές χωρίς επανάληψη,επιλογές με σειρά, επιλογές χωρίς σειρά.Θεμιτό είναι να υπάρχει μια σύγχυση.Μια τεχνική που βοηθάει να οργανώσετε την συνδυαστική σας σκέψη είναι η εύρεση συνδυαστικού επιχειρήματος (Combinatorial Reasoning).Σας δίνουν ένα αριθμητικό τύπο και γράφετε μια εκφώνηση συνδυαστικής της οποίας αποτελεί λύση.

Δείτε τον ακόλουθο πινάκα και διαβάστε τον από αριστερά προς τα δεξιά.

$2*6$	● *Αν έχουμε 2 διαφορετικά ποτήρια,6 διαφορετικά είδη αναψυκτικών με πόσους τρόπους μπορούμε να σερβίρουμε ένα αναψυκτικό;*
$5+3+4$	● *Αν πρέπει να δούμε μια κινηματογραφική ταινία από 5 κοινωνικες,3 περιπέτειες και 4 κωμωδίες,πόσες επιλογές έχουμε;*
2^9	● *Αν ρίξουμε ένα κέρμα 9 φορές πόσα δυνατά αποτελέσματα (κορώνα-γράμματα) είναι δυνατό να έχουμε;*
$\binom{10}{4}$	● *Με πόσους τρόπους μπορούμε να επιλέξουμε από μια ομάδα 10 ανθρώπων 4 από αυτούς όταν η σειρά επιλογής δεν έχει σημασία;*
Δ_4^{10}	● *Με πόσους τρόπους μπορούμε να επιλέξουμε από μια ομάδα 10 ανθρώπων 4 από αυτούς όταν η σειρά επιλογής έχει σημασία;*
$5\cdot\binom{10}{4}$	● *Με πόσους τρόπους μπορούμε να επιλέξουμε από μια ομάδα 10 ατόμων 5 από αυτούς και κατόπιν ένα από αυτούς ως πρόεδρο.*
$\binom{17}{8}\cdot\binom{20}{3}$	● *Πόσες είναι οι διαφορετικές ομάδες 8 αγοριών και 3 κοριτσιών όταν επιλέγονται από 17 αγόρια και 20 κορίτσια;*
$\binom{20}{8}+\binom{20}{3}$	● *Με πόσους τρόπους μπορούμε να επιλέξουμε μια ομάδα 8 ή 3 ατόμων όταν επιλέγονται από 20 άτομα;*
$\binom{20}{8}=\binom{20}{12}$	● *Ο αριθμός των τρόπων με τους οποίους επιλέγουμε 8 άτομα από 20 για να πάρουν επίδομα θέρμανσης είναι ο ίσος με τον αριθμό των τρόπων με τους οποίους επιλέγουμε 12 άτομα από 20 που δεν θα πάρουν επίδομα θέρμανσης.*



Ένα συνδυαστικό επιχείρημα από τον Πινγκ Πονγκ 0!=1;
Σύμφωνα με όσα είπαμε για τις μεταθέσεις ν! είναι το πλήθος των μεταθέσεων ν αντικειμένων,δηλαδή με πόσους τρόπους μπορούν ν άτομα να καθίσουν σε ν καρέκλες(όχι κυκλικά),χωρίς να μείνει κάποια κενή καρέκλα και χωρίς να κάτσουν περισσότεροι από ένας σε κάποια καρέκλα. 0! Θα είναι το πλήθος των τρόπων με τους οποίους 0 άτομα κάθονται σε 0 καρέκλες.Που είναι ακριβώς ένας: κανένας δεν κάθεται πουθενά. Άρα ***0!=1***



74. Να δείξετε ότι ισχύει: $\binom{\nu}{0}+\binom{\nu}{1}+\binom{\nu}{2}+\ldots+\binom{\nu}{\nu}=2^{\nu}$ **,** $\nu\in\mathbb{N}$

Λύση

Έστω σύνολο $A=\{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_\nu\}$ με ν το πλήθος στοιχεία .

Όπως αποδείξαμε στο παράδειγμα 19 (σελ 18) υπάρχουν ακριβώς 2^{ν} υποσύνολα του Α συμπεριλαμβανομένων του Α και του $\varnothing$.

Το $\varnothing$ δεν έχει κανένα στοιχείο άρα έχει $\binom{\nu}{0}$ πλήθος στοιχείων,

το πλήθος των υποσυνόλων του Α με 1 στοιχείο είναι $\binom{\nu}{1}$,

το πλήθος των υποσυνόλων του Α με 2 στοιχεία είναι $\binom{\nu}{2}$,

…………………………

το πλήθος των υποσυνόλων του Α με ν στοιχεία είναι $\binom{\nu}{\nu}$.

Συμπεραίνουμε ότι το πλήθος των υποσυνόλων του Α είναι
$\binom{\nu}{0}+\binom{\nu}{1}+\binom{\nu}{2}+\ldots+\binom{\nu}{\nu}$ και έχουμε τελικά $\binom{\nu}{0}+\binom{\nu}{1}+\binom{\nu}{2}+\ldots+\binom{\nu}{\nu}=2^{\nu}$ ■

Το προηγούμενο πρόβλημα ελαφρώς «μακιγιαρισμένο».

75.Οι γυναίκες ενός χωριού έχουν βαμμένα κόκκινα τα νύχια των χεριών τους, όλες με διαφορετικό τρόπο.Για παράδειγμα,μια γυναίκα έχει βάψει τα τρία πρώτα δάκτυλα στο δεξί χέρι, μια άλλη τον δείκτη στο αριστερό χέρι κ.λ.π. Πόσες είναι όλες οι γυναίκες του χωριού;

Λύση

Κάθε γυναίκα έχει δέκα δάκτυλα και κάθε δάκτυλο είναι βαμμένο ή άβαφο. Μια προσέγγιση είναι να θεωρήσουμε ότι κάθε δάκτυλο είτε είναι βαμμένο είτε είναι άβαφο άρα από την πολλαπλασιαστική αρχή έχουμε 2^{10}=1024 περιπτώσεις. Όμως, δεν

υπάρχει περίπτωση μια γυναίκα να έχει άβαφα και τα δέκα νύχια της ,συνεπώς οι περιπτώσεις μειώνονται στις 1023.

Άλλος τρόπος αντιμετώπισης είναι να χρησιμοποιήσουμε τον τύπο που αποδείξαμε στο προηγούμενο παράδειγμα:

$$\binom{10}{1}+\binom{10}{2}+\ldots+\binom{10}{10}=2^{10}-1$$

Από την προσθετική αρχή βρίσκουμε το άθροισμα όλων των συνδυασμών βαφής των δέκα δακτύλων ανά 1 ,ανα 2 κ.λ.π αφαιρώντας την μονάδα. ■

Παραλλαγή του θέματος 75 έχει τεθεί ως διαγωνιστικό θέμα στον μαθηματικό διαγωνισμό AIME,ο γραμμωτός κώδικας (Qr code) θα σας παραπέμψει στο κανάλι μου στο αντίστοιχο βίντεο με εκφώνηση-λύση.
(AIME: *American Invitational Mathematics Examination)*



76.Να δείξετε ότι το γινόμενο κ διαδοχικών φυσικών αριθμών είναι πολλαπλάσιο του κ!

Λύση

Έστω $(\nu+1)(\nu+2)(\nu+3)\cdot\ldots\cdot(\nu+\kappa)$ το γινόμενο κ διαδοχικών ακεραίων αριθμών,($\kappa,\nu\in\mathbb{N}^*$). Θεωρούμε σύνολο με ν+κ το πλήθος στοιχεία. Τότε, το πλήθος των συνδυασμών, κ στοιχείων αυτού του συνόλου ,εκφράζεται από ακέραιο αριθμό. Έχουμε λοιπόν,

$\binom{\nu+\kappa}{\kappa}=\alpha$,α ακέραιος , οπότε

$$\binom{\nu+\kappa}{\kappa}=\alpha\Leftrightarrow\frac{(\nu+\kappa)!}{\kappa!\nu!}=\alpha\Leftrightarrow\frac{\nu!\cdot(\nu+1)(\nu+2)\cdot\ldots\cdot(\nu+\kappa)}{\kappa!\nu!}=\alpha$$

$$\Leftrightarrow\frac{(\nu+1)(\nu+2)\cdot\ldots\cdot(\nu+\kappa)}{\kappa!}=\alpha$$

$\Leftrightarrow(\nu+1)(\nu+2)\cdot\ldots\cdot(\nu+\kappa)=\alpha\cdot\kappa!$,δηλαδή $(\nu+1)(\nu+2)(\nu+3)\cdot\ldots\cdot(\nu+\kappa)$ πολλαπλάσιο του $\kappa!$ ■

Εφαρμόζοντας το παραπάνω παράδειγμα για κ=2,3,4,5 προκύπτει ότι

- *Το γινόμενο* $\lambda\cdot(\lambda+1)$ *(* $\lambda\in\mathbb{N}^*$ *) είναι πάντα άρτιος αριθμός.(πολ/σιο του2)*
- *Το γινόμενο* $\lambda\cdot(\lambda+1)\cdot(\lambda+2)$ *(* $\lambda\in\mathbb{N}^*$ *)είναι πάντα πολλαπλάσιο του 6.(3!=6)*
- *Το γινόμενο* $\lambda\cdot(\lambda+1)\cdot(\lambda+2)\cdot(\lambda+3)$ *(* $\lambda\in\mathbb{N}^*$ *)είναι πάντα πολλαπλάσιο του 24.(4!=24)*
- *Το γινόμενο* $\lambda\cdot(\lambda+1)\cdot(\lambda+2)\cdot(\lambda+3)\cdot(\lambda+4)$ *(* $\lambda\in\mathbb{N}^*$ *)είναι πάντα πολλαπλάσιο του 120.(5!=120)*



Η Αρχή της διπλής μέτρησης (Double counting)
Έστω το ακόλουθο πρόβλημα:
77.Την περασμένη πρωτοχρονιά σε μια γιορτή που παρεβρέθηκαν ν άτομα, κατά την διάρκεια μιας πρόποσης για την έλευση του νέου έτους καθένα από τα ν άτομα τσούγκρισε το ποτήρι του με κάθε παρευρισκόμενο στην γιορτή. Ακουστήκαν 45 τσουγκρίσματα.Πόσοι ήταν οι παρευρισκόμενοι στην συγκέντρωση;
Λύση
Έχουμε ν άτομα και κάθε τσούγκρισμα απαιτεί 2 εκ των ν παρευρισκομένων - η σειρά μας είναι αδιάφορη- οπότε αναζητούμε το πλήθος των συνδυασμών ν ανά 2,δηλαδή,

$$\binom{\nu}{2}=\frac{\nu!}{2!(\nu-2)!}=\frac{(\nu-2)!\cdot(\nu-1)\cdot\nu}{2!(\nu-2)!}=\frac{(\nu-1)\cdot\nu}{2}$$

Εξισώνουμε $\frac{(\nu-1)\cdot\nu}{2}=45 \Leftrightarrow (\nu-1)\cdot\nu=90 \overset{\nu\in\mathbb{N}^*}{\Leftrightarrow} \nu=10$ άτομα. ■

Το παραπάνω πρόβλημα υπήρχε και σε μια παλιότερη έκδοση του βιβλίου των μαθηματικών της Γ γυμνασίου και εκεί λυνόταν με την αρχή της διπλής μέτρησης (Double counting) οπότε κρίνω σκόπιμο να την αναφέρω.
Αφού καθένας από τους ν παρευρισκόμενους τσουγκρίζει με τους υπολοίπους παρευρισκόμενους (ν-1 πλήθος) τότε έχουμε ν(ν-1) τσουγκρίσματα ,όμως τα τσουγκρίσματα με αυτόν τον τρόπο έχουν καταμετρηθεί δυο φορές ,την μια φορά όταν ο Α τσούγκρισε με τον Β και μια επειδή ο Β τσούγκρισε με τον Α.Άρα έχουμε $\frac{(\nu-1)\cdot\nu}{2}$ τσουγκρίσματα.
Η αρχή της διπλής μέτρησης αποτελεί αποδεικτική τεχνική στην συνδυαστική και διατυπώνεται ως εξης:



Αν τα στοιχεία ενός συνόλου μετρηθούν με δυο διαφορετικούς τρόπους,τότε το πλήθος τους μετρημένο και με τους δυο τρόπους είναι το ίδιο.

Δείτε το ακόλουθο social πρόβλημα.
78. Το άθροισμα του πλήθους των φίλων όλων των εγγεγραμμένων χρηστών του Faceboook είναι άρτιος αριθμός.
Λύση
Έστω ότι έχουμε ν ανθρώπους εγγεγραμμένους στο Facebook,τους δίνουμε λοιπόν ένα αύξοντα αριθμό από το 1 μέχρι το ν. Έχουμε συνολικά στο Facebook μ φιλίες.Θεωρούμε το ζεύγος Φ(x,y) όταν το πρόσωπο x εμπλέκεται στην φιλία με το πρόσωπο y.Έστω ένα συγκεκριμένο πρόσωπο από τα ν,ο α,ο αριθμός των φίλων που έχει ο α ισούται με το πλήθος των ζευγών Φ(α,j) για κάποιο j.Έτσι λοιπόν ο συνολικός αριθμός των φίλων που έχει καθένα από τα ν άτομα -που είναι εγγεγραμμένα στο Facebook- ισούται με τον συνολικό αριθμό των ζευγών Φ(x,j). Όμως αν θεωρήσουμε μια συγκεκριμένη φιλία k.Εφόσον οι φιλίες στο Facebook είναι αμοιβαίες μεταξύ δυο φίλων τότε κάθε ζεύγος Φ(x,k) έχει διπλομετρηθεί άρα ο συνολικός αριθμός των ζευγών Φ(x,j) είναι 2μ που προφανώς είναι άρτιος. ■

79. Από ένα σύλλογο ν άτομων θέλουμε να επιλέξουμε μια επιτροπή όπου ένα από τα μέλη της θα είναι πρόεδρος. Πόσες επιτροπές με έναν πρόεδρο μπορούμε να επιλέξουμε; *(Η επιτροπή είναι δυνατό να περιέχει από 1 έως ν άτομα*)
Με την βοήθεια του παραπάνω προβλήματος να αποδείξετε την ταυτότητα:

$$\binom{\nu}{1}\cdot 1+\binom{\nu}{2}\cdot 2+......+\binom{\nu}{\nu}\cdot \nu=\nu\cdot 2^{\nu-1}, \nu\in\mathbb{N}^*$$

Λύση
Ο αριθμός των ατόμων της επιτροπής είναι από 1 μέχρι ν .Μια επιτροπή κ ατόμων ($1\le\kappa\le\nu$) μπορεί να επιλεγεί με $\binom{\nu}{\kappa}$ τρόπους και ο πρόεδρος μπορεί να επιλεγεί από τα κ μέλη της επιτροπής με κ τρόπους άρα η επιτροπή με τον πρόεδρο μπορεί να επιλεγεί κατά $\binom{\nu}{\kappa}\cdot\kappa$ τρόπους. Από τη προσθετική αρχή για επιτροπές από 1 έως ν άτομα έχουμε $\binom{\nu}{1}\cdot 1+\binom{\nu}{2}\cdot 2+......+\binom{\nu}{\nu}\cdot \nu$ τρόπους

Εναλλακτικά,μπορούμε να το χειριστούμε ως εξής:Αρχικά επιλέγουμε τον πρόεδρο με ν τρόπους και κατόπιν τα υπόλοιπα μέλη της επιτροπής που θα είναι ένα σύνολο από 1 έως ν-1 μέλη.Αλλά το πλήθος των υποσυνόλων ενός συνόλου ν-1 στοιχείων είναι $2^{\nu-1}$ άρα η επιτροπή μπορεί να συμπληρωθεί με $\nu\cdot 2^{\nu-1}$ τρόπους. Συνεπώς, από την αρχή της διπλής μέτρησης προκύπτει ότι:

$$\binom{\nu}{1}\cdot 1+\binom{\nu}{2}\cdot 2+......+\binom{\nu}{\nu}\cdot \nu=\nu\cdot 2^{\nu-1}, \nu\in\mathbb{N}^* \quad\blacksquare$$

80.Σε μια εκδήλωση που πραγματοποιήθηκε για την καταπολέμηση της βίας στα γήπεδα παραβρέθηκαν μόνο οπαδοί (!) των δυο αιωνίων ποδοσφαιρικών αντίπαλων Αλγεβρικού Αστέρα ,Γεωμετριακού. Ομολογουμένως η προσέλευση δεν ήταν μεγάλη. Παρατηρήθηκε όμως ότι κάθε οπαδός αντάλλαξε χειραψία με ακριβώς 8 οπαδούς του Αλγεβρικού αστέρα και ακριβώς 6 οπαδούς του Γεωμετριακού .Οι χειραψίες μεταξύ οπαδών αντιπάλων ομάδων ήταν κατά πέντε λιγότερες από τις χειραψίες οπαδών των ίδιων ομάδων. Πόσοι ήταν συνολικά οι οπαδοί που παραβρέθηκαν στην εκδήλωση;

Λύση
Έστω Α το πλήθος των οπαδών του Αλγεβρικού αστέρα και Γ το πλήθος των οπαδών του Γεωμετριακού. Αφού κάθε οπαδός του Γεωμετριακού αντάλλαξε χειραψία με 8 οπαδούς του Αλγεβρικού αστέρα το πλήθος των χειραψιών μεταξύ οπαδών των δυο αντιπάλων ομάδων είναι 8Γ.Όμως αυτό το πλήθος είναι παράλληλα και 6Α διότι κάθε οπαδός του Αλγεβρικού Αστέρα αντάλλαξε χειραψία με 6 οπαδούς του.

Άρα, 8Γ=6Α (1)
Πόσες χειραψίες ανταλλάχτηκαν μεταξύ των οπαδών του Αλγεβρικού αστέρα; Κάθε οπαδός του Αλγεβρικού αστέρα χαιρέτησε άλλους 8 οπαδούς της ίδιας ομάδας και το συνολικό πλήθος των οπαδών του Αλγεβρικού αστέρα ισούται με Α. Αυτό μας δίνει 8Α χειραψίες , με την διαφορά ότι έχουμε μετρήσει κάθε χειραψία δυο φορές. Επομένως,το πλήθος των χειραψιών μεταξύ των οπαδών του Αλγεβρικού αστέρα είναι 4Α. Ομοίως ,βρίσκουμε ότι το πλήθος των χειραψιών μεταξύ των οπαδών του Γεωμετριακού ισούται 6Γ/2=3Γ.Από την υπόθεση ισχύει 8Γ+5=4Α+3Γ (2).
Λύνουμε το σύστημα των (1),(2) και προκύπτει: Γ=15 και Α=20.
Αρα συνολικά έχουμε 35 οπαδούς. ■

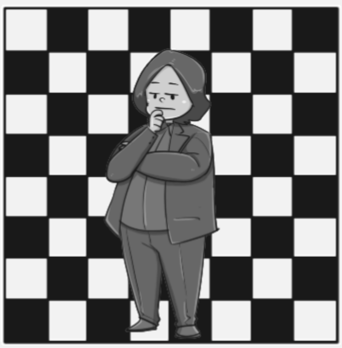
Τα μαθηματικά,εκτός των άλλων,σας διδάσκουν να είστε ειλικρινείς και με τον εαυτό σας και με τους άλλους.

Δεν μπορείτε να μάθετε μαθηματικά βλέποντας κάποιον άλλο να ασχολείται με αυτά. Μια ενεργή διαδικασία μάθησης εμπεριέχει την επίλυση προβλημάτων αυξανόμενης δυσκολίας ,αν λύνετε συνεχώς προβλήματα της ίδιας πάντα δυσκολίας αυτά καταλήγουν απλώς ασκήσεις ρουτίνας. Αν ένα συγκεκριμένο πρόβλημα σας αντιστέκεται επίμονα ,μπορείτε μεν να κοιτάτε το ταβάνι ή να συνοφρυώνεστε (δεν υπάρχει κανείς νόμος να το απαγορεύει) ,αλλά το καλύτερο που έχετε να κάνετε είναι να πάρετε χαρτί και μολύβι και να αρχίσετε να πειραματίζεστε:προβείτε σε κάποιες εκτιμήσεις,θεωρήστε ειδικές περιπτώσεις, περιγράψτε τις ιδέες σας, και ούτω καθεξής.Ο Leonard Euler είπε κάποτε: «Το μολύβι μου μερικές φόρες κατεβάζει καλύτερες ιδέες από το κεφάλι μου .»

Για να αντιμετωπίσετε το πρόβλημα, πρέπει να συγκεντρώσετε την προσοχή σας στις συνθήκες του και στην διατύπωση του έως ότου εμφανιστεί η πρώτη αναλαμπή μιας ιδέας και η ελπίδα της επιτυχίας. Η επίλυση ενός προβλήματος δεν αποτελεί μόνο διανοητική πρόκληση αλλά και δοκιμασία της θέλησης απαιτεί «μαχητικό πνεύμα».

Δεν είναι απαραίτητο (ούτε καν εφικτό) να λύσετε όλα τα γνωστά μαθηματικά προβλήματα.Πρέπει επομένως να διαλέξετε ό,τι θεωρείτε ευχάριστο, διδακτικό ενδιαφέρον και στα πλαίσια των δυνατοτήτων σας.Μέσα από αυτήν την διαδικασία θα καλλιεργήσετε τα κριτήρια σας και θα αποκτήσετε ευρύτερη μαθηματική «κουλτούρα».

Τα μαθηματικά, έκτος των άλλων, σας διδάσκουν να είστε ειλικρινείς και με τον εαυτό σας και με τους άλλους. Όταν απαντάτε σε ένα μαθηματικό πρόβλημα δεν είναι δυνατές οι υπεκφυγές.Και επιπλέον, η ειλικρίνεια αποτελεί απαραίτητη προϋπόθεση του συνεπούς τρόπου σκέψης. Έκτος αυτού, όταν λύνουμε προβλήματα δεν μαθαίνουμε μόνο πως να αποδεικνύουμε αληθείς προτάσεις αλλά και πώς να μαντεύουμε ποιες είναι οι αληθείς. Και η ικανότητα να μαντεύουμε αποτελεί αναπόσπαστο κομμάτι της παραγωγικής σκέψης.

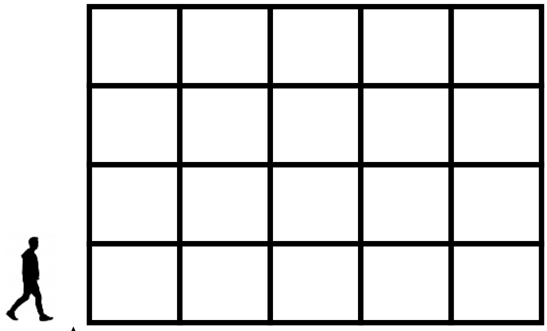


Ο όμορφος κόσμος των μαθηματικών προβλημάτων αυξάνεται και πληθύνεται συνεχώς,γεγονός που αποδεικνύει ότι τα μαθηματικά είναι πράγματι μια ζωντανή επιστήμη.

V.Prasolov

Διαδρομές (Συνδυαστική γεωμετρια)

81.Δίνεται ένα οδικό δίκτυο σε σχήμα ορθογώνιου πλέγματος αποτελούμενο από 4 γραμμές και 5 στήλες (σχήμα)



Με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορεί να μετακινηθεί κάποιος πάνω στους δρόμους του δικτύου (γραμμές του πλέγματος) από την θέση Α στην θέση Β ,όταν επιτρεπτή μετακίνηση θεωρείται αυτή από αριστερά προς τα δεξιά και από κάτω προς τα πάνω.

Η μετακίνηση από το σημείο Α στο σημείο Β όπως και να γίνει θα αποτελείται από 9 βήματα από τα οποία τα 5 υποχρεωτικά οριζόντια βήματα ,άρα το πλήθος των διαφορετικών διαδρομών είναι $\binom{9}{5}=\frac{9!}{5!(9-5)!}=\frac{9!}{5!4!}=\frac{6\cdot7\cdot8\cdot9}{1\cdot2\cdot3\cdot4}=126$.Στο ίδιο συμπέρασμα θα καταλήγαμε αν σκεπτόμασταν ότι εφόσον η διαδρομή αποτελείται από 9 βήματα θα πρέπει να γίνουν υποχρεωτικά 4 κατακόρυφα βήματα άρα το πλήθος των διαφορετικών διαδρομών είναι $\binom{9}{4}=126$. ■

Ο Πινγκ Πονγκ έχει έμπνευση..

*Εγώ θα το έλυνα αλλιώς.**Ε**ίδαμε ότι η μετακίνηση από το σημείο Α στο σημείο Β όπως και να γίνει θα αποτελείται από 9 βήματα από τα οποία τα 5 υποχρεωτικά οριζόντια (Ο) βήματα και 4 κατακόρυφα (Κ) βήματα*

Δηλαδή, μια διαδρομή θα ήταν ΟΚΟΚΚΟΟΟΚ ,άρα για να βρούμε τις διαδρομές αρκεί να βρούμε όλους τους αναγραμματισμούς 9 γραμμάτων με το Ο να εμφανίζεται 5 φόρες και το Κ 4 φορές και προκύπτει: $\frac{9!}{5!4!}=126$



82.Στο σχήμα έχουμε ένα οδικό δίκτυο με την μορφή ορθογωνίου πλέγματος,αποτελούμενο από τετράγωνα. Θέλουμε να μεταβούμε -με χρήση πάντα του δικτύου- από το σημείο Α στο σημείο Τ μέσω ελαχίστων διαδρομών.

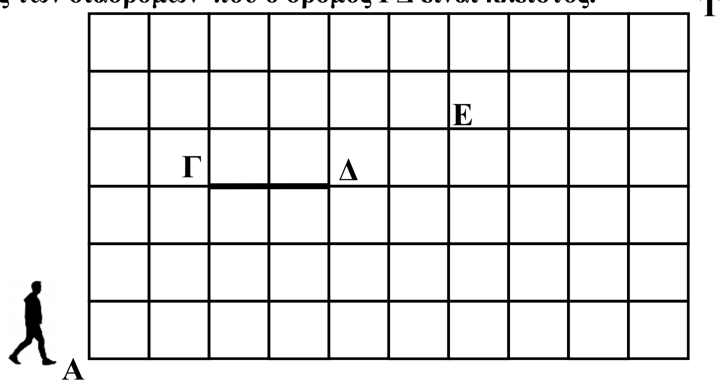
Να βρείτε:

i. το πλήθος των διαδρομών που διέρχονται από το σημείο Γ.

ii. το πλήθος των διαδρομών που διέρχονται από το δρόμο ΓΔ.

iii. το πλήθος των διαδρομών οι οποίες διέρχονται από τα σημεία Γ και Ε.

iv. το πλήθος των διαδρομών που ο δρόμος ΓΔ είναι κλειστός.



Λύση

Θα χρησιμοποιήσουμε το προηγούμενο παράδειγμα.

i.Θα υπολογίσουμε το πλήθος των διαδρομών που φτάνουν στο σημείο Γ

($\binom{5}{3}=\frac{5!}{3!\cdot 2!}=\frac{4\cdot 5}{2}=10$) και στην συνέχεια το πλήθος των διαδρομών που ξεκινούν από το Γ και καταλήγουν στο Τ($\binom{11}{3}=165$) και κατόπιν σύμφωνα με την πολλαπλασιαστική αρχή 10*165=1650.

ii. Θα υπολογίσουμε το πλήθος των διαδρομών που φτάνουν στο σημείο Γ

($\binom{5}{3}=\frac{5!}{3!\cdot 2!}=\frac{4\cdot 5}{2}=10$) και στην συνέχεια το πλήθος των διαδρομών που ξεκινούν από το Δ και καταλήγουν στο Τ($\binom{9}{3}=84$) και κατόπιν σύμφωνα με την πολλαπλασιαστική αρχή 10*84=840.

iii.Θα υπολογίσουμε το πλήθος των διαδρομών που φτάνουν στο σημείο Γ

($\binom{5}{3}=\frac{5!}{3!\cdot 2!}=\frac{4\cdot 5}{2}=10$) και στην συνέχεια το πλήθος των διαδρομών που ξεκινούν από το Γ και καταλήγουν στο Ε($\binom{5}{1}=5$) και στην συνέχεια ξεκινούν από το Ε και

καταλήγουν στο Τ($\binom{6}{2}=15$) ,κατόπιν σύμφωνα με την πολλαπλασιαστική αρχή 10*5*15=750.

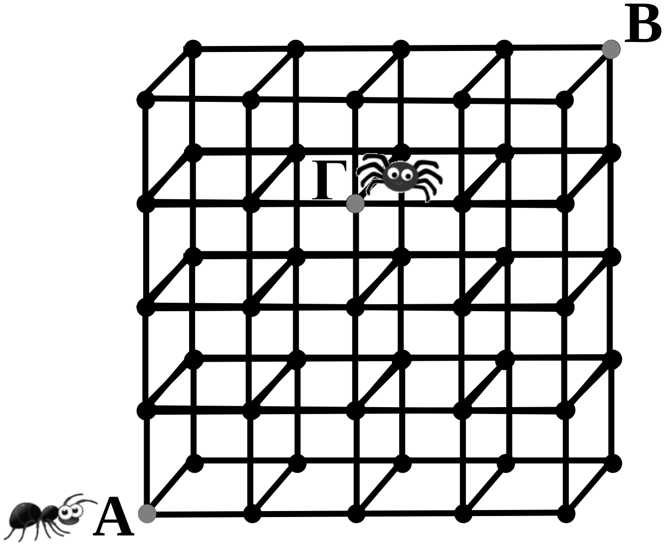
iv. Από το πλήθος των συνολικών διαδρομών από το Α στο Τ($\binom{16}{6}=8008$ θα αφαιρέσουμε αυτές που διέρχονται από το δρόμο ΓΔ (840,ερωτημα (ii)) .
Τελικά,8008-840=7168 ■

Μια άσκηση ιδίου φυράματος στο χώρο.

83.Ένα ακάματο μυρμήγκι, ο Βαλάντης,ζει και κινείται σε ένα τρισδιάστατο κυβικό πλέγμα 4x4x1. (σχήμα)

i.Με πόσους τρόπους μπορεί ο Βαλάντης να κινηθεί από το σημείο Α στο σημείο Β με την προϋπόθεση ότι διανύει την ελάχιστη δυνατή απόσταση;

ii. Με πόσους τρόπους μπορεί ο Βαλάντης να κινηθεί από το σημείο Α στο σημείο Β με την προϋπόθεση ότι δεν περνά από το σημείο Γ που βρίσκεται η Ντίνα η αράχνη που του γυρεύει δανεικά και πάντα διανύει την ελαχίστη δυνατή απόσταση;



Λύση

Υποθέτουμε ότι οι κινήσεις του μυρμηγκιού είναι Δ (δεξιά), Π (πάνω), Μ (Μέσα)

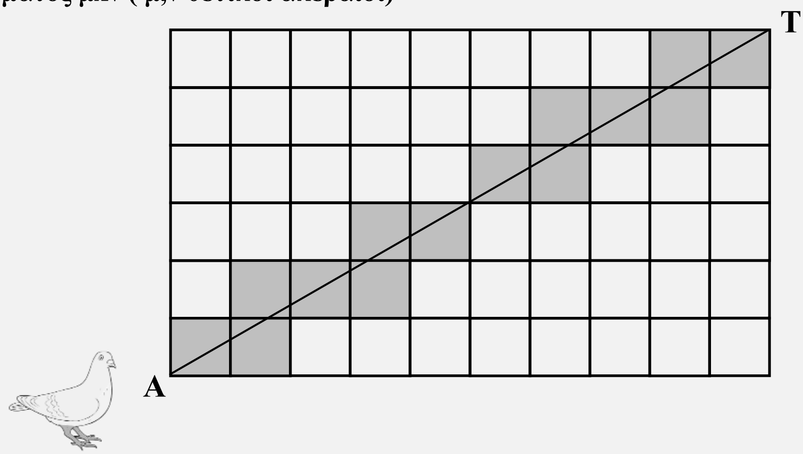
i.Μια ελάχιστη διαδρομή από το Α στο Β θα πρέπει να αποτελείται από 4 Δ, 4Π και 1Μ άρα το πρόβλημα μας ανάγεται στον υπολογισμό όλων των αναγραμματισμών που συντίθενται από τα 9 γράμματα(ΔΔΔΔΠΠΠΠΜ) δηλαδή $\frac{9!}{4!4!}=630$

ii.Θα υπολογίσουμε αρχικά το πλήθος των ελάχιστων διαδρομών που διέρχονται από το Γ και θα το αφαιρέσουμε από το συνολικό πλήθος των συνολικών διαδρομών. Από το Α μέχρι το Γ έχουμε 3Π,2Δ δηλαδή $\frac{5!}{3!2!}=10$,από το Γ στο Β έχουμε 2Δ,1Π,1Μ

δηλαδή $\frac{4!}{2!1!1!}=12$ από την πολλαπλασιαστική αρχή έχουμε 10*12=120 διαδρομές που διέρχονται από το Γ άρα οι διαδρομές που δεν διέρχονται από το Γ είναι: 630-120=510. ■

Με ολίγη από θεωρία αριθμών

Ένα περιστέρι πέταξε σε ευθεία γραμμή από το σημείο Α στο σημείο Τ και πέρασε πάνω από 14 οικοδομικά τετράγωνα. Πάνω από πόσα οικοδομικά τετράγωνα θα περνούσε σε ένα ορθογώνιο οδικό δίκτυο με την μορφή ορθογωνίου πλέγματος μxν (μ,ν θετικοί ακέραιοι)

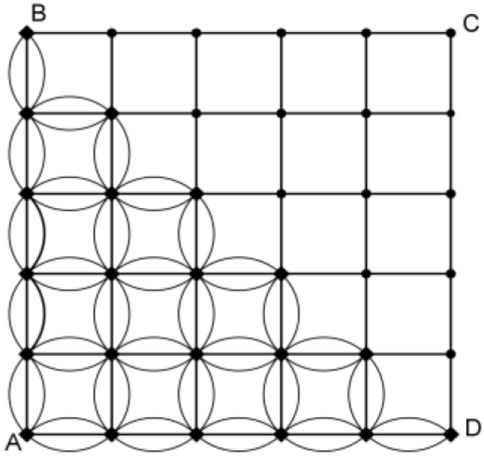


Ουσιαστικά αναζητούμε από ποια τετράγωνα θα περάσει η διαγώνιος ΑΤ του ορθογωνίου παραλληλογράμμου που σχηματίζεται. Το πλήθος των κελιών είναι μ+ν-Μ.Κ.Δ(μ,ν).Όπου (Μ.Κ.Δ(μ,ν) ο μέγιστος κοινός διαιρέτης των μ,ν).
Ας δούμε το γιατί.Διακρίνουμε περιπτώσεις:

•Υποθέτουμε ότι Μ.Κ.Δ(μ,ν)=1 τότε η διαγώνιος δεν διέρχεται από τις κορυφές κανενός οικοδομικού τετραγώνου, έτσι όταν διέρχεται από ένα οικοδομικό τετράγωνο σε ένα αλλο θα το τέμνει σε μια κάθετη και σε μια οριζόντια πλευρά του.Άρα θα πρέπει να τέμνει καθεμιά από τις μ-1 κάθετες γραμμές και από τις ν-1 οριζόντιες.Το οικοδομικό τετράγωνο κάτω αριστερά το τέμνει είτε σε οριζόντια είτε σε κάθετη ,το ίδιο ισχύει και για το πάνω δεξιά οικοδομικό τετράγωνο.Συνολικά μ+ν-2 σημεία τομής, κατά συνέπεια η διαγώνιος διέρχεται από μ+ν-1 κελιά.

•Αν τώρα Μ.Κ.Δ(μ,ν) =δ $\neq 1$ τότε μ=κδ και ν=λδ όπου κ,λ είναι θετικοί ακέραιοι πρώτοι μεταξύ τους. Σε αυτήν την περίπτωση θα «χωρίσουμε» την διαγώνιο σε δ ίσα ευθύγραμμα τμήματα,που το καθένα έχει άκρα κορυφές οικοδομικών τετραγώνων και θα διέρχεται από κ+λ-1 κελιά. Έτσι η διαγώνιος θα διέρχεται από $\delta(\kappa+\lambda-1)=\delta\kappa+\delta\lambda-\delta=\mu+\nu-$Μ.Κ.Δ$(\mu,\nu)$ οικοδομικά τετράγωνα.

84.Τετράγωνο ABCD διαιρείται σε 25 ίσα μικρά (στοιχειώδη) τετράγωνα, σχεδιάζοντας ευθείες παράλληλες στις πλευρές του. Τα σημεία που πλέγματος που βρίσκονται στις πλευρές και το εσωτερικό του τριγώνου ABD συνδέονται μεταξύ τους και με δύο τόξα κύκλων. Ξεκινώντας από το σημείο A, κινούμαστε προς τα δεξιά και προς τα άνω (η κίνηση γίνεται επάνω στα ευθύγραμμα τμήματα που ορίζουν τα στοιχειώδη τετράγωνα και τα τόξα των κύκλων). Πόσες είναι οι δυνατές διαδρομές από το σημείο A μέχρι το σημείο C;



Λύση

Αν δεν υπήρχαν τα τόξα των κύκλων, έχουμε $\binom{10}{5}$ διαφορετικές διαδρομές για να πάμε από το A στο C. Πραγματικά, από τα συνολικά 10 βήματα που πρέπει να κάνουμε είτε δεξιά είτε πάνω, σε ακριβώς 5 πρέπει να πάμε δεξιά και σε ακριβώς 5 πρέπει να πάμε πάνω. Αν επομένως σταθεροποιήσουμε τα βήματα στα οποία πάμε δεξιά, τότε προσδιορίζεται όλη η διαδρομή. Επομένως πρέπει να επιλέξουμε τα 5 βήματα από τα συνολικά 10. Αυτό γίνεται με $\binom{10}{5}$ τρόπους. Τώρα παρατηρούμε ότι για καθένα από τα 5 πρώτα βήματα, από την στιγμή που αποφασίσαμε αν θα πάμε πάνω ή δεξιά ,έχουμε τρεις τρόπους για να το κάνουμε λαμβάνοντας υπόψη τα τόξα.

Από τη πολλαπλασιαστική αρχή έχουμε : $3^5 \cdot \binom{10}{5}$ τρόπους. ■

Αν το γενικεύσουμε για ένα τετράγωνο με ν^2 μοναδιαία τετράγωνα έχουμε το πρόβλημα που τέθηκε στον διαγωνισμό «Αρχιμήδη» το 2016 και η απάντηση με την ίδια συλλογιστική είναι: $3^\nu \cdot \binom{2\nu}{\nu}$



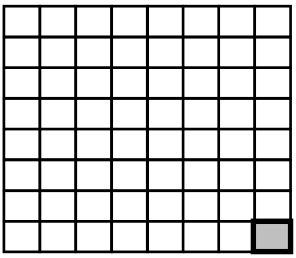
85. ***(Μια κομψή απόδειξη)*** **Να βρείτε τον αριθμό των μη επικαλυπτόμενων τετραγώνων σε μια σκακιέρα.**

Λύση

Είναι προφανές ότι έχουμε ένα 8x8 τετράγωνο.Πόσα τετράγωνα 7x7 έχουμε; Αρκεί να παρατηρήσουμε ότι για κάθε τετράγωνο 7x7 το κάτω δεξιά κελί είναι ταυτόχρονα και κελί στο γραμμοσκιασμένο τετράγωνο 2x2 (*σχήμα 2*)οπότε όσα τα κελιά του 2x2 τόσα και τα τετράγωνα 7x7.

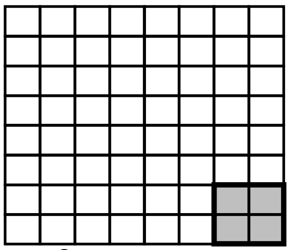
Για κάθε τετράγωνο 6x6 το κάτω δεξιά κελί είναι ταυτόχρονα και κελί στο γραμμοσκιασμένο τετράγωνο 3x3 (*σχήμα 3*)οπότε όσα τα κελιά του 3x3 τόσα και τα τετράγωνα 6x6.Αναλόγως μπορούμε να υπολογίσουμε το πλήθος όλων των τετραγώνων της σκακιέρας.Παρατηρήστε τα σχήματα.Το συνολικό πλήθος είναι:

$$1^2+2^2+\ldots+8^2=204$$



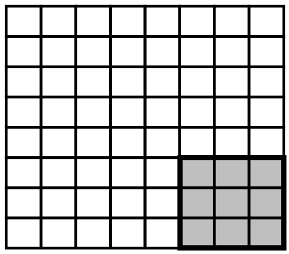
1 τετράγωνο 8x8

Σχήμα 1



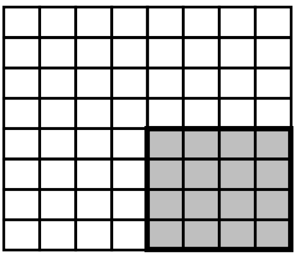
2^2 τετράγωνα 7x7

Σχήμα 2



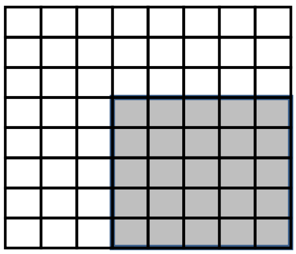
3^2 τετράγωνα 6x6

Σχήμα 3



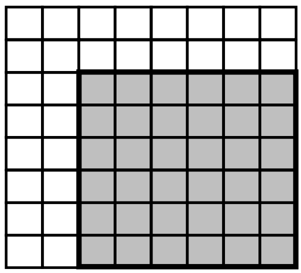
4^2 τετράγωνα 5x5

Σχήμα 4



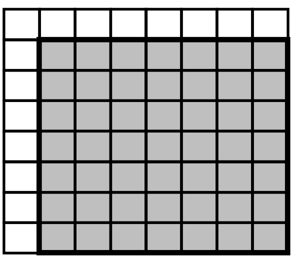
5^2 τετράγωνα 4x4

Σχήμα 5



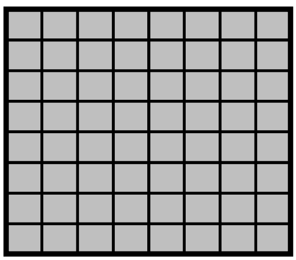
6^2 τετράγωνα 3x3

Σχήμα 6



7^2 τετράγωνα 2x2

Σχήμα 7



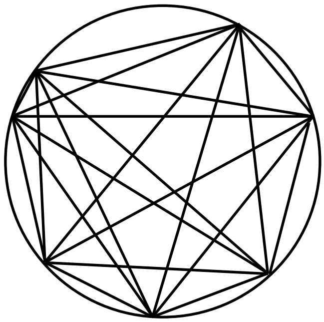
8^2 τετράγωνα 1x1

Σχήμα 8

"Μπορείς να κάνεις πρόσθεση"; ρώτησε η Λευκή Βασίλισσα. *"Πόσο κάνει ένα κι ένα κι ένα κι ένα κι ένα κι ένα κι ένα κι ένα κι ένα κι ένα;"*
"Δεν ξέρω", είπε η Αλίκη. *"Έχασα το μέτρημα".*
Λιούις Κάρολ (Through the Looking-Glass)

86.Παίρνουμε ν σημεία σε κύκλο,τα ενώνουμε με ευθύγραμμα τμήματα (χορδές) ανά δυο, έστω ότι δεν υπάρχει τριάδα χορδών που να τέμνονται στο ίδιο σημείο.(Δείτε το σχήμα για 7 σημεία).Ποιο είναι το πλήθος των τριγώνων που ορίζονται από τις χορδές και οι κορυφές τους βρίσκονται στο εσωτερικό του κύκλου;

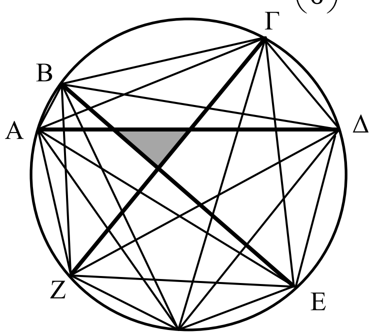
(L.Moser ,Mathematical Monthly, 1953)



ν=7

Λύση

Κάθε εξάδα σημείων στον κύκλο αντιστοιχίζεται με μια 1-1 αντιστοιχία με ένα τρίγωνο στο εσωτερικό του κύκλου με τις κορυφές του να βρίσκονται στο εσωτερικό του κύκλου.Άρα ,για να βρούμε το πλήθος των τριγώνων αρκεί να βρούμε τους συνδυασμούς των ν σημείων ανά 6 συνεπώς έχουμε $\binom{\nu}{6}$ τρίγωνα.



Για παράδειγμα όταν ν=7, το γκρι τρίγωνο είναι ένα από τα ζητούμενα και ορίζεται από τα σημεία Α,Β,Γ,Δ,Ε,Ζ

■

«Στο συγκεκριμένο παράδειγμα, για μια ακόμη φορά αναδεικνύεται η αποδεικτική ισχύς της 1-1 αντιστοιχίας. Δεν μπορώ να απαριθμήσω τα στοιχεία ενός συνόλου ,το κάνω για ένα ισοδύναμο...»

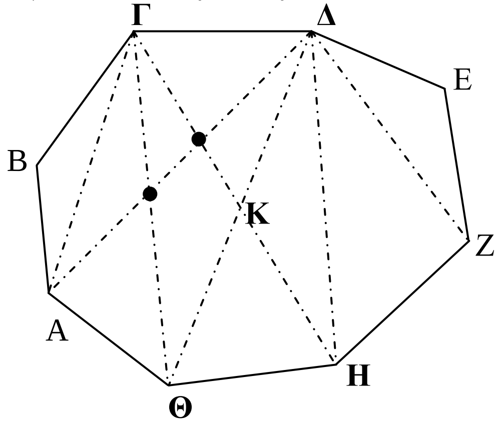
Είπε ο Πινγκ Πονγκ και συνέχισε να τρώει μπανάνες!



87.Δίνεται κυρτό οκτάγωνο τέτοιο ώστε δεν υπάρχουν τρεις ή περισσότερες διαγώνιες διερχόμενες από το ίδιο σημείο.
i.Να βρείτε το πλήθος των σημείων πους τέμνονται οι διαγώνιοι του στο εσωτερικό του 8-γωνου.
ii.Να βρείτε το συνολικό πλήθος των τμημάτων στα οποία χωρίζονται οι διαγώνιες από τα σημεία τομής τους.

Λύση

i. Αρχικά, θα παρατηρήσουμε ότι δεν ανήκει πάντα το σημείο τομής δυο διαγωνίων στο εσωτερικό του οκταγώνου,στο σχήμα 1 οι διαγώνιες ΓΘ και ΔΗ τέμνονται στο εξωτερικό του οκταγώνου.Κάθε σημείο τομής δυο διαγώνιων που βρίσκεται στο εσωτερικό του οκταγώνου είναι ταυτόχρονα και το σημείο τομής του τετραπλεύρου που ορίζεται από τις διαγώνιες.Δείτε στο σχήμα το σημείο τομής Κ που είναι το σημείο τομής των διαγωνίων του τετραπλεύρου ΓΔΗΘ.



Σχήμα 1



Αντίστροφα κάθε τετράπλευρο που ορίζεται από κορυφές του οκταγώνου έχει ως σημείο τομής των διαγωνίων του ένα σημείο τομής δυο διαγωνίων του οκταγώνου στο εσωτερικό του. Άρα, για να βρούμε το ζητούμενο πλήθος αρκεί να βρούμε το πλήθος των τετράπλευρων που ορίζονται από κορυφές του οκταγώνου.

Είναι $\binom{8}{4} = \frac{8!}{4!4!} = \frac{5\cdot6\cdot7\cdot8}{1\cdot2\cdot3\cdot4} = 70$ σημεία τομής.

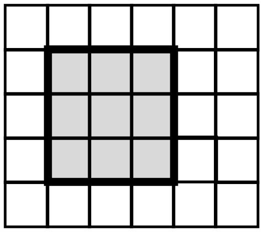
ii.Κάθε κορυφή του οκταγώνου ενώνεται με διαγώνιο με 5 άλλες κορυφές άρα έχουμε $8\cdot5 = 40$ διαγώνιες, όμως όλες στους είναι διπλομετρημένες συνεπώς οι διαγώνιες είναι $\frac{8\cdot5}{2} = 20$.

Καθεμία διαγώνιος που την τέμνουν σε κ σημεία άλλες διαγώνιοι του οκταγώνου την χωρίζουν σε κ+1 τμήματα. Τα κ σημεία χωρίζουν την διαγώνιο σε κ+1 τμήματα. Δείτε στο σχήμα 1 για την διαγώνιο ΑΔ το κ=2 και την χωρίζει σε 3 τμήματα. Αν θεωρήσουμε για κάθε διαγώνιο $κ_1,κ_2,..,κ_{20}$ τα σημεία που τις τέμνουν οι άλλες διαγώνιες ,αυτά τις χωρίζουν συνολικά σε $N=(κ_1+1)+(κ_2+1)+\ldots+(κ_{20}+1)= (κ_1+κ_2+...+κ_{20})+20$ τμήματα. Αλλά γνωρίζουμε από το ερώτημα (i) ότι έχουμε 70 εσωτερικά σημεία και το καθένα ανήκει σε δυο διαγώνιες άρα $κ_1+κ_2+...+κ_{20}=140$,τελικα $N=140+20=160$ τμήματα. ■

88.Πόσα ορθογώνια παραλληλόγραμμα υπάρχουν σε ένα ορθογώνιο πλέγμα 5x6;
(Ένα ορθογώνιο είναι ένα υποσύνολο των κελιών (τετραγώνων) του πλέγματος που έχει σχήμα ορθογωνίου.Δύο ορθογώνια θεωρούνται διαφορετικά αν είναι διαφορετικά ως σύνολα κελιών.)

Λύση

Το ερώτημα είναι πως θα οργανώσουμε την απαρίθμηση των ορθογωνίων σε σχέση με τις οριζόντιες και τις κατακόρυφες γραμμές του πλέγματος.



Κάθε ορθογώνιο του σχήματος ορίζεται μονοσήμαντα από Δυο οριζόντιες και δυο κατακόρυφες πλευρές του πλέγματος. Αντίστροφα, οποιαδήποτε επιλογή δυο οριζοντίων και δυο κατακόρυφων γραμμών στο πλέγμα ορίζει ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο. Υπάρχει δηλαδή μια 1-1 αντιστοιχία που αντιστοιχίζει κάθε ορθογώνιο παραλληλόγραμμο με μια επιλογή δυο οριζοντίων γραμμών (από τις 6 οριζόντιες) και δυο κατακόρυφων γραμμών (από τις 7 κατακόρυφες). Άρα το πλήθος των επιλογών από την πολλαπλασιαστική αρχή είναι $\binom{6}{2}\cdot\binom{7}{2}$ ■

89.Δίνεται ένα κανονικό πολύγωνο (ένα πολύγωνο με όλες τις πλευρές και όλες τις γωνίες ίσες) με $\nu \geq 6$ κορυφές. Να βρείτε το πλήθος των τριγώνων των οποίων οι κορυφές τους είναι κορυφές του πολυγώνου και οι πλευρές τους είναι διαγώνιοι (αλλά όχι πλευρές) του πολυγώνου.

Λύση

Υπάρχουν $\binom{\nu}{3}$ τρίγωνα των οποίων οι κορυφές τους είναι κορυφές του πολυγώνου.

Από αυτά τα ν(ν-4) τρίγωνα έχουν ακριβώς μια κοινή πλευρά με το πολύγωνο, ενώ άλλα ν έχουν ακριβώς δυο κοινές πλευρές με το πολύγωνο.

Άρα τελικά έχουμε:

$$\binom{\nu}{3}-\nu(\nu-4)-\nu=\frac{\nu!}{3!(\nu-3)!}-\nu(\nu-4+1)=\frac{(\nu-2)(\nu-1)\nu}{6}-\nu(\nu-3)=$$

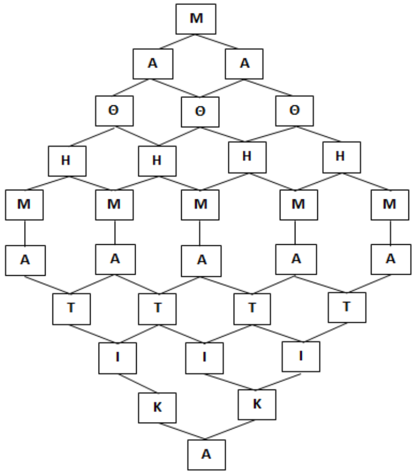
$$\frac{(\nu-2)(\nu-1)\nu-6\nu(\nu-3)}{6}==\frac{\nu(\nu^2-3\nu+2-6\nu+18)}{6}=\frac{\nu(\nu^2-9\nu+20)}{6}=\frac{\nu(\nu-4)(\nu-5)}{6}$$ ■



Τα προβλήματα 81 έως 88 εμπλέκουν τεχνικές μέτρησης και Ευκλείδεια γεωμετρία και ανήκουν σε ένα μέρος της συνδυαστικής που ονομάζεται συνδυαστική γεωμετρία .Η συνδυαστική γεωμετρία εκτός από προβλήματα απαρίθμησης αφορά χρωματισμούς,καλύψεις,πολυόμινα.Θα έχουμε την ευκαιρία να τα δούμε στις επόμενες σελιδες του βιβλίου.

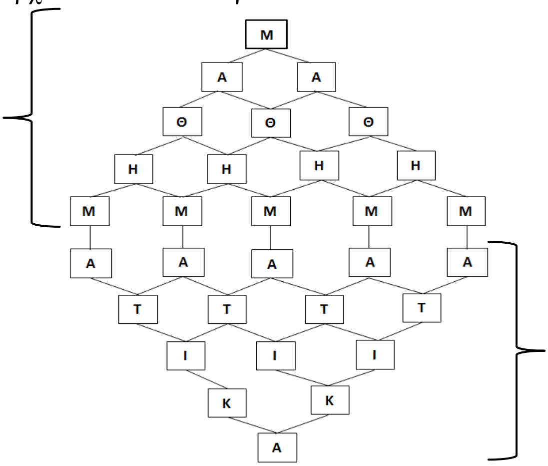
90. Με πόσους τρόπους μπορείτε να διαβάσετε την λέξη ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ στο παρακάτω σχήμα; *(Πάντα κινούμαστε από πάνω προς τα κάτω και μόνο μέσω των ευθύγραμμων τμημάτων που συνδέουν τα γράμματα)*



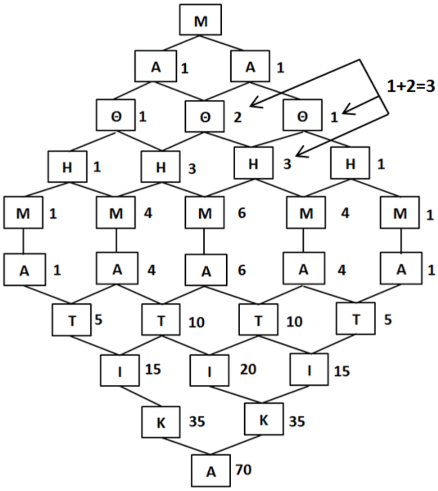


Από δυο μαθητές δοθήκαν οι εξής λύσεις:

● Ο μαθητής Α έκανε την απαρίθμηση των τρόπων σε δυο φάσεις. Χώρισε το σχήμα σε δυο τριγωνικά μέρη, το άνω τριγωνικό μέρος μέχρι το γράμμα Μ. Με αφετηρία το Μ καταμέτρησε μονοπάτια: 2ΜΑ,4ΜΑΘ,8ΜΑΘΗ,16ΜΑΘΗΜ.Κατόπιν ασχολήθηκε με το κάτω τριγωνικό μέρος με αφετηρία το κάτω γράμμα Μ κινήθηκε αντίστροφα και μέτρησε 16 ΑΤΙΚΑ μονοπάτια. Οπότε συμπέρανε με χρήση της βασικής αρχής απαρίθμησης υπάρχουν 16x16=256 τρόποι.



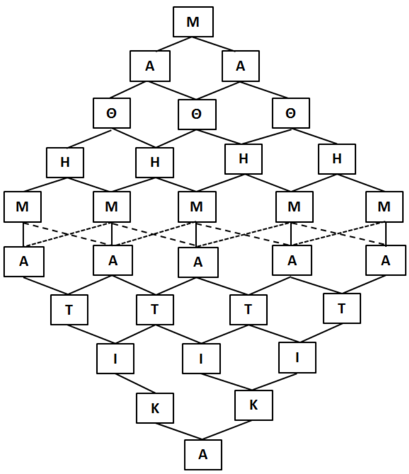
● Ο μαθητής Β υπολόγισε για κάθε γράμμα το πλήθος των μονοπατιών που οδηγούν σε αυτό, η αλήθεια είναι ότι δεν δυσκολεύτηκε λόγω της συμμετρίας που παρουσιάζει το σχήμα ,δηλ το πλήθος των μονοπατιών για κάθε γράμμα δίνεται από το άθροισμα των μονοπατιών στα δυο γράμματα ένα επίπεδο πάνω που οδηγούν σε αυτό. Για παράδειγμα, στο σχήμα οι διαδρομές που οδηγούν στο γράμμα Η δίνονται από το ά-θροισμα των διάδρομων των δυο γράμματα Θ.Έτσι υπολόγισε 70 διαφορετικές διαδρομές.



Η μια από τις δυο λύσεις είναι λανθασμένη.Βρείτε ποια είναι η λανθασμένη και αιτιολογήστε.

Απάντηση

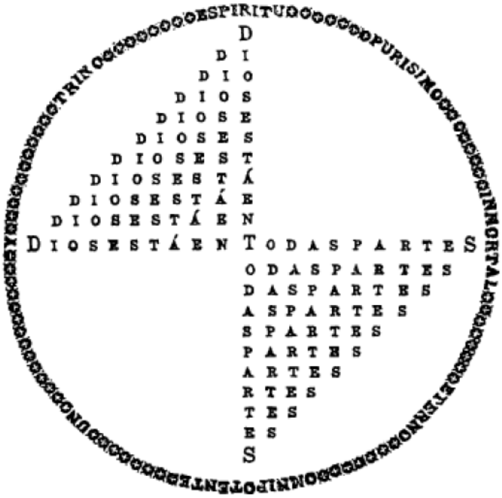
Ο μαθητής Α με την χρήση της βασικής αρχής απαρίθμησης έχει υπολογίσει επιπλέον διαδρομές, τις διαδρομές που προκύπτουν αν ενώσουμε κάθε γράμμα Μ της 5ης γραμμής με κάθε γράμμα Α της 6ης γραμμής (σχήμα)





91.Ο Λαβύρινθος του Κομέγιας

Στο βιβλίο *«Έννοιες της προσωδίας τέχνη και εφαρμογές της στην μετρική τέχνη»*, του Βαρθολομαίου Κομέγιας,που δημοσιεύτηκε στην Πάλμα Ντε Μαγιόρκα το 1876, προτείνεται στην ενότητα *Λαβύρινθοι*,το ακόλουθο παράδειγμα:Ξεκινώντας από το D και τελειώνοντας στο S (κινούμενοι μόνο κάτω και δεξιά όχι κατά ανάγκη με αυτήν την σειρά) με πόσους τρόπους μπορεί να διαβαστεί η πρόταση *«Dio est en todas partes» (Ο θεός είναι παντού)*.



Λύση

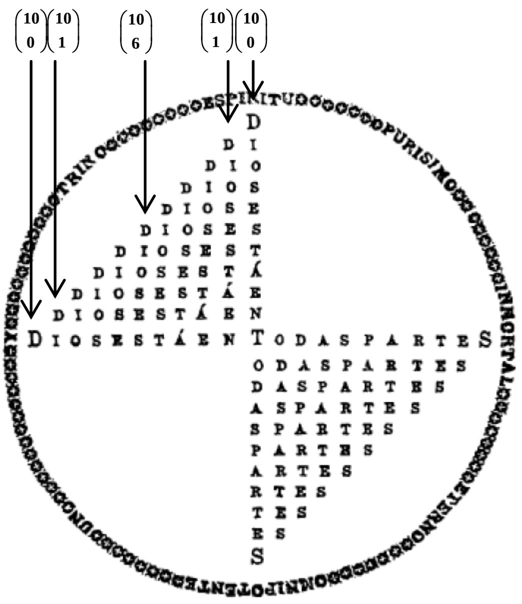
Ο Κομέγιας δίνει την απάντηση:1048576 φορές.Πως το υπολογίζουμε;

Δίνουμε στα γράμματα D αύξοντα αριθμό 1,2,3….,11.

Χωρίζουμε την διαδικασία σε δυο φάσεις:

Φαση1^{η} :Διαδρομές από τα γράμματα D πάνω αριστερά μέχρι το μεσαίο T.Αν ξεκινάμε από το $1^{ο}$ γράμμα D, για να φτάσουμε στο κεντρικό T, μπορούμε να το κάνουμε με 1 μόνο τρόπο.

Αν ξεκινήσουμε από το $2^{ο}$ τότε για να καταλήξουμε στο T απαιτούνται -με κίνηση δεξιά και κάτω- 10 κινήσεις άρα συμφώνα με την προηγούμενη άσκηση υπάρχουν $\binom{10}{1}$ διαφορετικές διαδρομές.



Για το $3^{ο}$ γράμμα D υπάρχουν $\binom{10}{2}$ διαφορετικές διαδρομές.

Για το $4^{ο}$ γράμμα D υπάρχουν $\binom{10}{3}$ διαφορετικές διαδρομές.

………………

Για το $10^{ο}$ γράμμα D υπάρχουν $\binom{10}{1}$ διαφορετικές διαδρομές.

Για το $11^{ο}$ γράμμα D υπάρχει μόνο 1 τρόπος.

Άρα στο κεντρικό γράμμα Τ φτάνουμε
με:

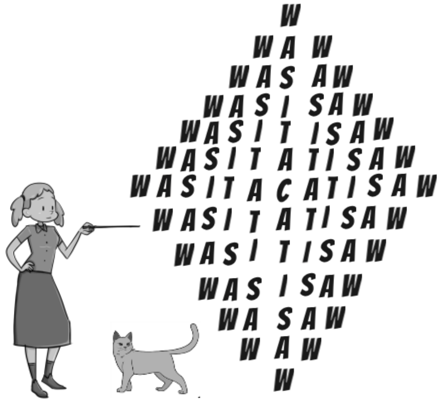
$$\binom{10}{0}+\binom{10}{1}+\binom{10}{2}+\binom{10}{3}+\binom{10}{4}+\binom{10}{5}+\binom{10}{6}+\binom{10}{5}+\binom{10}{4}+\binom{10}{3}+\binom{10}{2}+\binom{10}{1}+\binom{10}{0}=$$

$=2^{10}=1024$ τρόπους.
$2^{η}$ φάση: Από το γράμμα Τ μέχρι τα τελικά γράμματα S έχουμε το το ίδιο πλήθος διαδρομών.
Με τόσους ακριβώς τρόπους φτάνουμε και από το κεντρικό Τ σε ένα τελικό S.
Επομένως,οι ζητούμενοι τρόποι είναι συνολικά $(2^{10})^2=2^{20}=1048576$ ■

Ο Πινγκ Πονγκ κάνει αναδρομές….
Μια κομψή και σύντομη λυση για το πρόβλημα προκύπτει σαν λαγός απ ‘ το καπέλο αν σκεφτούμε αντίστροφα (Working backwards).Χωρίζουμε την πρόταση σε δυο τμήματα με κοινό γράμμα το Τ.
Πρώτο τμήμα: «DIOESTENT»
Δεύτερο τμήμα: «TODAS PARTES»
Το πρώτο τμήμα σχηματίζεται από διαδρομές στο άνω αριστερό τριγωνικό μέρος των γραμμάτων και το δεύτερο από διαδρομές στο κάτω δεξιά τριγωνικό μέρος των γραμμάτων.Οι διαδρομές έχουν κατεύθυνση μόνο προς τα κάτω ή δεξιά. Το πρώτο τμήμα της πρότασης (DIOESTENT) καταλήγει στο γράμμα Τ, κινούμαστε αντίστροφα γράμμα προς γράμμα προς τα αριστερά ή πάνω μέχρι να ολοκληρωθεί το πρώτο τμήμα της πρότασης.Σε κάθε κίνηση «πίσω» ενός γράμματος έχουμε 2 επιλογές (πάνω ή αριστερά) ,η διαδρομή συνίσταται από 10 γράμματα άρα έχουμε 2^{10} πιθανά μονοπάτια, αλλά τόσα για το δεύτερο τμήμα της πρότασης (TODAS PARTES) από την πολλαπλασιαστική αρχή έχουμε 2^{20} πιθανά μονοπάτια.
Η προσέγγιση του Πινγκ Πονγκ λειτούργει ανάποδα.Θεωρούμε το επιθυμητό αποτέλεσμα και γυρίζουμε πίσω γράμμα-γράμμα μέχρι να σχηματιστεί η επιθυμητή φράση. Προφανώς μια κομψότερη λύση από την προηγούμενη.
Ο Πινγκ Πονγκ δεν ανακάλυψε τον τροχό ,η «αντίστροφη στρατηγική» (working backwards) δεν είναι κάτι νέο. Εξετάστηκε από τον Πάππο τον Αλεξανδρινό γύρω στο 330 μ.Χ. Στο $7^{ο}$ βιβλίο από το έργο του *Συναγωγή* υπάρχει μια αρκετά αναπτυγμένη περιγραφή των μεθόδων της «ανάλυσης» και της «σύνθεσης».



92. Στη Χώρα των Θαυμάτων, η Αλίκη,βλέποντας το γάτο του Τσεσάιρ να εξαφανίζεται αφήνοντας μόνο το χαμόγελό του,αναρωτήθηκε τι ακριβώς είδε,και έγραψε το ερώτημά της (δείτε την εικόνα), γιατί οι κάτοικοι της χώρας των Θαυμάτων διαβάζουν προς οποιαδήποτε κατεύθυνση.



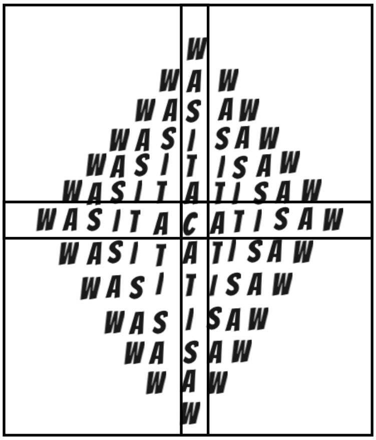
Το πρόβλημα έχει ως εξής:

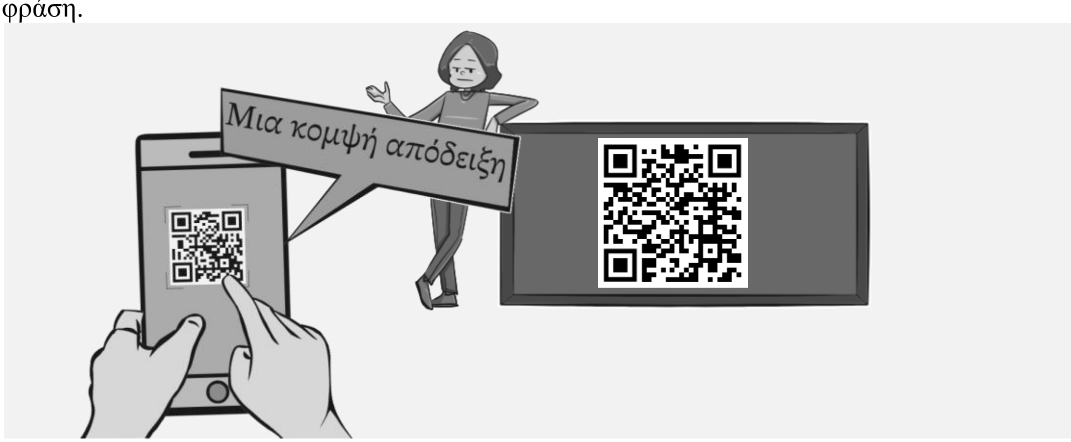
Με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορεί κανείς να διαβάσει την ερώτηση της Αλίκης «WAS IT A CAT I SAW», αρχίζοντας από οποιοδήποτε γράμμα W , ακολουθώντας τα γειτονικά γράμματα μέχρι το C και συνεχίζοντας τη φράση τελειώνοντας σε οποιοδήποτε γράμμα W.Μπορεί να κινηθεί πάνω-κάτω,αριστερά και δεξιά.

(Sam Loyd)

Λύση

Παρατηρούμε ότι κάθε διαδρομή από γράμμα W καταλήγει στο κεντρικό γράμμα C (μισή φράση). Θα μετρήσουμε τις μισές φράσεις και από την πολλαπλασιαστική αρχή θα βρούμε το ζητούμενο πλήθος. Εργαζόμαστε αντίστροφα.Θεωρούμε λοιπόν το αριστερό πάνω τριγωνικό μέρος του σχήματος συμπεριλαμβανομένης της κεντρικής στήλης. Ξεκινώντας λοιπόν από το γράμμα C μπορούμε να γυρίσουμε πίσω γράμμα–γράμμα σε γράμμα W έχοντας κάθε φορά 2 επιλογές άρα συνολικά έχουμε 2^6 επιλογές. Το ίδιο μπορούμε να κάνουμε και στο δεξιό και στα κάτω τριγωνικά μέρη άρα έχουμε συνολικά $4*2^6$ μονοπάτια από το κεντρικό C προς τα γράμματα W,αφαιρούμε τα 2 οριζόντια και τα 2 κατακόρυφα μονοπάτια που έχουν διπλομετρηθεί έτσι έχουμε $4*2^6-4$.Ομως έχουμε μετρήσει μονοπάτια μισής φράσης υπάρχουν άλλα τόσα για την υπόλοιπη μισή φράση και από την πολλαπλασιαστική αρχή προκύπτουν: $(4*2^6-4)*(4*2^6-4)=63504$ τρόποι να διαβαστεί η φράση.





Τα 5+1 άπιαστα όνειρα της Κυριακής

Μια λαχειοφόρος αγορά είναι ένας φόρος σε όλους τους ανόητους της δημιουργίας.Και, δόξα στον ουρανό,επιβάλλεται με ευκολία:η ευπιστία είναι πάντα στην μόδα.

Χένρυ Φίλντινγκ (1707-1754)

Το δημοφιλές παιχνίδι Τζόκερ μοιράζει εκατομμύρια ευρώ και προσφέρει την ευτυχία. Είναι έτσι;Επιλέγουμε έναν αριθμό από 20 (1,2,..,20).Επιλέγουμε 5 αριθμούς από 45 (1,2,…,45)

Προκύπτουν:

$$20\binom{45}{5}=20\frac{45!}{5!(45-5)!}=20\frac{45!}{5!40!}=20\frac{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot 45}{(1\cdot 2\cdot ..5)(1\cdot 2\cdot\ldots\cdot 40)}=$$

$$=20\frac{41\cdot 42\cdot 43\cdot\ldots\cdot 45}{1\cdot 2\cdot ..5}=20\frac{146611080}{120}=24435180$$

διαφορετικά αποτελέσματα,αν παίξουμε μια στήλη των 50 λεπτών,η πιθανότητα να κληρωθεί η δική

μας επιλογή είναι: $\frac{1}{24435180}=0.000000040924\approx 0$

Άρα πρακτικά, είτε παίξεις είτε δεν παίξεις έχεις τις ίδιες πιθανότητες να κερδίσεις.Αν βέβαια κάποιος είναι αρκετά γαλαντόμος και μερακλής και θέλει να το σιγουρέψει, τότε θα πρέπει να παίξει όλες τις δυνατές στήλες,θα πληρώσει στο πρακτορείο της γειτονιάς του 24435180*0.5= 12217590 ευρώ.
Αν όλοι οι Αυστραλοί –η Αυστραλία έχει λίγο περισσότερα από 23 εκατομμύρια κάτοικους έπαιζαν μια διαφορετική στήλη στο Τζόκερ πάλι θα ήταν αμφίβολο αν κάποιος θα κληρωνόταν.



3.Ασκήσεις,προβλήματα(Συνδυασμοί, συνδυασμοί με επανάληψη,αρχή της διπλής μέτρησης)

Α64. Σε ένα τηλεπαιχνίδι, για να κερδίσει ο Μήτσος πρέπει να απαντήσει σε 5 από τις 8 ερωτήσεις που θα του τεθούν.Με πόσους τρόπους μπορεί να επιτύχει το στόχο του;

Α65.Σε ένα τουρνουά σκακιού παίρνουν μέρος 30 παίκτες.Κάθε παίκτης πρέπει να παίζει μόνο μια φορά με κάθε άλλον. Πόσοι αγώνες θα γίνουν;

Α66.Με πόσους τρόπους 12 άνθρωποι μπορούν να χωριστούν σε δυο ομάδες μια των 8 και μια των 4;

Α67.Ένα κουτί περιέχει 3 άσπρες ,6 μαύρες και 30 κόκκινες σφαίρες ,οι οποίες είναι όλες αριθμημένες με διαφορετική αρίθμηση.

i.Με πόσους τρόπους μπορούμε να επιλέξουμε τυχαία μια άσπρη, δυο μαύρες και δέκα κόκκινες σφαίρες;

ii.Με πόσους τρόπους μπορούμε να κάνουμε τις ίδιες επιλογές ,άμα πρέπει να έχουμε επιλέξει μια συγκεκριμένη άσπρη σφαίρα, μια συγκεκριμένη μαύρη σφαίρα και δυο συγκεκριμένες κόκκινε; σφαίρες;

Α68.Σε μια βιοτεχνία εργάζονται 6 άντρες και 5 γυναίκες.Μια ομάδα εργαζομένων της βιοτεχνίας θα πάρει μέρος σε ένα σεμινάριο.Με πόσους τρόπους μπορεί να επιλεγεί η ο-μάδα αν αποτελείται από:

i. 4 άντρες και 2 γυναίκες, ii. 2 άντρες και 1 γυναικά, iii. 4 άνδρες

Α69.Στην βιοτεχνία της προηγούμενης άσκησης εξακολουθούν να εργάζονται 6 άν-δρες και 5 γυναίκες. Μια τετραμελής ομάδα εργαζομένων θα πάρει αδεία. Με πόσους τρόπους μπορεί να επιλεγεί η ομάδα αν αποτελείται από,

i. 3 τουλάχιστον άντρες,

ii. το πολύ μια γυναίκα,

iii. εκπρόσωπους και των δυο φύλων,

iv. το μεγαλύτερο σε χρόνια προϋπηρεσίας άνδρα ή την μεγαλύτερη σε χρόνια προϋ-πηρεσίας γυναίκα (ή και τους δυο)

Θεωρούμε ότι τα χρόνια προϋπηρεσίας των 11 εργαζομένων είναι διαφορετικοί αριθμοί.

Α70.Σε μια δραματική σχόλη αποφοιτούν 15 ηθοποιοί εκ των οποίων οι 11 γνωρίζουν χορό.Με πόσους τρόπους μπορούμε να επιλέξουμε 5 ηθοποιούς από τους 15 για να συμμετάσχουν σε ένα θίασο:

i. χωρίς κανένα περιορισμό,

ii. και οι 5 να γνωρίζουν χορό,

iii 2 ακριβώς ηθοποιοί να μην γνωρίζουν χορό,

iv. 4 τουλάχιστον ηθοποιοί να γνωρίζουν χορό.

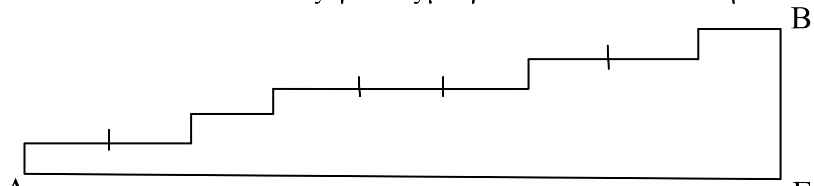
Α71.Ο Μήτσος διαθέτει ζαχαροπλαστείο και πουλάει χωνάκι παγωτό έξω από το γή-πεδο, το κατάστημα του διαθέτει 20 διαφορετικές γεύσεις και το γήπεδο χωρητικότητα 15000 θεατών. Τον ρώτησαν πόσα διαφορετικά χωνάκια παγωτό με πέντε διαφορετι-κές γεύσεις μπορεί να φτιάξει; Αυτός απάντησε, ότι θα μπορούσε στον αγώνα της Κυ-ριακής στο γεμάτο από φιλάθλους γήπεδο να δώσει από ένα διαφορετικό παγωτό σε κάθε φίλαθλο. Έχει δίκιο;

Α72.Ο Μήτσος διαθέτει 4 σταθμά με βάρη 1 g, 2g, 4 g, 8 g. Να βρείτε το πλήθος όλων των διαφορετικών βαρών που μπορεί να σχηματίσει χρησιμοποιώντας (ένα τουλάχι-στον) τα πιο πάνω σταθμά.

Α73.Δίνονται δυο παράλληλες ευθείες $\varepsilon_1,\varepsilon_2$.Στην ε_1 παίρνουμε 6 σημεία και η ε_2 10 σημεία. Πόσα τρίγωνα υπάρχουν με τις κορυφές τους στα δοθέντα σημεία;

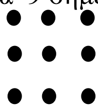
Α74.Εξι παράλληλες ευθείες τέμνονται από επτά παράλληλες ευθείες.Πόσα παραλληλόγραμμα σχηματίζονται;

Α75.Ένας ξυλουργός πρέπει να κατασκευάσει μια σκάλα η οποία θα ενώνει τα σημεία Α και Β (σχήμα 1). Η απόσταση ΑΓ είναι 4,5 μέτρα, το ύψος της σκάλας από το Γ στο Β είναι 1,5 μέτρα. Κάθε σκαλί έχει ύψος 30 cm και το μήκος του είναι ακέραιο πολλαπλάσιο των 50 cm.Με πόσους τρόπους μπορεί να κατασκευαστεί η σκάλα;



Σχήμα 1

Α76.Εννέα σημεία στο επίπεδο σχηματίζουν ένα τετράγωνο (σχήμα). Πόσα τρίγωνα σχηματίζονται με κορυφές 3 από τα 9 σημεία.



Α77.Έστω τρίγωνο ΑΒΓ και πάνω στις πλευρές του παίρνουμε 20 σημεία στην μια,30 σημεία στην άλλη και 50 σημεία στην τρίτη (όλα διαφορετικά μεταξύ τους). Να βρείτε πόσα τρίγωνα υπάρχουν με κορυφές αυτά τα σημεία.

Α78.Στο εσωτερικό κάθε μίας από τις πλευρές τετραγώνου θεωρούμε ν διαφορετικά μεταξύ τους σημεία. Να βρεθεί το πλήθος όλων των τριγώνων που έχουν κορυφές τα σημεία αυτά.

Α79. Να βρείτε των αριθμό των ορθογωνίων σε μια σκακιέρα .*(Ένα ορθογώνιο είναι ένα υποσύνολο των κελιών (τετραγώνων) της σκακιέρας που έχει σχήμα ορθογωνίου. Δύο ορθογώνια θεωρούνται διαφορετικά αν είναι διαφορετικά ως σύνολα κελιών.)*

Α80.Στο τυχερό παιχνίδι ΛΟΤΤΟ, ο παίκτης επιλέγει 6 αριθμούς από τους αριθμούς 1,2,3,…,48,49 κατόπιν γίνεται κλήρωση , προκύπτει μια τυχερή εξάδα και όσο περισσοτέρους αριθμούς έχει μαντέψει τότε ενδεχομένως κερδίζει χρήματα .

i.Με πόσους τρόπους μπορεί να έχει μαντέψει σωστά 4 από τα 6 νούμερα;

ii. Με πόσους τρόπους μπορεί σε δυο διαδοχικές κληρώσεις να επαναληφτεί τουλάχιστον ένας αριθμός;

Α81. Σε μια εταιρεία διανομής δεμάτων εργάζονται 10 υπάλληλοι.Από αυτούς 5 υπάλληλοι μεταφέρουν δεματα,3 υπάλληλοι εργάζονται στην μηχανογράφηση και 2 στο τηλεφωνικό κέντρο.

i.Με πόσους τρόπους μπορούν να σχηματιστούν οι τρεις ομάδες;

ii. Αν ένας υπάλληλος έχει ορθοπεδικό πρόβλημα και δεν μπορεί να εργαστεί στην μεταφορά δεμάτων, με πόσους τρόπους μπορούν να σχηματιστούν οι τρεις ομάδες;

Α82.Μεταξύ των αριθμών 6000 και 9000 πόσοι έχουν ψηφία διαφορετικά μεταξύ τους και διατεταγμένα κατά φθίνουσα σειρά;

Α83. Να βρείτε το πλήθος των θετικών πενταψηφίων ακεραίων αριθμών που τα ψηφία τους είναι κατά αύξουσα σειρά και δεν είναι απαραίτητα διαφορετικά μεταξύ τους.

Α84. i. Με πόσους τρόπους μπορεί μια ομάδα 10 παικτών ποδόσφαιρου να χωριστεί σε δυο ομάδες των 5 ατόμων;

ii. Με πόσους τρόπους μπορεί μια ομάδα 10 παικτών ποδόσφαιρου να χωριστεί σε δυο ομάδες των 5 ατόμων η μια από τις οποίες θα κάνει προπόνηση και η άλλη θα ξεκουραστεί.

Α85. Από μια ομάδα 5 φίλων: Α,Β,Γ,Δ,Ε πόσοι τρόποι υπάρχουν ώστε:

i. Οι Α,Β,Γ να έχουν γεννηθεί την ίδια ημερομηνία.

ii. Τα 3 άτομα να έχουν γεννηθεί τη ίδια ημερομηνία,ενώ τα άλλα δυο σε 2 άλλες ,και διαφορετικές μεταξύ τους ημερομηνίες;

Α86. Σε επτά εκλογικά τμήματα (Α,Β,Γ,Δ,Ε,Ζ) το κόμμα SOKON πήρε συνολικά δέκα ψήφους.

Να βρείτε με πόσους τρόπους,

i. μπορούν να δοθούν οι 10 ψήφοι στα 7 εκλογικά τμήματα.

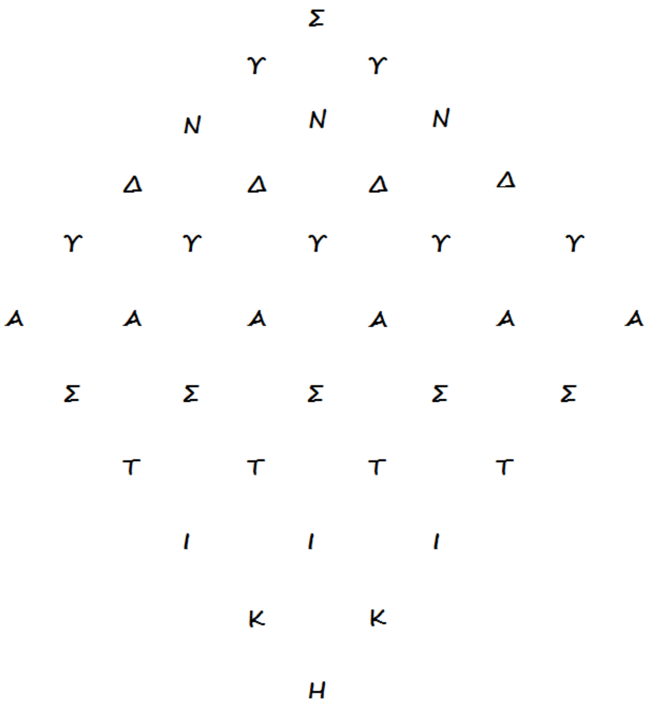
ii. στο Β εκλογικό τμήμα υπάρχουν ακριβώς 2 ψήφοι του κόμματος SOKON.

iii. το κόμμα SOKON πήρε μια τουλάχιστον ψήφο σε κάθε εκλογικό τμήμα.

iv. στα εκλογικά τμήματα Α,Γ,Δ,Ζ να μην υπάρχουν ψήφοι του κόμματος SOKON.

v. σε ακριβώς 4 εκλογικά τμήματα να μην υπάρχουν ψήφοι του κόμματος SOKON.

Α87. Με πόσους τρόπους μπορείτε να διαβάσετε την λέξη ΣΥΝΔΥΑΣΤΙΚΗ στο παρακάτω σχήμα;



Α88.Ο Παπαδόπουλος καθηγητής μαθηματικών έλαβε μέρος σε ένα τηλεπαιχνίδι «*Έλα να τα τσακώσεις*» . Στο συγκεκριμένο τηλεπαιχνίδι πρέπει να απαντά στις ερωτήσεις που τίθενται στον ελάχιστο χρόνο για να πάρει όσο το δυνατό περισσοτέρους βαθμούς. Ρωτήθηκε λοιπόν:
«Με πόσους τρόπους- διαδρομές στο ακόλουθο σχήμα κινούμενοι από πάνω προς τα κάτω σχηματίζεται η λέξη ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΣ;»

Μ
Μ Α Μ
Μ Α Θ Α Μ
Μ Α Θ Η Θ Α Μ
Μ Α Θ Η Μ Η Θ Α Μ
Μ Α Θ Η Μ Α Μ Η Θ Α Μ
Μ Α Θ Η Μ Α Τ Α Μ Η Θ Α Μ
Μ Α Θ Η Μ Α Τ Ι Τ Α Μ Η Θ Α Μ
Μ Α Θ Η Μ Α Τ Ι Κ Ι Τ Α Μ Η Θ Α Μ
Μ Α Θ Η Μ Α Τ Ι Κ Ο Κ Ι Τ Α Μ Η Θ Α Μ
Μ Α Θ Η Μ Α Τ Ι Κ Ο Σ Ο Κ Ι Τ Α Μ Η Θ Α Μ

Μπορείτε να βοηθήσετε τον Παπαδόπουλο να βρει το πλήθος των διαδρομών με το ελάχιστο πλήθος υπολογισμών;
Α89.Ποσες λέξεις των 5 γραμμάτων μπορούμε να σχηματίσουμε με 3 σύμφωνα και 2 φωνήεντα από τα γράμματα κ,λ,μ,ξ,ο,ε,η;
Α90.Να βρείτε πόσες εντεκάδες ποδοσφαιριστών μπορούν να σχηματιστούν από 8 αλλοδαπούς και 9 ημεδαπούς ποδοσφαιριστές αν πρέπει οι ημεδαποί να πλειοψηφούν.
Α91. Μια παρέα από 9 ψαράδες σκοπεύει να πάει για ψάρεμα σε μια λίμνη ,διαθέτουν δυο βάρκες χωρητικότητας 7 και 5 ατόμων. Με πόσους τρόπους μπορούν να επιβιβαστούν στις βάρκες οι 9 ψαράδες;
Α92.Απο μια ομάδα 6 στρατιωτικών που αποτελείται από 3 αξιωματικούς και 3 υπαξιωματικούς επιλέγουμε μια τετράδα.Με πόσους τρόπους μπορεί να γίνει αυτό ,αν πρέπει στην τετράδα να βρίσκονται το πολύ δυο αξιωματικοί;
Α93.Αν ένα σύνολο Α έχει 8 στοιχεία,να βρείτε το πλήθος των υποσυνόλων του Α:
i.με κανένα στοιχείο ii.με 4 στοιχεία ,
iii.με το πολύ 4 στοιχεία. iv.ανεξαρτήτως πλήθους στοιχείων.
Α94.Απο 8 βουλευτές του ελληνικού κοινοβουλίου πρόκειται να σχηματιστεί μια τετραμελής επιτροπή. Από αυτούς τους βουλευτές, δυο ονομάζονται Παπαδόπουλος και Καλοχαιρέτας. Αν συμμετέχει στην επιτροπή ο Παπαδόπουλος θα πρέπει να συμμετέχει και ο Καλοχαιρέτας ενώ αν συμμετέχει ο Καλοχαιρέτας δεν είναι ανάγκη να συμμετέχει ο Παπαδόπουλος.
Με πόσους τρόπους μπορεί να σχηματιστεί η επιτροπή;
Α95.Με πόσους τρόπους μπορεί να εκλεγεί μια πενταμελής επιτροπή από μια ομάδα 10 ατόμων, αν δυο ορισμένα άτομα δεν μπορούν να είναι μαζί στην επιτροπή;
Α96.Σε ένα σχολείο ,τέσσερεις μαθητές της Α τάξης ,έξι μαθητές της Β τάξης και τρεις μαθητές της Γ τάξης είναι υποψήφιοι για τον σχηματισμό μιας τετραμελούς ομάδας. Ο διευθυντής του σχολείου απαίτησε η επιλογή να γίνει έτσι ώστε να εκπροσωπείται κάθε τάξη του σχολείου. Με πόσους τρόπους μπορεί να γίνει αυτό;

A97.Στο τηλεπαιχνίδι *«Πολύ χρήμα!»* ζητήθηκε από την Μαρία να αντιστοιχίσει 4 ηθοποιούς με τις 4 ταινίες που τους ανέδειξαν. Αν η Μαρία απαντήσει στην τύχη ,να βρείτε με πόσους τρόπους μπορεί να αντιστοιχίσει σωστά:

i.μόνο μια ταινία.

ii. μόνο δυο ταινίες.

iii.τουλάχιστον δυο ταινίες.

A98.Επιλέγουμε τυχαία τρεις αριθμούς α,β,γ από τους 1,2,3,…,300 διαφορετικούς μεταξύ τους.

i.Με πόσους τρόπους μπορούμε να επιλέξουμε τους α,β,γ;

ii.Με πόσους τρόπους μπορούμε να επιλέξουμε τους α,β,γ ώστε να είναι α+β+γ πολλαπλάσιο του 3.

Α**99**.Εβδομήντα υπάλληλοι της εταιρείας MPARBAGIORGOS.CORPORATION έχουν ανά δυο διαφορετική ηλικία (σε ακέραιο αριθμό ετών) .Με πόσους τρόπους μπορούμε να τους χωρίσουμε σε δυο ομάδες των 10 και 20 υπάλληλων έτσι ώστε η ηλικία κάθε υπάλληλου της πρώτης ομάδας να είναι μικρότερη από την ηλικία κάθε υπάλληλου της δεύτερης ομάδας;

A100.Δίνονται 20 ευθείες ενός επίπεδου, που τέμνονται ανά 2 σε διαφορετικά σημεία.

i.Πόσα είναι τα σημεία τομής;

ii.Με πόσους τρόπους 4 από αυτά δεν είναι συνευθειακά;

A101.Οι αριθμοί x, y, z είναι θετικοί ακέραιοι και ικανοποιούν την εξίσωση:

$$x + y + z = 2013$$

Να βρειτε το πλήθος των τριάδων (x, y, z) που είναι λύσεις της εξίσωσης .

(Προκριματικός νέων 2012 (Ε.Μ.Ε))

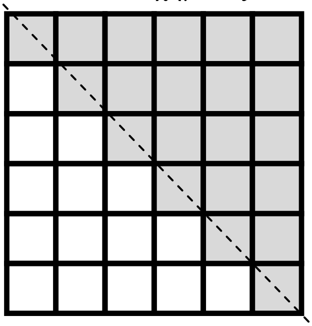
A102.Να αποδείξετε συνδυαστικά ότι $\binom{\mu+\nu}{2} - \binom{\mu}{2} - \binom{\nu}{2} = \mu \cdot \nu$, $\mu, \nu \in \mathbb{N}$

A103.Ένας φύλακας σε μουσείο πρέπει να εργαστεί νυκτερινή βάρδια στο Μουσείο 5 μέρες τον μήνα Ιανουάριο. Ωστόσο, δεν επιτρέπεται να εργαστεί δυο συνεχόμενες μέρες.Με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορεί να επιλέξει τις 5 ημέρες του Ιανουαρίου που θα εργαστεί;

A104.Επιλέγουμε τυχαία τρεις από τις κορυφές του κανονικου 17-γωνου.
Να βρείτε το πλήθος των οξυγωνίων τριγώνων που σχηματίζονται.

A105.Ο Τοτός σε ένα αγώνα μπάσκετ πέτυχε 5 καλάθια. Κάθε καλάθι που έβαλε ήταν δίποντο ή τρίποντο και συγκέντρωσε α πόντους. Πόσες είναι διαφορετικές τιμές του α;

Α106.Με την βοήθεια του ακόλουθου σχήματος να αποδείξετε ότι:



$$1+2+3+4+5+6=\binom{7}{2}$$

Αν έπρεπε να υπολογίσουμε το άθροισμα $1+2+3+....+\nu$ για ένα τετράγωνο που κατασκευάζεται από ν^2 μοναδιαία τετράγωνα ποια θα ήταν η απάντηση;



Η αρχή της περιστεροφωλιάς *(Pigeonhole principle)*

..Τους ζήτησε να πάρουν τον κόκκινο μαρκαδόρο και να γράψουν στο πίνακα μπλε,η τάξη στην αρχή ήταν αμήχανη, πως στην ευχή, μπορείς με ένα κόκκινο μαρκαδόρο να γράψεις μπλε; Πήρε τον μαρκαδόρο και έγραψε στον πίνακα «μπλε»...

Αλι Νταρ Νασάθ, Η σχολική τάξη

Ας υποθέσουμε ότι σας καλούν σε μια κοσμική συγκέντρωση,ένα πάρτι, μια ιδιότυπη συγκέντρωση όπου υπάρχει μια αμοιβαιότητα γνωριμίας ανάμεσα στους καλεσμένους, δηλαδή αν οποιοσδήποτε από τους καλεσμένους γνωρίζει κάποιον άλλον τότε και ο άλλος γνωρίζει αυτόν.(Αν ο Α καλεσμένος είναι γνωστός με τον Β τότε υποχρεωτικά και ο Β είναι γνωστός με τον Α).Πως θα σας φαινόταν αν σας έλεγα ότι τουλάχιστον δυο καλεσμένοι θα έχουν τον ίδιο αριθμό γνωστών στην συγκέντρωση. Εν πρώτοις, φαίνεται παράξενο.Ας το σκεφτούμε λίγο.

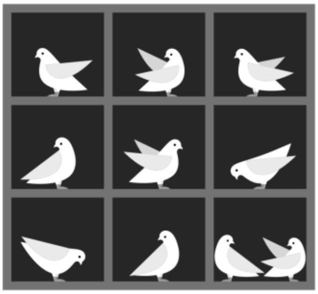
Έστω ότι στο πάρτι υπάρχουν Ν καλεσμένοι. Έστω, επίσης ότι κατασκευάζουμε ταμπελάκια με αρίθμηση 0,1,2,3,4,…..Ν-1 και δίνουμε σε κάθε καλεσμένο ένα ταμπελάκι στον αριθμό του οποίου αντιστοιχίζεται ο αριθμός των γνωστών του. Παρατηρούμε ότι μόνο ένα από τα ταμπελάκια με τους αριθμούς 0 και Ν-1 θα δινόταν σε καλεσμένο γιατί αποκλείεται ένας καλεσμένος να μην έχει γνωστούς και συγχρόνως ένας άλλος να τους γνωρίζει όλους στο πάρτι.Άρα έχουμε Ν-1 ταμπελάκια και Ν καλεσμένους.Προκύπτουν δηλαδή λιγότεροι αριθμοί στα ταμπελάκια από το πλήθος των καλεσμένων,μοιραία λοιπόν δυο καλεσμένοι θα έπαιρναν ταμπελάκια με το ίδιο αριθμό, θα είχαν δηλαδή τον ίδιο αριθμό γνωστών στην συγκέντρωση.

Η ιδέα που κρύβεται πίσω από αυτό το γνωστό πρόβλημα ονομάζεται ***αρχή των θυρίδων του Ντιριχλέ (Dirichlet's Box Principle)*** ή αλλιώς ***αρχή της περιστεροφωλιάς (Pigeonhole principle).***

Η αρχή της περιστεροφωλιάς είναι ένα πολύ ισχυρό εργαλείο το όποιο χρησιμοποιείται στην συνδυαστική ανάλυση.Η βασική ιδέα είναι πολύ απλή και εξηγείται εύκολα.

Ας φανταστούμε 10 περιστέρια τα όποια πρέπει να τοποθετηθούν σε 9 περιστεροφωλιές. Μπορούμε να το κάνουμε; Φυσικά και μπορούμε αλλά είναι προφανές ότι με όποιο τρόπο και αν βάλουμε τα περιστέρια, σίγουρα, σε μια περιστεροφωλιά θα τοποθετήσουμε τουλάχιστον δυο περιστέρια.

Μπορούμε να γενικεύσουμε για πολύ μεγαλύτερους αριθμούς.



Η αρχή της περιστεροφωλιάς διατυπώνεται ως εξής:

Αν ν περιστέρια τοποθετηθούν σε ν-1 περιστεροφωλιές, μια τουλάχιστον περιστεροφωλιά πρέπει να έχει τουλάχιστον δυο περιστέρια.

Ας το προχωρήσουμε λίγο.

Σε μια τάξη υπάρχουν 28 μαθητές.Σε ένα διαγώνισμα Χημείας (!) όλοι οι μαθητές έγραψαν από 3 μέχρι 11.Να αποδείξετε ότι τουλάχιστον 4 μαθητές έγραψαν τον ίδιο βαθμό.

(Οι βαθμολογίες είναι ακέραιοι αριθμοί.)

Λύση

Οι διαφορετικοί βαθμοί που έγραψαν οι μαθητές από 3 μέχρι 11 είναι 11-3+1=9. Θεωρούμε ως φωλιές τις 9 διαφορετικές βαθμολογίες και ως περιστέρια τους 28 μαθητές με τους βαθμούς τους.



Βαθμολογία 3 $1^{η}$ Φωλιά **Βαθμολογία 4 $2^{η}$ Φωλιά** **Βαθμολογία 10 $8^{η}$ Φωλιά** **Βαθμολογία 11 $9^{η}$ Φωλιά**

Παρατηρούμε ότι 28=3*9+1 .Έστω ότι σε καμιά φωλιά δεν μπορούμε να τοποθετήσουμε τους βαθμούς 4 μαθητών τότε θεωρούμε ότι σε κάθε φωλιά μπορούμε να τοποθετήσουμε τους βαθμούς 3 μαθητών(ή και λιγότερων) και τότε θα περισσέψει ένας μαθητής(ή περισσότεροι) και ο βαθμός του(ή βαθμοί τους) θα συμπληρώσει την τετράδα. ∎

(«παρατηρούμε ότι….» η πιο φαιδρή φράση στην ιστορία της μαθηματικής διδασκαλίας ☺ , μόνο όσοι έχουν λύσει πολλά προβλήματα και έχουν αποκτήσει ευχέρεια «παρατηρούν» οι άλλοι..τους το παρατηρούν!)



Ας γενικεύσουμε,το παραπάνω παράδειγμα.

Αν έχουμε κν+1 ή περισσότερα αντικείμενα και πρέπει να κατανεμηθούν σε ν κουτιά, τότε τουλάχιστον ένα από τα κουτιά πρέπει να περιέχει τουλάχιστον κ+1 αντικείμενα.

Αν θεωρήσουμε $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_1,\ldots,\lambda_\nu$ το πλήθος των αντικειμένων στο $1^{ο}$,$2^{ο}$,$3^{ο}$,…,ν-ιοστό κουτί και υποθέσουμε ότι δεν υπάρχει κουτί με κ+1 αντικείμενα τότε θα ισχύει:

$$\lambda_1 \leq \kappa$$
$$\lambda_2 \leq \kappa$$
$$\lambda_3 \leq \kappa$$
$$\vdots$$
$$\lambda_\nu \leq \kappa$$

Προσθέτουμε κατά μέλη: $\lambda_1+\lambda_2+\lambda_1+\ldots+\lambda_\nu \leq \kappa\nu < \kappa\nu+1$,άτοπο.

Έστω ότι έχουμε 15 ανθρώπους,τότε,τουλάχιστον τρεις από αυτούς γεννήθηκαν την ίδια μέρα της εβδομάδας.

Ισχύει ότι $15 = 2 \cdot 7 + 1$.Άρα κατανέμουμε σε 7 μέρες (κουτιά) $2 \cdot 7 + 1$ ανθρώπους (αντικείμενα) τότε σε κάποια μέρα (κουτί) πρέπει να γεννηθήκαν 2+1=3 άνθρωποι.



Άμεσες εφαρμογές της αρχής από τον Πινγκ Πονγκ

1.Μεταξύ τριών προσώπων, υπάρχουν τουλάχιστον δύο του ίδιου φύλου.

2.Σε τρεις μη μηδενικούς αριθμούς τουλάχιστον οι δυο είναι ομόσημοι.

3.Αν έχουμε 25 λέξεις τότε σίγουρα δυο από αυτές θα αρχίζουμε τα ίδιο γράμμα. Οι 25 λέξεις (περιστέρια) και 24 γράμματα (περιστεροφωλιές) του ελληνικού αλφάβητου.

4.Ανάμεσα σε ν διαδοχικούς αριθμούς τουλάχιστον 1 διαιρείται με τον ν.
(ν-1 υπόλοιπα-φωλιές)

5.Σε ένα ελληνικό πανεπιστήμιο φοιτούν 2800 χιλιάδες φοιτητές τότε σίγουρα υπάρχουν τουλάχιστον 55 φοιτητές που θα κατάγονται από τον ίδιο νομό της Ελλάδας.
(Οι νομοί της Ελλάδας είναι 51 άρα $2800 = 54 \cdot 51 + 46$).

6.Στην Αθήνα των 2.640.701 κατοίκων σίγουρα υπάρχουν τουλάχιστον 14 άνθρωποι (που δεν είναι φαλακροί) οποίοι έχουν τον ίδιο αριθμό από τρίχες στο κεφάλι τους δεδομένου ότι κανένας άνθρωπος δεν έχει πάνω από 200.000 τρίχες στο κεφάλι του.
($2.640.701 = 13 \cdot 200.000 + 40.701$)

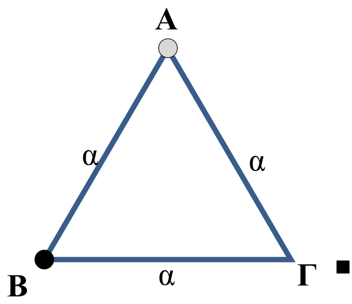
Παραδείγματα

93.Ο Άγιος Βασίλης και οι τάρανδοι του έβαψαν το επίπεδο με δυο χρώματα,γκρι και μαύρο. Να δείξετε ότι υπάρχουν τουλάχιστον δυο σημεία στο επίπεδο με το ίδιο χρώμα που απέχουν ένα χιλιόμετρο.

(*Third Annual Colorado Springs Mathematical Olympiad, 1986*)

Λύση

Θεωρούμε ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ με πλευρά α=1 km.
Οι κορυφές του τριγώνου είναι 3 (περιστέρια) και τα χρώματα 2 (φωλιές).Άρα,με 1 χρώμα (φωλιά) θα χρωματιστούν τουλάχιστον 2 κορυφές (περιστέρια).
Άρα 2 τουλάχιστον κορυφές θα έχουν το ίδιο χρώμα.



94.Σε μια σύναξη στην Μέση Γη έλαβαν μέρος 201 πλάσματα και των δυο φυλών (νάνοι και ξωτικά) από 10 διαφορετικά βασίλεια.Να αποδειχθεί ότι ένα τουλάχιστον βασίλειο εκπροσωπήθηκε από 11 τουλάχιστον πλάσματα της ίδιας φυλής.(νάνοι ή ξωτικά)

Λύση

Ισχύει ότι $201 = 10 \cdot 20 + 1$, οπότε σύμφωνα με την αρχή της περιστεροφωλιάς (201 περιστέρια και 10 φωλιές) υπάρχει τουλάχιστον ένα βασίλειο με 20+1=21 πλάσματα (συμμετοχές) .Επειδή , $21 = 2 \cdot 10 + 1$,21 περιστέρια (πλάσματα) σε 2 φωλιές (φυλές) θα υπάρχουν τουλάχιστον 10+1=11 πλάσματα της ίδιας φυλής.

Εναλλακτικά,μπορούμε να το χειριστούμε ως εξής:

Αν υπάρχει βασίλειο με 11 πλάσματα της ίδιας φυλής, τότε και τα 10 βασίλεια θα συμμετέχουν με 10 το πολύ νάνους ή 10 το πολύ ξωτικά, δηλαδή 20 πλάσματα το πολύ. Τότε όμως θα έχουμε στο συνέδριο $10 \cdot 20 = 200$ πλάσματα το πολύ, άτοπο. Άρα υπάρχει τουλάχιστον ένα βασίλειο με 11 τουλάχιστον πλάσματα της ίδιας φυλής. ■

95. Να αποδειχθεί ότι ανάμεσα σε 13 διαφορετικούς ακεραίους μπορούμε πάντα να βρούμε τουλάχιστον δυο, των οποίων η διαφορά να διαιρείται με τον 12.

Λύση

Αν διαιρέσουμε τους 13 ακεραίους αριθμούς με το 12,θα προκύψουν 13 υπόλοιπα με τιμές από το σύνολο {0,1,2,3,..,12}.Αν όμως πάρουμε 13 στοιχεία από το σύνολο αυτό που έχει 12 στοιχεία, τουλάχιστον δυο θα είναι ίσα (σύμφωνα με την αρχή της περιστεροφωλιάς). Υπάρχουν λοιπόν δυο αριθμοί (από τους 13) που αν διαιρεθούν με το 12 δίνουν το ίδιο υπόλοιπο. Η διαφορά των αριθμών είναι προφανώς πολλαπλάσιο του 12.Διοτι, $\alpha - \beta = (12 \cdot \lambda + \upsilon) - (12 \cdot \mu + \upsilon) = 12(\lambda - \mu)$ πολλαπλάσιο του 12 ■



Η παραπάνω άσκηση γενικεύεται:

Να αποδειχθεί ότι ανάμεσα σε κ+1 ακεραίους μπορούμε πάντα να βρούμε τουλάχιστον δυο, των οποίων η διαφορά να διαιρείται με τον κ.

96.Αν διαλέξουμε τυχαία πέντε αριθμούς από τους ακεραίους από το 1 μέχρι το 8 τότε δυο από αυτούς πρέπει να έχουν άθροισμα 9.

Λύση

Κάθε αριθμός από το 1 μέχρι το 8 μπορεί σαν ζευγάρι κάποιον άλλο από τους 8 να έχει άθροισμα 9.Συνολικά είναι 4 τέτοια ζεύγη.

1 με 8
2 με 7
3 με το 6 και τέλος 4 με 5

Ο καθένας από 5 αριθμούς πρέπει να ανήκει σε ένα από τα τέσσερα ζευγάρια, άρα από την αρχή της περιστεροφωλιάς ένα ζεύγος σίγουρα ανήκει στην ομάδα των 5 οπότε έχει άθροισμα 9. ■

97.Σε μια κατασκήνωση υπάρχουν 577 παιδιά από 9 διαφορετικές χώρες. Σε οποιαδήποτε ομάδα 9 παιδιών υπάρχουν τουλάχιστον 2 παιδιά με το ίδιο ύψος. Να αποδειχθεί ότι υπάρχει ομάδα 5 παιδιών από την ίδια χώρα, του ιδίου φύλου και του ιδίου ύψους. *(Θέμα διαγωνισμού Θαλή 2000)*

Λύση

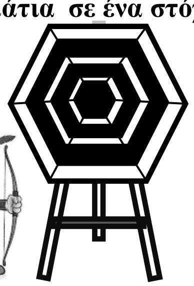
Έχουμε 577 (παιδιά)=64*9(χώρες)+1.Άρα τουλάχιστον μια χώρα θα έχει τουλάχιστον 65 παιδιά.Αφού: 65=2*32+1 .Σημαίνει πως 33 τουλάχιστον παιδιά είναι και του ιδίου φύλου.Έστω τώρα πως σε αυτά τα 33 παιδιά δεν υπάρχει ομάδα 5 παιδιών του ιδίου ύψους.Τότε θα υπάρχουν ομάδες με 4 το πολύ παιδιά του ιδίου ύψους. Επειδή 33=4*8 (ομάδες)+1 θα υπάρχουν τουλάχιστον 8+1=9 ομάδες παιδιών του ιδίου ύψους μέσα από τα 33 παιδιά που αναφέραμε. Αν από καθεμία από αυτές τις 9 ομάδες πάρουμε ένα παιδί τότε θα δημιουργήσουμε μια ομάδα 9 παιδιών που έχουν όλα διαφορετικό ύψος. Αυτό όμως είναι άτοπο διότι δίνεται ότι σε οποιαδήποτε ομάδα 9 παιδιών υπάρχουν τουλάχιστον 2 παιδιά με το ίδιο ύψος. ■

Δεν ξεχνούμε ότι πρέπει οπωσδήποτε τα περιστέρια να είναι ***περισσότερα*** *από τις φωλιές!*



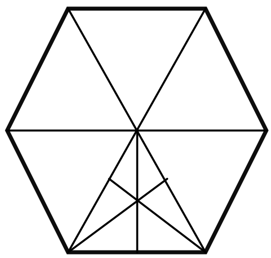
98.Ο Ρομπέν των καμένων δασών έριξε 19 βέλη με δεμένα μάτια σε ένα στόχο σχήματος κανονικού εξάγωνου με πλευρά 1 μέτρο. Όλα τα βέλη έπεσαν σε κάποιο σημείο του εξαγωνικού στόχου. Να δείξετε ότι δυο τουλάχιστον τρύπες από τα βέλη έχουν απόσταση μικρότερη από $\frac{\sqrt{3}}{3}$.





Λύση

Θα εφαρμόσουμε την αρχή της περιστεροφωλιάς. Χαράσσουμε τις διαγώνιες του κανονικού εξαγώνου που διέρχονται από το κέντρο του. Σχηματίζονται έξι μικρότερα ισόπλευρα τρίγωνα. Από την αριθμητική ισότητα $19=6\cdot3+1$,προκύπτει ότι ακόμα και από τρία σημεία να τοποθετήσουμε σε κάθε ισόπλευρο τρίγωνο περισσεύει ένα σημείο. Άρα, σε ένα τουλάχιστον από τα μικρά τρίγωνα πρέπει να τοποθετηθούν 4 σημεία. Στην περίπτωση αυτή αυτή, οι πιο απομακρυσμένες θέσεις για 3 από τα σημεία είναι οι κορυφές του τρίγωνου και η αμέσως πιο «μακρινή» θέση είναι το κέντρο συμμετρίας του, δηλαδή το σημείο τομής των διαμέσων του. (σχήμα).



Το μήκος των διαμέσων ενός ισοπλεύρου τριγώνου πλευράς 1 είναι $\frac{\sqrt{3}}{2}$ και το σημείο τομής των διαμέσων χωρίσει την διάμεσο σε λόγο 2:1.Αρα η απόσταση του κέντρου του τριγώνου από κάθε κορυφή είναι $\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{2}{3}=\frac{\sqrt{3}}{3}$ ■

Το θεώρημα αποδίδεται στον Γερμανό Μαθηματικό Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet.Από μικρό παιδί ακόμα,είχε φανεί η μεγάλη κλίση του Dirichlet στα μαθηματικά. Συνεχίζοντας τις σπουδές του μετά το γυμνάσιο στη Γερμανία και τη Γαλλία,ο Dirichlet είχε την τύχη να διδαχθεί από τους σπουδαιότερους Μαθηματικούς εκείνης της εποχής όπως τον Ohm,τον Fourier,τον Laplace,τον Legendre και τον Poisson.Ο ίδιος υπήρξε εξαίρετος δάσκαλος που εκφραζόταν πάντα με πολύ μεγάλη σαφήνεια. Το 1855 μετά το θάνατο του Gauss, είχε την τιμή να τον διαδεχθεί στο Gottingen.
Η αρχή της περιστεροφωλιάς (ή αρχή του Dirichlet) αναφέρεται πρώτη φορά στο βιβλίο του, Recherches sur les forms quadratiques à coefficients et à indéterminées complexes που εκδόθηκε το 1842.



Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805–1859)

99.Ο Μήτσος είναι κυνηγός λιονταριών στο βουνό Κιλιμάντζαρο.Σε ένα σαφάρι που διήρκησε ένα μήνα (30 ημέρες) κατάφερε να σκοτώσει 48 λιοντάρια.Κάθε μέρα του μήνα σκότωνε τουλάχιστον ένα λιοντάρι.Πέρα από το αδιαμφισβήτητο γεγονός ότι τον τρέμουν τα λιοντάρια στο Κιλιμάντζαρο να δείξετε ότι υπάρχει περίοδος συνεχομένων ημερών στην οποία σκότωσε ακριβώς 11 λιοντάρια.

Λύση

Αν Λ_i συμβολίσουμε τον αριθμό των λιονταριών που έχει σκοτώσει ο Μήτσος μέχρι και την i μέρα τότε προφανώς $\Lambda_{30}=48$ άρα οι αριθμοί $\Lambda_1,\Lambda_2,\ldots,\Lambda_{30}$ αποτελούν μια γνησίως αύξουσα ακολουθία όρων δηλαδή $0<\Lambda_1<\Lambda_2<\ldots<\Lambda_i<\ldots<\Lambda_{30}=48$ (1)
Προσθέτουμε 11 σε κάθε αριθμό,έτσι:

$$11<\Lambda_1+11<\Lambda_2+11<\ldots<\Lambda_{30}+11=59 \quad (2)$$ ή

αν $K_i=\Lambda_i+11$ η (2) γίνεται

$$11<K_1<K_2<\ldots<K_{30}=59 \quad (3)$$

Έχουμε 30 αριθμούς στην (1) και 30 αριθμούς στην (3) και όλοι αυτοί οι 60 θετικοί ακέραιοι αριθμοί είναι μικρότεροι ή ίσοι του 59 άρα από την αρχή της περιστεροφωλιάς τουλάχιστον δυο από τους αριθμούς είναι ίσοι.Τώρα,επειδή αποκλείεται να είναι ίσοι δυο Λ_i στην (1) και ομοίως αποκλείεται να είναι ισοι δυο K_i στην (3) Θα ισχύει ότι $\Lambda_i=K_j$ ή $\Lambda_i=\Lambda_j+11$ για κάποια i,j δηλαδή $\Lambda_i-\Lambda_j=11$
Άρα τις συνεχόμενες μέρες j + 1,j + 2,...i ο Μήτσος έχει σκοτώσει αθροιστικά 11 λιοντάρια. ■

Η αρχή της περιστεροφωλιάς είναι πολύ ισχυρό εργαλείο ,όμως παρουσιάζει δυο δυσκολίες. Δεν είναι εύκολα αντιληπτό ποτέ χρησιμοποιείται και επίσης να προσδιορίσει ο λύτης ποιες είναι οι «φωλιές» και ποια είναι τα «περιστέρια». Οι δυο αυτές δυσκολίες θεραπεύονται μόνο με την τριβή σε προβλήματα, επιμονή και μεθοδικότητα.

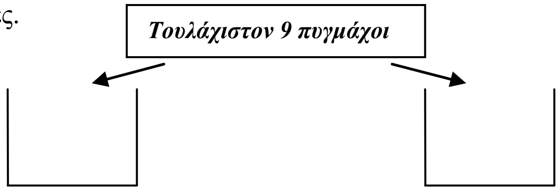


100.Δέκα πυγμάχοι λαμβάνουν μέρος σε ένα τουρνουά όπου κάθε πυγμάχος αγωνίζεται ακριβώς μια φορά με καθένα από τους υπολοίπους. Σύμφωνα με τους κανόνες της ομοσπονδίας ,αν ο αθλητής κερδίσει στον αγώνα λαμβάνει ένα βαθμό, αν χάσει τότε του αφαιρούν ένα βαθμό ενώ αν φέρει ισοπαλία δεν παίρνει ούτε χάνει βαθμό. Όταν το τουρνουά ολοκληρώθηκε, παρατηρήθηκε ότι περισσότερο από το 70% των αγώνων κατέληξαν σε ισοπαλία.
Να αποδείξετε ότι τουλάχιστον δυο πυγμάχοι είχαν την ίδια συνολική βαθμολογία.

Λύση

Πως επιλέγουμε φωλιές και περιστέρια; Από την τελευταία πρόταση της εκφώνησης *«Να αποδείξετε ότι..... βαθμολογία.»* μια πρώτη σκέψη είναι να θεωρήσουμε του πυγμάχους ως περιστέρια και ως περιστεροφωλιές τις διαφορετικές συνολικές βαθμολογίες. Τώρα, ανακύπτει το ερώτημα:Πόσες διαφορετικές συνολικές βαθμολογίες υπάρχουν; (Δεν ξεχνούμε ότι πρέπει οπωσδήποτε τα περιστέρια να είναι περισσότερα από τις φωλιές).
Εφόσον κάθε ζεύγος πυγμάχων αγωνίστηκε μια και μόνο φορά χ πραγματοποιηθήκαν κατά την διάρκεια του τουρνουά συνολικά $\binom{10}{2}=45$ αγώνες. Μεταξύ αυτών των

αγώνων ,υπάρχουν περισσότεροι από $\left[0,7\cdot 45\right]=\left[31,5\right]=31$ αγώνες που κατέληξαν σε ισοπαλία. Άρα τουλάχιστον 32 αγώνες κατέληξαν σε ισοπαλία.
Έτσι 45-32=13 αγώνες είχαν ξεκάθαρο αποτέλεσμα (νίκη ή ήττα). (1)
Υποθέτουμε τώρα ότι και οι 10 πυγμάχοι είχαν διαφορετική βαθμολογία. Αυτό σημαίνει ότι το πολύ ένας πυγμάχος έχει συνολική βαθμολογία 0 .Άρα οι υπόλοιποι 9 πυγμάχοι θα έχουν είτε «θετικές» είτε «αρνητικές» συνολικές βαθμολογίες. Σύμφωνα με την αρχή της περιστεροφωλιάς θεωρούμε δυο φωλιές (αρνητικές, θετικές συνολικές βαθμολογίες) και 9 περιστέρια (πυγμάχους) άρα τουλάχιστον 5 πυγμάχοι έχουν θετικές συνολικές βαθμολογίες είτε τουλάχιστον 5 πυγμάχοι έχουν αρνητικές συνολικές βαθμολογίες.



θετικές συνολικές βαθμολογίες ***Αρνητικές συνολικές βαθμολογίες***
Φωλιά 1 ***Φωλιά 2***

Ας πάρουμε την πρώτη περίπτωση, δηλ τουλάχιστον 5 πυγμάχοι έχουν θετικές συνολικές βαθμολογίες,υποθέσαμε ότι διαφορετικές μεταξύ τους άρα το άθροισμα αυτών των συνολικών βαθμολογιών θα είναι τουλάχιστον 1+2+3+4+5=15.
Αλλά, λόγω του γεγονότος ότι δίνεται ένας βαθμός για την νίκη ισχύει ότι πραγματοποιηθήκαν τουλάχιστον 15 αγώνες χωρίς ισοπαλία άτοπο από την (1).Σε άτοπο καταλήγουμε με παρόμοιο τρόπο αν πάρουμε την περίπτωση τουλάχιστον 5 πυγμάχοι έχουν αρνητικές συνολικές βαθμολογίες.
Συνεπώς,τουλάχιστον δυο πυγμάχοι είχαν την ίδια συνολική βαθμολογία. ■

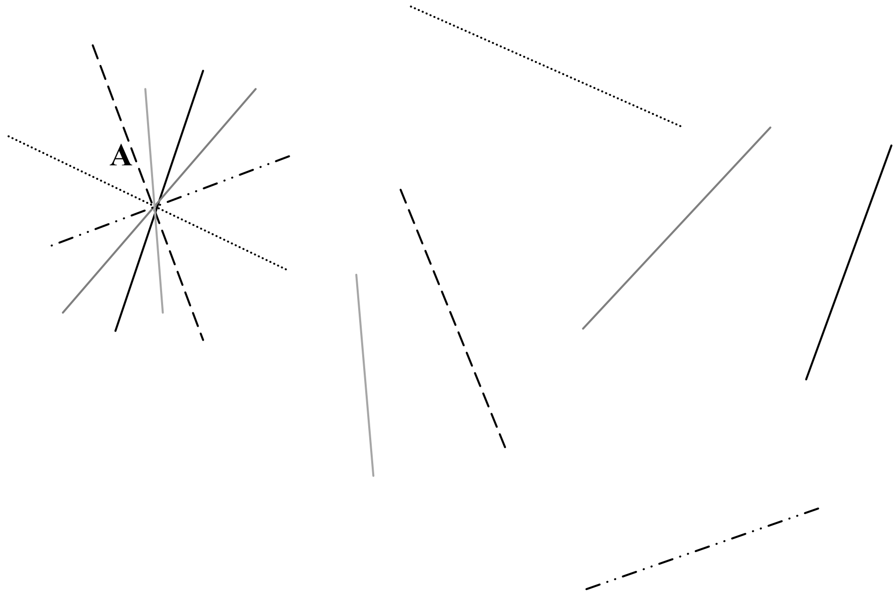
101.Το ήξερες ότι…
Υπάρχει πολλαπλάσιο του 1974 ,το οποίο αποτελείται μόνο από άσσους.
Θεωρούμε τους αριθμούς 1,11,111,1111,…,111..111 ο τελευταίος αριθμός έχει 1975 άσσους. Από την αρχή της περιστεροφωλιάς δυο από αυτούς τους αριθμούς έστω Α,Β (Α>Β) έχουν το ίδιο υπόλοιπο διαιρούμενοι με το 1974,τότε ο αριθμός Α-Β είναι της μορφής 111..10…0 που προφανώς διαιρείται με το 1974. Όμως ο 1974 είναι σχετικά πρώτος με το 10 άρα, αν από τον αριθμό Α-Β αφαιρέσουμε τα μηδενικά έχουμε ένα πολλαπλάσιο του 1974 που αποτελείται μόνο από άσσους.
Αλήθεια,ποια είναι η ιδιότητα των αριθμών που έχουν πολλαπλάσιο αποτελούμενο από άσσους;



Πολλές φορές η οπτικοποίηση ενός προβλήματος βοηθά τόσο στην αποκωδικοποίηση της εκφώνησης όσο και στην λύση αυτή καθαυτή!

102.Δίνονται έξι ευθείες στο επίπεδο ανά δυο μη παράλληλες.Να αποδειχθεί ότι δυο από αυτές σχηματίζουν γωνία μικρότερη ή ίση των 30°.
Πως το προσεγγίζουμε;

Σχεδιάζουμε 6 ευθείες ανά δυο μη παράλληλες.Δεν θα είναι κατ' ανάγκη όπως στο σχήμα, όμως θα μας προσφέρει ένα οπτικό στιγμιότυπο του προβλήματος.Παίρνουμε ένα οποιοδήποτε σημείο Α στο επίπεδο και φέρνουμε 6 ευθείες που διέρχονται από το σημείο Α και είναι παράλληλες προς τις δοσμένες ευθείες. Αρκεί να δείξουμε ότι δυο από αυτές σχηματίζουν γωνία μικρότερη ή ίση των 30° .

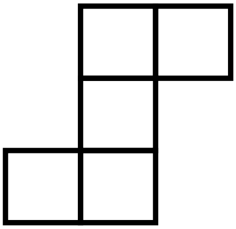


Κοιτώντας μόνο τις διαδοχικές γωνίες έχουμε 12 γωνίες (φωλιές) των οποίων το ά-θροισμα είναι 360°.Οπότε τουλάχιστον μια από αυτές είναι μικρότερη ή ίση των 30°.*(Αν όλες ήταν πάνω από 30° θα οδηγούμαστε σε άθροισμα μεγαλύτερο από 360°)* ■

Στο συγκεκριμένο παράδειγμα δεν έχουμε ακέραιο αριθμό περιστεριών,το μόνο που ξέρουμε είναι ότι τα «μη ακέραια» μα περιστέρια έχουν άθροισμα 360°!

Αν δίνονται 60 ευθείες στο επίπεδο ανά δυο μη παράλληλες.Να αποδειχθεί ότι δυο από αυτές σχηματίζουν γωνία μικρότερη ή ίση των 3°.

103.Θεωρούμε μια άπειρη σκακιέρα όπου κάθε μοναδιαίο τετράγωνο είναι βαμμένο με ένα από 8 χρώματα.Να δείξετε ότι είναι πάντα δυνατό να τοποθετήσουμε το πεντόμινο(*) του σχήματος 1 έτσι ώστε να καλύπτει δυο τετράγωνα ίδιου χρώματος.
Επιτρέπεται να περιστρέψουμε το πεντόμινο ή να περιστρέψουμε το συμμετρικό του ως προς τις κάθετες γραμμές της σκακιέρας.

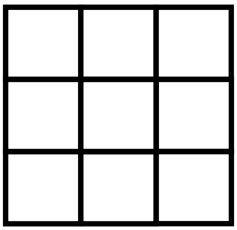


Σχήμα 1

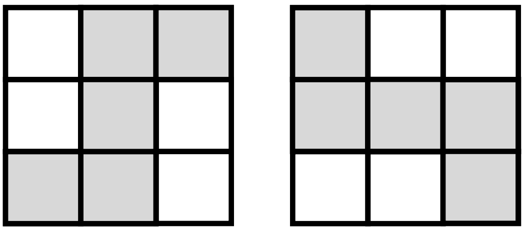
(*)Τα πολυόμινα είναι επίπεδα γεωμετρικά σχήματα που προκύπτουν από την «συγκόλληση» ίσων τετραγώνων, ανάλογα με το πλήθος των τετραγώνων ονομάζονται μονόμινα, δυόμινα, τριόμινα, πεντόμινο κ.ο.κ.

Λύση

Από την αρχή της περιστεροφωλιάς δυο τετράγωνα σε μια 3x3 σκακιέρα πρέπει να έχουν το ίδιο χρώμα. Έχουμε 9 τετράγωνα (περιστέρια) σε 8 χρώματα (φωλιές).



Από την άλλη, οποιοδήποτε ζεύγος μοναδιαίων τετραγώνων σε μια 3x3 σκακιέρα μπορεί να καλύπτεται από ένα πεντόμινο (μπορεί να χρειαστεί να το περιστρέψουμε η να περιστρέψουμε το συμμετρικό του ως προς τις κάθετες γραμμές της σκακιέρας.



■

104.Ο κόσμος του Heavy Metal στην Λοξολανδη είναι παράξενος. Χαρακτηριστικό παράδειγμα οι *MITALLICA*. Η MITALLICA είναι μια μουσική μπάντα που αποτελείται από έξι μουσικούς με πολύ ιδιαίτερα χαρακτηριστικά.Ανά δυο,οι μουσικοί της μπάντας είτε έχουν αμοιβαία συμπάθεια είτε αμοιβαία αντιπάθεια. Όχι μεσοβέζικες καταστάσεις.Αξιοσημείωτο είναι το γεγονός ότι στη μπάντα δεν υπάρχει ομάδα τριών μουσικών που να έχουν αμοιβαία συμπάθεια.Να αποδείξετε ότι τουλάχιστον μια ομάδα τριών μουσικών της μπάντας έχουν αμοιβαία αντιπάθεια.

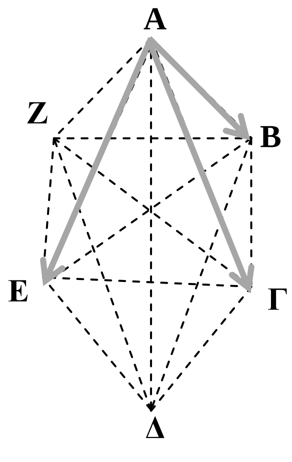
Λύση

Το πρόβλημα μπορεί να λυθεί γραφικά. Έξι τελείες στο επίπεδο αναπαριστούν τους έξι μουσικούς. Όλες οι τελείες ενώνονται με διακεκομμένες γραμμές που συμβολίζουν μια σχέση συμπάθειας ή αντιπάθειας.Με τις μαύρες γραμμές συμβολίζουμε την σχέση συμπάθειας ενώ με τις γκρι μια σχέση αντιπάθειας.

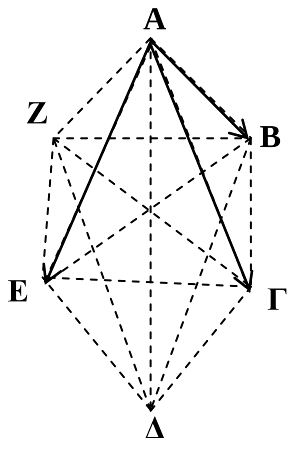
Ας δούμε την τελεία Α, από τις πέντε γραμμές που ξεκινούν από αυτή τουλάχιστον οι τρεις πρέπει να έχουν το ίδιο χρώμα. (αρχή της περιστεροφωλιάς)

-Έστω ότι οι τρεις γραμμές ίδιου χρώματος είναι γκρι. Αν οι γραμμές που απαρτίζουν το τρίγωνο ΒΕΓ είναι και οι τρεις μαύρες τότε έχουμε μια ομάδα τριών μουσικών που συμπαθούν αμοιβαία ο ένας τον άλλα. Άτοπο,από υπόθεση.Συνεπώς, μια πλευρά του τριγώνου είναι γκρι.Ανεξάρτητα ποια από τις τρεις είναι γκρι,όποια και αν επιλέξουμε τότε σχηματίζεται ένα τρίγωνο με τρεις γκρι πλευρές. Άρα τουλάχιστον μια ομάδα τριών μουσικών της μπάντας έχουν αμοιβαία αντιπάθεια. (*σχήμα 1*)

-Έστω ότι οι τρεις γραμμές ίδιου χρώματος είναι μαύρες .Στο τρίγωνο ΒΕΓ όλες οι γραμμές είναι γκρι.Αν έστω και μια ήταν μαύρη τότε θα σχηματιζόταν ένα τρίγωνο με μαύρες πλευρές ,άτοπο από υπόθεση. Άρα και σε αυτήν την περίπτωση έχουμε ένα τουλάχιστον τρίγωνο με τρεις γκρι πλευρές (*σχήμα 2*)



Σχήμα 1

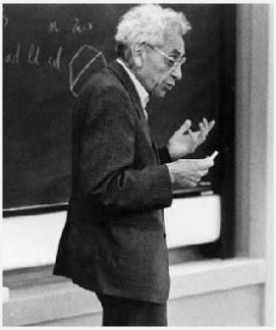


Σχήμα 2

■

Το πρόβλημα γενικεύεται ως εξής:
«Ποιος είναι ο ελάχιστος αριθμός προσκεκλημένων ν σε ένα πάρτι ώστε τουλάχιστον μ από αυτούς να γνωρίζονται μεταξύ τους ή τουλάχιστον κ από αυτούς να μην γνωρίζονται μεταξύ τους;»

Οι αριθμοί που αποτελούν απαντήσεις στο παραπάνω πρόβλημα ονομάζονται αριθμοί Ράμσεϊ και συμβολίζονται R(μ,κ)=ν
Ο θρυλικός μαθηματικός Πωλ Έρντος συχνά διηγούνταν μια ιστορία σχετική με το πρόβλημα.Αν έχουμε μια ανώτερη εξωγήινη δύναμη που φτάνει στην γη και θέτει στην ανθρωπότητα ένα ερώτημα,αν δοθεί λάθος απάντηση θα κατάστρεφε τον πλανήτη.Ας υποθέσουμε, επιχειρηματολογεί ο Ερντος, ότι οι εξωγήινοι αποφασίζουν να θέσουν ως ερώτημα το πρόβλημα του Ράμσεϊ με το πάρτι, θέτοντας ως προϋπόθεση το να γνωρίζονται ή να μην γνωρίζονται μεταξύ τους 5 άτομα.Η καλύτερη τακτική, σύμφωνα με τον Ούγγρο μαθηματικό, θα ήταν να συγκεντρώσουμε όλους τους μαθηματικούς του κόσμου,να τους ζητήσουμε να αφήσουν στην άκρη ότι κάνουν και με απλούς υπολογισμούς,να απαριθμήσουν όλα τα δυνατά ενδεχόμενα είναι 2^{1128} ,ένα εξωφρενικό νούμερο.Σήμερα εικάζουμε ότι ο αριθμός που αναζητούμε είναι ανάμεσα στο 43 και στο 49 και αυτή είναι η καλύτερη προσέγγιση που έχουμε. Όμως,αν οι εξωγήινοι έθεταν το ίδιο πρόβλημα για 6 άτομα,ο Έρντος ισχυριζόταν ότι η καλύτερη μέθοδος θα ήταν να τους επιτεθούμε εμείς πρώτοι προτού μας επιτεθούν εκείνοι,ο συνδυασμός δυνατοτήτων θα ήταν υπερβολικά μεγάλος, ακόμη και για τους πιο ισχυρούς υπολογιστές, το πιο περίπλοκο πρόβλημα του πάρτι του Ράμσεϊ που μέχρι σήμερα έχει λυθεί, με την βοήθεια 100 υπολογιστών που λειτουργούσαν ταυτόχρονα-είναι το πρόβλημα του ελάχιστου αριθμού των προσκεκλημένων που χρειάζονται για να υπάρχουν τουλάχιστον 4 άτομα που γνωρίζονται μεταξύ τους η 5 που δεν γνωρίζονται μεταξύ τους.Η λύση βρέθηκε το 1995 και το αποτέλεσμα είναι 25.





Δεν πρέπει να ξεχνάμε ότι η λύση ενός αξιόλογου προβλήματος σπάνια μας «έρχεται» εύκολα και χωρίς σκληρή δουλειά. Είναι μάλλον το αποτέλεσμα μιας διανοητικής προσπάθειας ημερών, εβδομάδων ή μηνών. *Szego Gabor*

105.Σε μια ομάδα ατόμων, ο καθένας γνωρίζει περιττό αριθμό ατόμων από την ίδια ομάδα (οι γνωριμίες είναι αμοιβαίες) να αποδείξετε ότι ο αριθμός των ατόμων της ομάδας είναι άρτιος.

Λύση

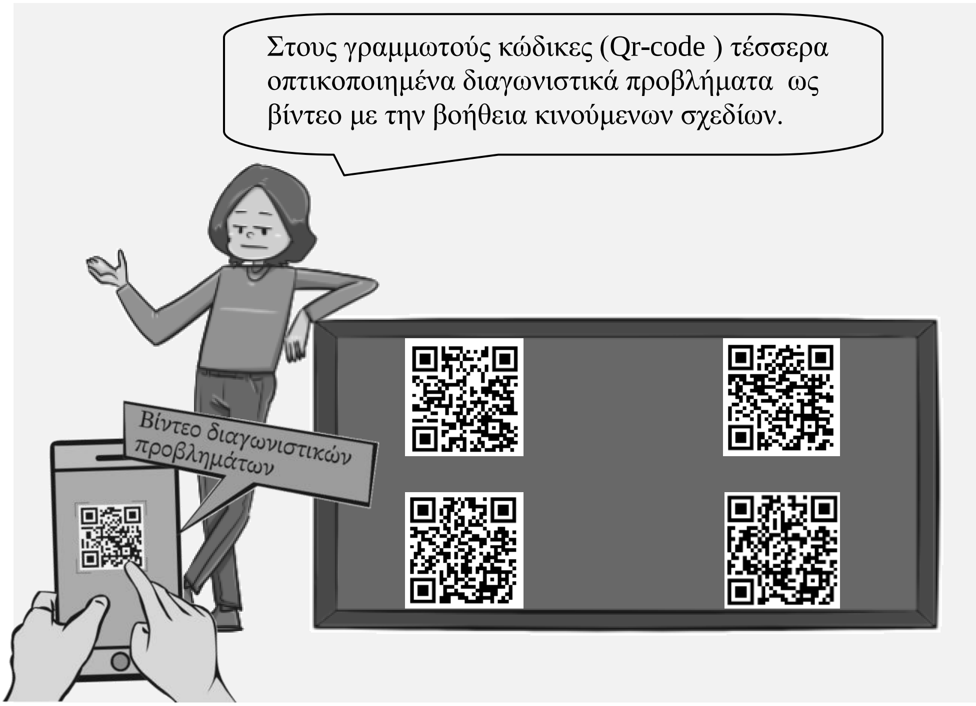
Ας ονομάσουμε $α_1,α_2,…,α_ν$ τις γνωριμίες του καθενός από τα άτομα 1 έως ν. Αν προσθέσουμε όλες αυτές τις γνωριμίες , πρέπει να προκύψει αριθμός άρτιος διότι «αφού ο κ γνωρίζει τον λ και ο λ γνωρίζει τον κ» Από την άλλη μεριά γνωρίζουμε ότι οι αριθμοί $α_1,α_2,…,α_ν$ είναι όλοι περιττοί. Τα δυο αυτά δεδομένα αποδεικνύουν ότι ο αριθμός ν που εκφράζει το πλήθος των ατόμων πρέπει να είναι άρτιος, διότι μόνο άρτιο πλήθος περιττών αριθμών μας δίνει αριθμό άρτιο. ■

106.Από τους αριθμούς 1,2,3,4…,200 επιλέγουμε 101 από αυτούς .Να αποδείξετε ότι μεταξύ αυτών των αριθμών υπάρχουν τουλάχιστον δυο πρώτοι μεταξύ τους, δηλαδή αριθμοί που έχουν κοινό διαιρέτη μόνο την μονάδα.

Λύση

Θα εφαρμόσουμε την αρχή της περιστεροφωλιάς.

Τα ζεύγη (1,2),(2,3),(3,4),……(199,200) είναι ζεύγη πρώτων αριθμών μεταξύ τους. Αυτά τα ζεύγη είναι 101 στο πλήθος.Από το αρχικό σύνολο των αριθμών επιλέγουμε 100 από αυτούς.Ο καθένας θα αντιστοιχεί σε ένα μόνο από τα ζεύγη (φωλιές).Αν δυο από τους αριθμούς ανήκουν στο ίδιο ζεύγος το πρόβλημα λύθηκε.Αν τώρα και οι 100 αριθμοί ανήκουν σε διαφορετικά ζεύγη,τότε ο 101^{ος} που θα επιλέξουμε,αναγκαστικά θα ανήκει σε ένα από τα 100 ζεύγη και θα είναι σχετικά πρώτος με τον αριθμό που βρίσκεται στο ίδιο ζεύγος. ■



4.Ασκήσεις,προβλήματα *(Αρχή του περιστερώνα)*

Α107. Μια ομάδα ποδοσφαίρου έχει 11 παίκτες από τους οποίους ο μικρότερος είναι 21 ετών και ο μεγαλύτερος 30 ετών. Να εξετάσετε αν υπάρχουν τουλάχιστον δυο παίκτες που έχουν γεννηθεί το ίδιο έτος. (Οι ηλικίες είναι ακέραιοι αριθμοί.)

Α108.Ο λοχαγός Καραβανέας επέλεξε από τρεις διαφορετικούς λόχους συνολικά 25 στρατιώτες για μια αποστολή αυτοκτονίας.Την κατάληψη του λόφου Κεφτές.Να αποδείξετε ότι ανάμεσα τους υπάρχουν τουλάχιστον 9 στρατιώτες από τον ίδιο λόχο.

Α109.Σε ένα σχολείο 700 μαθητών,πόσοι τουλάχιστον μαθητές υπάρχουν που έχουν γεννηθεί τον ίδιο μήνα του έτους;

Α110.Σε ένα συρτάρι υπάρχουν 10 ζευγάρια καλτσών (συνολικά 20 κάλτσες) διαφορετικού χρώματος.Το δωμάτιο είναι σκοτεινό. Πόσες τουλάχιστον κάλτσες πρέπει να τραβήξει κάποιος για να είναι σίγουρος ότι θα έχει τουλάχιστον δυο ίδιου χρώματος;

Α111.Ένα καλάθι με φρούτα περιέχει μήλα, μπανάνες και πορτοκάλια. Ποιος είναι ο ελάχιστος αριθμός από φρούτα που πρέπει να τοποθετήσουμε στο καλάθι για να είμαστε σίγουροι ότι στο καλάθι θα βρίσκονται τουλάχιστον 8 μήλα ή τουλάχιστον 6 μπανάνες ή τουλάχιστον 9 πορτοκάλια;

Α112.Δίνονται 9 ορθογώνια τρίγωνα των οποίων οι κάθετες πλευρές έχουν μήκη με μέτρο φυσικούς αριθμούς και το εμβαδό καθενός τρίγωνου είναι ίσο με 15 m^2.Να δείξετε ότι υπάρχουν 3 τουλάχιστον τρίγωνα από αυτά που είναι ίσα.

Α113.Ένας μαθητής πρέπει να λύσει 15 προβλήματα σε μια εβδομάδα.Εξηγήστε γιατί τουλάχιστον σε μια ήμερα της εβδομάδας αυτής,ο μαθητής πρέπει να λύσει τουλάχιστον τρία προβλήματα.

Α114. Σε ένα διαγωνισμό φυσικής τεθήκαν 5 προβλήματα ,στο διαγωνισμό έλαβαν μέρος 73 μαθητές. Να αποδειχθεί ότι τουλάχιστον 13 μαθητές έλυσαν ακριβώς το ίδιο πλήθος προβλημάτων.

Α115.Σε ένα διαγωνισμό τραγουδιού έλαβαν μέρος 34 διαγωνιζόμενοι. Η ακέραια βαθμολογία που συγκέντρωσε καθένας από τους διαγωνιζόμενους είχε εύρος από 10 έως 20 βαθμούς.Να δείξετε ότι υπάρχουν τουλάχιστον 4 διαγωνιζόμενοι που πήραν την ίδια βαθμολογία.

Α116.Ο Κωστάκης έφαγε 16 καραμέλες από ένα κουτί που περιέχει 3 ειδών καραμέλες.Βρείτε τον μέγιστο αριθμό καραμελών ιδίου είδους τον οποίο είμαστε απολύτως βέβαιοι ότι έφαγε ο Τοτός.

Α117.Ποιος είναι ο μικρότερος δυνατός ακέραιος ν τέτοιος ώστε η ακόλουθη δήλωση είναι αληθής;

Σε κάθε ομάδα 2ν-10 ανθρώπων, υπάρχουν πάντα τουλάχιστον 10 άτομα τα οποία έχουν κοινά γενέθλια;

Θεωρούμε ότι στο χρόνο υπάρχουν 365 διαφορετικές ημερομηνίες γενέθλιων.

(SMO 2013 junior section)

Α118.Σε ένα τουρνουά πυγμαχίας,την πρώτη μέρα κάθε πυγμάχος με όσους πυγμάχους αγωνιστεί, θα αγωνιστεί ακριβώς μια φορά.Να αποδειχτεί ότι στο τέλος της πρώτης μέρας του τουρνουά θα υπάρχουν τουλάχιστον δυο πυγμάχοι που θα έχουν δώσει τον ίδιο αριθμό αγώνων.

Α119. Αν α,β,γ είναι θετικοί ακέραιοι αριθμοί ,να αποδείξετε ότι ο αριθμός Δ=(α+β)(β+γ)(γ+α) είναι άρτιος.

Α120. Να αποδειχθεί ότι ανάμεσα σε 2019 ακεραίους μπορούμε πάντα να βρούμε τουλάχιστον δυο, των οποίων η διαφορά να διαιρείται με τον 2018.
Α121. Να δείξετε ότι από κάθε σύνολο 50 θετικών ακεραίων είναι δυνατό να επιλέξουμε τέσσερεις αριθμούς α,β,γ,δ τέτοιους ώστε ο αριθμός $(\alpha-\beta)(\gamma-\delta)$ να είναι πολλαπλάσιο του 2009.
Α122. Θεωρούμε 27 τυχαίους περιττούς θετικούς ακεραίους, διαφορετικούς μεταξύ τους και μικρότερους του 100.Να αποδείξετε ότι ανάμεσα τους υπάρχει ένα ζευγάρι αριθμών με άθροισμα 102.
Α123. Μέσα σε ένα κουτί έχουμε τοποθετήσει:

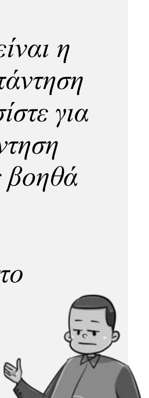
1 κάρτα με τον αριθμό 1
2 κάρτες με τον αριθμό 2
3 κάρτες με τον αριθμό 3
………………..
Ν κάρτες με τον αριθμό Ν

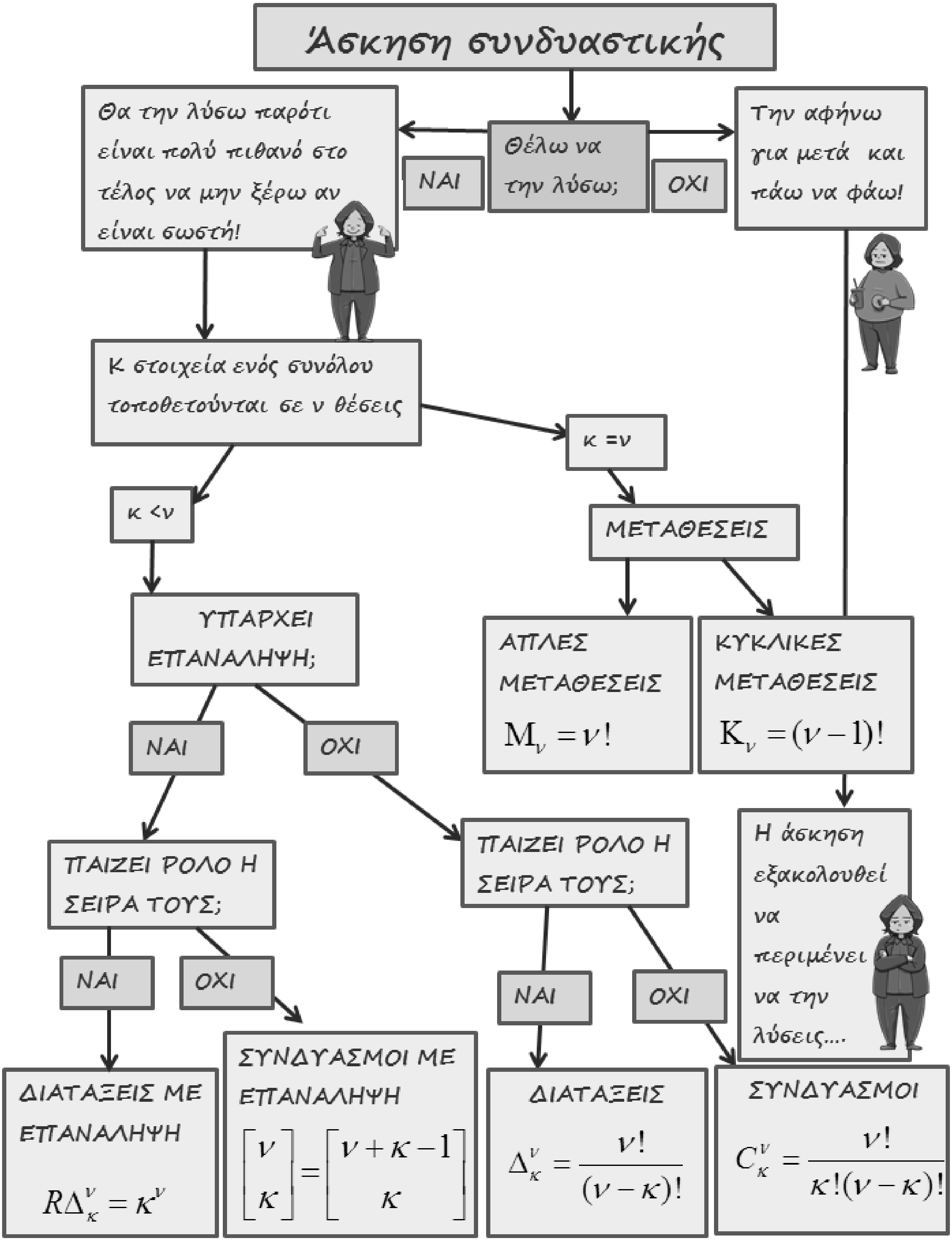
Ποιος είναι ο ελάχιστος αριθμός από κάρτες που πρέπει να βγάλουμε τυχαία από το κουτί,ώστε να υπάρχουν με βεβαιότητα 8 κάρτες με τον ίδιο αριθμό;
Α124.Ένα κουτί περιέχει 900 κάρτες, στην κάθε κάρτα είναι γραμμένος ένας θετικός τριψήφιος ακέραιος αριθμός. Ο Γιάννης βγάζει από το κουτί έναν αριθμό από κάρτες και υπολογίζει για τον αριθμό κάθε κάρτας τον άθροισμα των ψηφίων του. Πόσες κάρτες τουλάχιστον πρέπει να έχει τραβήξει ο Γιάννης για να είναι βέβαιο ότι τουλάχιστον 3 κάρτες θα έχουν αριθμούς με το ίδιο άθροισμα ψηφίων;
Α125.Ο καλός,ο κακός και ο άσχημος εξασκούνται στην σκοποβολή στην πινακίδα στην είσοδο της πόλης Pigeon City.Η πινακίδα έχει τετραγωνικό σχήμα με πλευρά 10 cm. Πρώτος ρίχνει ο καλός, αδειάζει το εξάσφαιρο του και μόνο μια σφαίρα δεν βρίσκει στόχο.Να δείξετε ότι τουλάχιστον δυο από τις σφαίρες που βρήκαν στόχο απέχουν λιγότερο από $5\sqrt{2}$ cm.
Α126.Δίνονται 5 σημεία στο επίπεδο με ακέραιες συντεταγμένες.Να αποδείξετε ότι το μέσο ενός ευθυγράμμου τμήματος που ενώνει ένα τουλάχιστον ζεύγος από τα σημεία έχει επίσης ακέραιες συντεταγμένες.
Α127.Να αποδείξετε ότι αν επιλεγούν τυχαία 100 θετικοί ακέραιοι αριθμοί τότε δυο ή περισσότεροι από αυτούς έχουν άθροισμα πολλαπλάσιο του 100.
Α128.Πενήντα βουλευτές πρόκειται να καθίσουν σε ένα στρογγυλό τραπέζι για μια συνεδρίαση με θέμα την διάσωση ενός σπανίου ζωικού είδους.Θα λάβουν μέρος 25 βουλευτές της συμπολίτευσης και 25 βουλευτές της αντιπολίτευσης.Να αποδείξετε ότι όπως και να καθίσουν οι πενήντα βουλευτές στο στρογγυλό τραπέζι πάντα θα υπάρχει βουλευτής του οποίου οι γείτονες είναι βουλευτές της αντιπολίτευσης.
Α129.Ο Παπαδόπουλος διατηρεί ένα διαδικτυακό κατάστημα και εμπορεύεται φορητούς υπολογιστές.Κοιτώντας τις πωλήσεις που έκανε στο χρονικό διάστημα από την $1^{η}$ Μαρτίου μέχρι την $16^{η}$ Μαΐου, έκανε τις εξής παρατηρήσεις:
- Κάθε μέρα κατόρθωσε να πουλήσει τουλάχιστον ένα υπολογιστή.
- Δεν πούλησε συνολικά παραπάνω από 132 υπολογιστές.(για το παραπάνω χρονικό διάστημα)

Να αποδείξετε ότι υπάρχουν κάποιες συνεχόμενες μέρες που ο Παπαδόπουλος πούλησε ακριβώς 21 υπολογιστές.Το κατάστημα είναι διαδικτυακό,άρα στο παραπάνω χρονικό διάστημα δεν υπάρχουν αργίες, ούτε ημέρες που το κατάστημα δεν λειτούργησε.

Α130.Στο Αβγατηγανιστάν στην επαρχία Μπέικον η γλώσσα που μιλούν οι γηγενείς κάτοικοι,τα Αλαμπουρνέζικα αποτελείται από 21 φωνήεντα και 32 σύμφωνα.Ο Τοτός - διακεκριμένος γλωσσολόγος του Αβγατηγανιστάν-έχει διαπιστώσει ότι κάθε ακολουθία γραμμάτων του αλφάβητου αποτελεί λέξη της συγκεκριμένης γλώσσας, αρκεί κανένα γράμμα της ακολουθίας να μην επαναλαμβάνεται δυο φορές και να μην παρουσιάζονται δυο σύμφωνα συνεχόμενα.Αν διαιρέσουμε το αλφάβητο σε έξι υποσύνολα χωρίς κοινά στοιχεία μεταξύ τους, να αποδείξετε ότι τα γράμματα (στοιχεία) ενός τουλάχιστον από τα υποσύνολα αυτά μπορούν να σχηματίσουν λέξη της γλώσσας.
Α131.Δίνονται 76 σημεία στο επίπεδο από τα οποία δεν υπάρχουν τρία συνευθειακά. Καθένα από αυτά χρωματίζεται,χρησιμοποιώντας ένα από 5 δεδομένα χρώματα.Να αποδείξετε ότι έχουν χρωματιστεί,οι κορυφές τουλάχιστον 320 σκαληνών τριγώνων,με το ίδιο χρώμα.
Α132.Διαιρούμε ένα κύκλο σε 36 ίσα τόξα χρησιμοποιώντας 36 σημεία. Χρωματίζουμε 6 από αυτά τα σημεία μπλε και αλλά 6 κόκκινα.Να αποδείξετε ότι υπάρχουν δυο ίσες χορδές ,η μια να έχει κόκκινα άκρα και η άλλη μπλε!
Α133. Το δάσος της περιστέρας στην Λοξολάνδη αποτελείται από ακριβώς 2017 δέντρα ,είναι γνωστό ότι από κάθε τριάδα δέντρων μπορούμε να επιλέξουμε δυο δέντρα τέτοια ώστε η απόσταση τους να είναι μικρότερη του 1 μέτρου. Να αποδείξετε ότι υπάρχει μια κυκλική περιοχή στο δάσος που περιέχει ακριβώς 1009 δέντρα.

«Η διαπίστωση ενός δομικού σχεδίου σε φαινομενικά άσχετα προβλήματα δεν είναι απλό επίτευγμα,αλλά όταν γίνει με επιτυχία φέρνει πολύ μεγάλη ικανοποίηση.Η αποτυχία επίλυσης ενός προβλήματος πολλές φορές είναι αποτέλεσμα αγκυλωτών συνηθειών σκέψης, δηλαδή ανελαστικών προσεγγίσεων.Όταν οι γνωστές μορφές προσέγγισης δεν φέρνουν αποτέλεσμα,μας αναγκάζουν να μεταβάλλουμε την τακτική της προσέγγισης.Μια ευέλικτη στάση μπορεί να βοηθήσει να αποφύγουμε την αποτυχία.
Προτείνουμε τρεις τρόπους για να προσεγγίσουμε την λύση ενός προβλήματος.
1.Το αποτέλεσμα μιας συνηθισμένης προσέγγισης,δηλαδή η απάντηση μπορεί να είναι η να μην είναι αξιόλογη.Ανακαλύψτε την.Βρείτε την,ερευνήστε την πιθανότητα η απάντηση να μην είναι μοναδική.Αν επιτευχθούν περισσότερες από μια απαντήσεις, αποφασίστε για την αποδοχή κάθε εναλλακτικής εκδοχής.Όπου είναι δυνατόν εκτιμήστε την απάντηση πριν από την λύση.Η συνήθεια της εκτίμησης κατά την διάρκεια της επίλυσης μας βοηθά στην πρόληψη σοβαρών υπολογιστικών λαθών.
2.Ελεγξτε πιθανούς περιορισμούς στα δεδομένα ή στα συμπεράσματα.Αλλάξτε τα δεδομένα με διάφορους τρόπους και μελετήσετε την επίδραση τέτοιων αλλαγών στο αρχικό αποτέλεσμα.
3.Η οξυδέρκεια που απαιτείται για την επίλυση ενός γενικευμένου προβλήματος,κάποιες φορές αποκτάται από την εξέταση ειδικών περιπτώσεων.Αντίστροφα, μια ειδική περίπτωση, η οποία δύσκολα επιλύεται με άμεση προσπάθεια,μερικές φορές οδηγείται σε εύκολο δρόμο αν ειδωθεί ως γενική περίπτωση.»
Challenging problems in Algebra and Geometry,A. Posamentier,C. Salkin




Άσκηση συνδυαστικής
Θέλω να την λύσω;
ΝΑΙ
ΟΧΙ
Θα την λύσω παρότι είναι πολύ πιθανό στο τέλος να μην ξέρω αν είναι σωστή!
Την αφήνω για μετά και πάω να φάω!
Κ στοιχεία ενός συνόλου τοποθετούνται σε ν θέσεις
κ <ν
κ =ν
ΜΕΤΑΘΕΣΕΙΣ
ΑΠΛΕΣ ΜΕΤΑΘΕΣΕΙΣ $M_\nu = \nu!$
ΚΥΚΛΙΚΕΣ ΜΕΤΑΘΕΣΕΙΣ $K_\nu = (\nu - 1)!$
Η άσκηση εξακολουθεί να περιμένει να την λύσεις....
ΥΠΑΡΧΕΙ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ;
ΝΑΙ
ΟΧΙ
ΠΑΙΖΕΙ ΡΟΛΟ Η ΣΕΙΡΑ ΤΟΥΣ;
ΝΑΙ
ΟΧΙ
ΠΑΙΖΕΙ ΡΟΛΟ Η ΣΕΙΡΑ ΤΟΥΣ;
ΝΑΙ
ΟΧΙ
ΔΙΑΤΑΞΕΙΣ ΜΕ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ $R\Delta_\kappa^\nu = \kappa^\nu$
ΣΥΝΔΥΑΣΜΟΙ ΜΕ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ $\begin{bmatrix}\nu\\ \kappa\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\nu+\kappa-1\\ \kappa\end{bmatrix}$
ΔΙΑΤΑΞΕΙΣ $\Delta_\kappa^\nu = \frac{\nu!}{(\nu-\kappa)!}$
ΣΥΝΔΥΑΣΜΟΙ $C_\kappa^\nu = \frac{\nu!}{\kappa!(\nu-\kappa)!}$

ΕΡΓΑΛΕΙΟΘΗΚΗ ΓΙΑ ΔΙΑΓΩΝΙΣΤΙΚΑ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ



Μαθηματική επαγωγή VS Επαγωγής

«Είναι κεφαλαιώδες λάθος να σχηματίζεις θεωρίες προτού να έχεις όλα τα δεδομένα. Επηρεάζει την κρίση σου.»

Σπουδή στο κόκκινο, Σερ Άρθουρ Κοναν Ντοιλ

Έχετε διαβάσει τα βιβλία του Ντόιλ με ήρωα τον αρχετυπικό ντετέκτιβ Σέρλοκ Χολμς;Ο Χολμς πατάει σε ενδείξεις, στο κοφτερό του μάτι, στην οξυδερκή παρατήρηση και οδηγείται σε μια θεωρία που εξηγεί πάντα με απόλυτη επιτυχία «*ποιος το έκανε;*».Ο ίδιος εξομολογείται ότι εκτός από το βιολί, η επαγωγική παρατήρηση είναι ευχαρίστηση του.Η επαγωγή σαν μέθοδος στις επιστήμες είναι ακριβώς αυτό: Η ανακάλυψη γενικών νόμων μέσω της παρατήρησης και του συνδυασμού ειδικών περιπτώσεων (παραδειγμάτων).Από την άλλη στα μαθηματικά η επαγωγή είναι κάτι εντελώς άλλο.Μια στέρεη μαθηματική αποδεικτική μέθοδος.Μπορεί η ονομασία να είναι κοινή άλλα πρακτικά δεν έχουν μεγάλη σχέση.Όταν όμως χρησιμοποιηθούν συνδυαστικά έχουμε αξιοθαύμαστα αποτελέσματα.

Ένα παράδειγμα,που θα διασαφηνίσει την διαφορά ανάμεσα στην επαγωγή και την μαθηματική επαγωγή.

Επαγωγή

Δίνεται:

$$1=1$$
$$1+8=9$$
$$1+8+27=36$$

Τι παρατηρείτε; Οι παραπάνω ισότητες γράφονται:

$$1^3=1^2$$
$$1^3+2^3=3^2$$
$$1^3+2^3+3^3=6^2$$

Το άθροισμα των παραπάνω διαδοχικών κύβων είναι τέλειο τετράγωνο. Το μοτίβο συνεχίζεται;Βρίσκουμε μερικά ακόμα.

$$1^3=1^2$$

$$1^3+2^3=3^2$$

$$1^3+2^3+3^3=6^2$$

$$1^3+2^3+3^3+4^3=10^2$$

$$1^3+2^3+3^3+4^3+5^3=15^2$$

$$1^3+2^3+3^3+4^3+5^3+6^3=21^2$$

Μια ισχυρή ένδειξη ότι κάτι έχουμε εδώ.Οδηγούμαστε στο συμπέρασμα ότι πιθανότατα να ισχύει:

$$1^3+2^3+3^3+4^3+\ldots\ldots+\nu^3=\kappa^2$$

Φυσικά δεν έχουμε αποδείξει τίποτα, διαπιστώσαμε ότι ισχύει για ν=1,2,3,4.Ο Σέρλοκ Χολμς θα είχε ήδη ισχυριστεί ότι ισχύει,αυτός όμως είχε τον σεναριογράφο με το μέρος του,ένας αστρονόμος σε μια ανάλογη περίπτωση έτσι και διαπίστωνε μια ιδιότητα

για τα αστέρια ενός γαλαξία θα κοίταζε να επιβεβαιώσει την πεποίθηση του βρίσκοντας ολοένα και περισσότερα παραδείγματα και θα τα ταξινομούσε.

$$1^3=1^2$$

$$1^3+2^3=3^2$$

$$1^3+2^3+3^3=6^2$$

$$1^3+2^3+3^3+4^3=10^2$$

$$1^3+2^3+3^3+4^3+5^3=15^2$$

$$1^3+2^3+3^3+4^3+5^3+6^3=21^2$$

$$1^3+2^3+3^3+4^3+5^3+6^3+7^3=28^2$$

$$1^3+2^3+3^3+4^3+5^3+6^3+7^3+8^3=36^2$$

Καλά μέχρι εδώ,υπάρχει συγκεκριμένο μοτίβο στις βάσεις των δυνάμεων και στην βάση του τετραγώνου.Δείτε:

$1^3=1^2$	$1^3=1^2$
$1^3+2^3=3^2$	$1^3+2^3=(1+2)^2$
$1^3+2^3+3^3=6^2$	$1^3+2^3+3^3=(1+2+3)^2$
$1^3+2^3+3^3+4^3=10^2$	$1^3+2^3+3^3+4^3=(1+2+3+4)^2$
$1^3+2^3+3^3+4^3+5^3=15^2$	$1^3+2^3+3^3+4^3+5^3=(1+2+3+4+5)^2$
$1^3+2^3+3^3+4^3+5^3+6^3=21^2$	$1^3+2^3+3^3+4^3+5^3+6^3=(1+2+3+4+5+6)^2$
$1^3+2^3+3^3+4^3+5^3+6^3+7^3=28^2$	$1^3+2^3+3^3+4^3+5^3+6^3+7^3=(1+2+3+4+5+6+7)^2$
$1^3+2^3+3^3+4^3+5^3+6^3+7^3+8^3=36^2$	$1^3+2^3+3^3+4^3+5^3+6^3+7^3+8^3=(1+2+3+4+5+6+7)^2$

Κατόπιν αυτού μάλλον είμαστε σε θέση να διατυπώσουμε την εικασία.Προσέξτε ακόμα δεν έχουμε απόδειξη. Βλέπετε, οι αποδείξεις έχουν την κακιά συνήθεια να ανθίστανται σθεναρά στην θωπεία των παραδειγμάτων. Έχουμε λοιπόν:

Για κάθε φυσικό $\nu \geq 1$ ισχύει:

$$\mathbf{1^3+2^3+3^3+4^3+\ldots\ldots+\nu^3=(1+2+3+4+\ldots.\nu)^2}$$

Εδώ σταματάει η επαγωγή, παρατηρήσαμε ή αναγνωρίσαμε ένα υποτιθέμενο μοτίβο και το γενικεύσαμε.Ο Χολμς σε αυτό το σημείο θα ανακοίνωνε στην ομήγυρη με βεβαιότητα ποιος το έκανε. Η επαγωγή κατ επέκταση είναι ατελής-στερείται αποδείξεων- και ίσως λίγο μονοκόμματη μέθοδος εξαγωγής συμπερασμάτων.Εδώ που τα λέμε μυρίζει λίγο σοφιστεία.

Ο Πινγκ Πονγκ σημειώνει….

Η απλή παρατήρηση ότι ενας ισχυρισμός,μια σχέση ισχύει για πολλές αρχικές τιμές του ν δεν εξασφαλίζει την ισχύ της προς απόδειξη σχέσης.Δεν πρωταγωνιστούμε στα βιβλία του Ντοιλ.Μερικές φορές το μικρότερο αντιπαράδειγμα που καταρρίπτει την σχέση μπορεί να είναι τεράστιος αριθμός.Χαρακτηριστικό παράδειγμα, οι αριθμοί $\nu^{17}+9$ *και* $(\nu+1)^{17}+9$ *είναι σχετικά πρώτοι για ν =1, 2, 3, . . . διαδοχικά, και για πολλούς ακόμη όρους παρακάτω. Είναι όμως πάντα σχετικά πρώτοι οι δύο αριθμοί;*

Όχι, και το πρώτο παράδειγμα για το αντίθετο είναι η περίπτωση όπου

ν = 8424432925592889329288197322308900672459420460792433.

(https://primes.utm.edu/glossary/page.php?sort=LawOfSmall)



Μαθηματική επαγωγή.

Ας υποθέσουμε ότι έχουμε μια ατελείωτη (άπειρη;) σειρά από κοψοχέρηδες ψηφοφόρους του κόμματος Χ. Όλοι έχουν την αδήριτη ανάγκη να τιμωρηθούν. Στέκονται στην σειρά από τον πρώτο μέχρι τον....νιοστό. Απέχουν όλοι τους μια απόσταση λίγων εκατοστών.Συμβαίνει το εξής: Ο πρώτος χαστουκίζει τον δεύτερο και εξασφαλίζουμε ότι για καθένα από αυτούς έστω ο κ θα χαστούκιζε τον επόμενο κ+1.Αυτές οι δυο προϋποθέσεις μας εξασφαλίζουν ότι όλοι θα φάνε το χαστούκι τους εκτός φυσικά από τον πρώτο.(θα τον τιμωρήσει η ζωή αυτόν).Δείτε την αναλογία.

Αν έχουμε ένα μαθηματικό ισχυρισμό Ρ(ν) ο οποίος:

● ισχύει για ν=1 δηλαδή ο *P(1)* είναι αληθής,

● Αν ισχύει για τυχαίο ν και ισχύει για ν+1 τότε θα ισχύει για κάθε ν (δηλαδή αν η αλήθεια του *P(ν)* συνεπάγεται την αλήθεια του *P(ν +1)* για κάθε *ν).*

Τότε ο ισχυρισμός *P(ν)* αληθεύει για όλους τους θετικούς ακεραίους *ν.*

Δηλαδή,

Έστω ο ισχυρισμός

$$1+2+3+4+....+\nu=\frac{\nu(\nu+1)}{2} \qquad \text{για κάθε } \nu\ge 1$$

Για ν=1: $1=\frac{1(1+1)}{2}$ ισχύει

Έστω ότι ισχύει για ν=κ : $1+2+3+4+....+\kappa=\frac{\kappa(\kappa+1)}{2}$ (1)

Θα δείξουμε ότι ισχύει για ν=κ+1: $1+2+3+4+....+\kappa+(\kappa+1)=\frac{(\kappa+1)(\kappa+2)}{2}$ (2)

Προσθέτουμε στα δυο μελη της (1) που γνωρίζουμε ότι ισχύει, τον όρο κ+1

$$1+2+3+4+....+\kappa+(\kappa+1)=\frac{\kappa(\kappa+1)}{2}+(\kappa+1) \quad \text{ή}$$

$$1+2+3+4+....+\kappa+(\kappa+1)=\frac{\kappa(\kappa+1)}{2}+\frac{2(\kappa+1)}{2} \quad \text{ή}$$

$$1+2+3+4+....+\kappa+(\kappa+1)=\frac{\kappa(\kappa+1)+2(\kappa+1)}{2} \quad ή$$

$$1+2+3+4+....+\kappa+(\kappa+1)=\frac{(\kappa+2)(\kappa+1)}{2}$$

που είναι η (2) συνεπώς αποδείχτηκε.

Η τέλεια επαγωγή είναι μια αποδεικτική μέθοδος που μπορεί να εφαρμοστεί για την απόδειξη προτασιακών τύπων ,αναφερομένων στο σύνολο των φυσικών αριθμών. Χρησιμοποιείται σε όλο το φάσμα των μαθηματικών: την συναντάμε σε μεγάλο εύρος αντικειμένων όπως στην Άλγεβρα, στην Γεωμετρία, στην Τριγωνομετρία, στην Ανάλυση, στην Συνδυαστική, στην Θεωρία Γραφημάτων και αλλού.



Επανερχόμαστε στο αρχικό πρόβλημα.Πρέπει να δείξουμε ότι:

Για κάθε φυσικό $\nu \geq 1$ ισχύει:

$$1^3+2^3+3^3+4^3+......+ \nu^3=(1+2+3+4+....\nu)^2$$

ή

Για κάθε φυσικό $\nu \geq 1$ ισχύει:

$$1^3+2^3+3^3+4^3+....+\nu^3=\left(\frac{\nu(\nu+1)}{2}\right)^2$$

Πάλι την ίδια μέθοδο της τέλειας επαγωγής θα χρησιμοποιήσουμε

Για ν=1 : $1^3=\left(\frac{1(1+1)}{2}\right)^2$ ισχύει

Έστω ότι ισχύει για ν=κ : $1^3+2^3+3^3+4^3+....+\kappa^3=\left(\frac{\kappa(\kappa+1)}{2}\right)^2$ (1)

Θα δείξουμε ότι ισχύει για ν=κ+1:

$$1^3+2^3+3^3+4^3+....+\kappa^3+(\kappa+1)^3=\left(\frac{(\kappa+1)(\kappa+2)}{2}\right)^2 \quad (2)$$

Προσθέτουμε στα δυο μέλη της (1) που γνωρίζουμε ότι ισχύει τον όρο $(\kappa+1)^3$

$$1^3+2^3+3^3+4^3+....+\kappa^3+(\kappa+1)^3=\left(\frac{\kappa(\kappa+1)}{2}\right)^2+(\kappa+1)^3 \quad ή$$

$$1^3+2^3+3^3+4^3+....+\kappa^3+(\kappa+1)^3=(\kappa+1)^2\left(\frac{\kappa^2}{4}+(\kappa+1)\right) \quad ή$$

$$1^3+2^3+3^3+4^3+....+\kappa^3+(\kappa+1)^3=(\kappa+1)^2\left(\frac{\kappa^2}{4}+\frac{4\kappa+4}{4}\right) \quad ή$$

$$1^3+2^3+3^3+4^3+....+\kappa^3+(\kappa+1)^3=(\kappa+1)^2\left(\frac{\kappa+2}{2}\right)^2$$

που είναι η (2),συνεπώς αποδείχτηκε.

Όταν περνάμε από το στοιχείο κ στο στοιχείο κ+1 είναι πολύ σημαντικό να γνωρίζουμε ότι το κ+1 είναι το επόμενο του κ, κάτω από μια συγκεκριμένη σχέση διάταξης.



Και δυο παραδείγματα από την συνδυαστική γεωμετρία:

107.Να δείξετε ότι το πλήθος των διαγωνίων ενός κυρτού πολυγώνου με πλευρές $\nu\geq 3$ δίνεται από τον τύπο $\delta_\nu=\frac{\nu(\nu-3)}{2}$

-Για ν=3: $\delta_3=\frac{3(3-3)}{2}=0$ που ισχύει το τρίγωνο έχει 0 διαγωνίους.

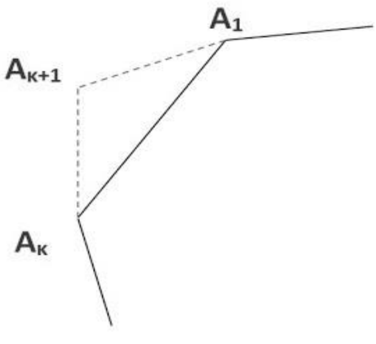
-Υποθέτουμε ότι ισχύει για ν= κ : $\delta_\kappa=\frac{\kappa(\kappa-3)}{2}$

-Θα δείξουμε ότι ισχύει για ν=κ+1: $\delta_{\kappa+1}=\frac{(\kappa+1)(\kappa-2)}{2}$

Έστω ότι έχουμε ένα πολύγωνο με κ πλευρές του αυτό έχει $\delta_\kappa=\frac{\kappa(\kappa-3)}{2}$ διαγώνιους

Ένα πολύγωνο με κ+1 πλευρές έχει όλες τις διαγώνιους του κ-γωνου συν επιπλέον τις διαγώνιους τις κορυφής $A_{\kappa+1}$ που είναι κ+1-3=κ-2 συν την πλευρά $A_\kappa A_1$ που γίνεται διαγώνιος. Έτσι:

$$\delta_{\kappa+1}=\delta_\kappa+\kappa-2+1=\frac{\kappa(\kappa-3)}{2}+\kappa-1=$$
$$\frac{\kappa(\kappa-3)+2\kappa-2}{2}=\frac{\kappa^2-3\kappa+2\kappa-2}{2}=$$
$$=\frac{\kappa^2-\kappa-2}{2}=\frac{(\kappa+1)(\kappa-2)}{2}$$



που είναι το ζητούμενο. ■

Έκτος από την απόδειξη ισοτήτων (ταυτοτήτων),με την μέθοδο της τέλειας επαγωγής είναι δυνατό να αποδείξουμε και ανισότητες.

108.Να αποδειχθεί ότι $3^{\nu} > \nu^2$ για κάθε $\nu \in \mathbb{N}$,με $\nu \geq 4$.

Λύση

Για $\nu = 4 : 3^4 > 4^2 \Leftrightarrow 81 > 16$ που ισχύει.

Έστω ότι ισχύει για $\nu = \kappa$: $3^{\kappa} > \kappa^2$ (1)

Θα δείξουμε ότι ισχύει για $\nu = \kappa + 1 : 3^{\kappa+1} > (\kappa+1)^2$ (2)

Έχουμε: $3^{\kappa+1} = 3 \cdot 3^{\kappa} > 3\kappa^2$.Αρκεί να αποδείξουμε ότι

$3\kappa^2 > (\kappa+1)^2 \Leftrightarrow 3\kappa^2 > \kappa^2 + 2\kappa + 1 \Leftrightarrow 2\kappa^2 > 2\kappa + 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2\kappa^2 - 2\kappa > 1 \Leftrightarrow 2\kappa(\kappa - 1) > 1$ (3)

Η (3) όμως ισχύει διότι $\kappa \geq 4 \Leftrightarrow \kappa - 1 \geq 3$ οπότε

$\kappa(\kappa-1) \geq 12 \Leftrightarrow 2\kappa(\kappa-1) \geq 24 > 1$ ■

109.Να βρείτε το λάθος στην ακόλουθη αποδεικτική διαδικασία.

«Να αποδείξετε ότι τα στοιχεία κάθε πεπερασμένου συνόλου είναι ίσα.
Απόδειξη
Χρησιμοποιούμε μαθηματική επαγωγή ως προς το πλήθος ν των στοιχείων τυχαίου συνόλου.

● *Για ν=1,προφανώς η πρόταση είναι αληθής.*
● *Έστω ότι τα στοιχεία κάθε συνόλου με κ στοιχεία είναι ίσα.*
● *Αν πάρουμε τώρα τυχαίο σύνολο με κ+1 στοιχεία,τότε, σύμφωνα με το προηγούμενο βήμα τα κ πρώτα και τα κ τελευταία στοιχεία θα είναι ίσα. Άρα όλα τα στοιχεία είναι ίσα.»*

Το λάθος έγκειται στο γεγονός ότι,ένα σύνολο με κ ίσα στοιχεία είναι μονοσύνολο. Έτσι, στο τρίτο βήμα το θεωρούμενο σύνολο έχει δυο ακριβώς στοιχεία και το συμπέρασμα ότι τα στοιχεία του είναι ίσα είναι αβάσιμο. ■

110.Δυο ανισώσεις από..τζάκι!

i.Αν $\alpha \geq -1$ και $\nu \in \mathbb{N}, \nu \geq 1$,να αποδείξετε ότι:

$(1+\alpha)^{\nu} \geq 1 + \nu \cdot \alpha$ ***(ανισότητα J.Bernoulli,1η μορφή)***

ii. Αν $\alpha \leq 1$ και $\nu \in \mathbb{N}, \nu \geq 1$,να αποδείξετε ότι:

$(1-\alpha)^{\nu} \geq 1 - \nu \cdot \alpha$ ***(ανισότητα J.Bernoulli,2η μορφή)***

Απόδειξη

i.Για ν=1: $(1+\alpha)^1 \geq 1 + 1 \cdot \alpha \Leftrightarrow 1 + \alpha \geq 1 + \alpha$, ισχύει (η ισότητα)

Έστω ότι ισχύει για ν=κ: $(1+\alpha)^{\kappa} \geq 1 + \kappa \cdot \alpha$ (1)

Θα δείξουμε ότι ισχύει για ν=κ+1 : $(1+\alpha)^{\kappa+1} \geq 1 + (\kappa+1) \cdot \alpha$

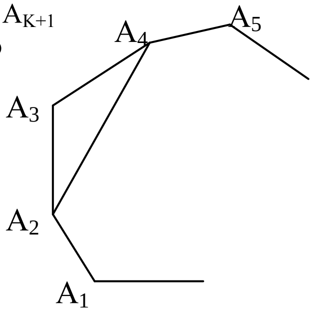
Έτσι από την (1) ,

$(1+\alpha)^{\kappa} \geq 1 + \kappa \cdot \alpha \overset{1+\alpha>0}{\Leftrightarrow} (1+\alpha)(1+\alpha)^{\kappa} \geq (1+\alpha)(1+\kappa \cdot \alpha)$,άρα αρκεί να δείξουμε ότι:

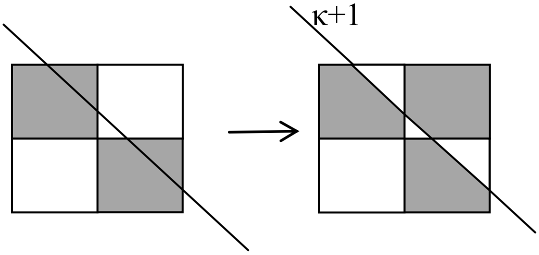
$(1+\alpha)\left(1+\kappa\alpha\right)\geq 1+(\kappa+1)\cdot\alpha \Leftrightarrow 1+\kappa\alpha+\alpha+\kappa\alpha^2 \geq 1+\kappa\alpha+\alpha \Leftrightarrow \kappa\alpha^2\geq 0$ που ι-σχύει.
Το ‘=’ ισχύει για ν=0 ,ν=1 και α=0.
ii. Επειδή $\alpha\leq 1 \Leftrightarrow -\alpha\geq -1$, τότε λόγω της (i), θα ισχύει:
$(1+(-\alpha))^{\nu}\geq 1+\nu\cdot(-\alpha) \Leftrightarrow (1-\alpha)^{\nu}\geq 1-\nu\alpha$ για κάθε $\nu\in\mathbb{N}, \nu\geq 1$. ■

111.Να δείξετε ότι το άθροισμα των εσωτερικών γωνιών ενός κυρτού ν-γωνου ($\nu\geq 3$) ισούται με (ν-2) 180^0 .

Χρησιμοποιούμε πάλι (sic) την μέθοδο της τέλειας επαγωγής.
Ισχύει για ν=3: $(3-2)\cdot 180^0 = 180^0$
Υποθέτουμε ότι ισχύει για ν=κ : $(\kappa-2)\cdot 180^0$ (1)
Θα δείξουμε ότι ισχύει για ν=κ+1 : $(\kappa-1)\cdot 180^0$
Αν έχουμε ένα κυρτό κ+1-γωνο $A_1A_2A_3\ldots A_{K+1}$,φέρνουμε το ευθύγραμμο τμήμα A_2A_4 και το χωρίζουμε σε ένα τρίγωνο $A_2A_3A_4$ και ένα κυρτό κ-γωνο $A_1A_2A_4A_5..A_{K+1}$ τότε το άθροισμα των γωνιών του $A_1A_2A_3\ldots A_{K+1}$ ισούται με το άθροισμα των γωνιών του κ-γωνου $A_1A_2A_4A_5..A_{K+1}$ ($(\kappa-2)\cdot 180^0$ *από (1)*)
και το άθροισμα των γωνιών του τρίγωνου $A_2A_3A_4$ (180°) :
$(\kappa-2)\cdot 180^0 + 180^o = (\kappa-1)\cdot 180^0$
που είναι το ζητούμενο. ■



112.Χωρίζουμε το επίπεδο σε περιοχές (χωρία) με ευθείες. Να δείξετε ότι είναι πάντα δυνατό με δυο χρώματα να χρωματίσουμε τις περιοχές έτσι ώστε γειτονι-κές περιοχές να μην έχουν το ίδιο χρώμα (όπως στην σκακιέρα).
Η εκφώνηση του προβλήματος μοιάζει να μην αφόρα φυσικούς αριθμούς, αλλά αν δοκιμάσουμε να χαράξουμε στο επίπεδο μια ευθεία, τότε δυο χρώματα αρκούν για το ζητούμενο,το ίδιο αν φέρουμε δυο ευθείες ,κ.ο.κ.
Θα αποδείξουμε τον ισχυρισμό:
«Αν χωρίσουμε το επίπεδο με ν ευθείες τότε οι περιοχές που προκύπτουν χρωματίζονται με δυο χρώματα έτσι ώστε γειτονικές περιοχές να μην έχουν το ίδιο χρώμα.»
-Ισχύει για μια ευθεία.
-Υποθέτουμε ότι ισχύει για κ ευθείες.
-Θα δείξουμε ότι ισχύει για κ+1 ευθείες .
Πως το χειριζόμαστε;Όταν έχουμε τις κ ευθείες και φέρουμε την κ+1 ευθεία τότε στο ένα ημιεπίπεδο από τα δυο που χωρίζει το επίπεδο η κ+1 ευθεία «αντιστρέφουμε» τον χρωματισμό.
Δείτε το παράδειγμα του σχήματος.

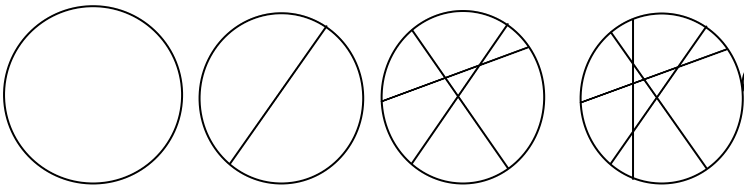


Οι περιοχές αριστερά της κ+1 γραμμής έχουν ακόμα τον επιθυμητό χρωματισμό, και οι περιοχές δεξιά από την κ+1 γραμμή επίσης έχουν επιθυμητό χρωματισμό (από την «αντιστροφή» των χρωμάτων).Οι γειτονικές περιοχές κατά μήκος της κ+1 γραμμής επίσης είναι διαφορετικά χρωματισμένες.Άρα ισχύει ο επιθυμητός χρωματισμός για τις κ+1 ευθείες. ■

Η ακολουθία του οκνηρού τεμαχιστή (Συνδυαστική γεωμετρία με πίτσες)

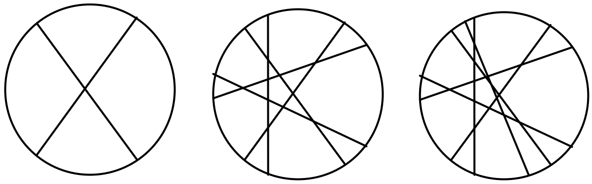
Σερβιτόρος: Πώς να σας κόψω την πίτσα ,κύριε;
Μεμάς: Κόψε την σε δυο κομμάτια, δεν πεινάω αρκετά για να φάω οκτώ!

Ο Γιάννης διακρίνεται από δυο βασικά χαρακτηριστικά είναι τεμπέλης και του αρέσουν οι πίτσες. Όπως και να έχει ο Γιάννης είναι αυτό που λέμε οπαδός της ήσσονος προσπάθειας. Παραγγέλλει πίτσα και προσπαθεί να την κόψει σε όσα κομμάτια επιθυμεί με τον λιγότερο αριθμό ευθειών τομών με το μαχαίρι.Δεν τον ενδιαφέρει το μέγεθος ή το σχήμα των κομματιών (έτσι και αλλιώς τα τρώει όλα). Έχει εντρυφήσει στην τεχνική να κόβεις την πίτσα σε όσο το δυνατόν περισσότερα κομμάτια με όσο το δυνατόν λιγότερα κοψίματα. Αφού καταβρόχθισε εκατοντάδες πίτσες, παρατήρησε:



0 τομές 1 κομμάτι — ***1 τομή 2 κομμάτια*** — ***3 τομές 7 κομμάτια*** — ***4 τομές 11 κομμάτια***





2 τομές 4 κομμάτια — ***5 τομές 16 κομμάτια*** — ***6 τομές 22 κομμάτια***

Καταγράφουμε τα αποτελέσματα σε ένα πίνακα:

Ν-οστο κόψιμο	0	1	2	3	4	5	6
Πλήθος Π(ν) κομματιών	1	2	4	7	11	16	22

Ο Γιάννης έτρωγε την πίτσα και σκεπτόταν αν υπήρχε τρόπος να υπολογίσει τον μέγιστο αριθμό κομματιών που προκύπτουν από ν ευθεία κοψίματα.Παρατήρησε καταρχήν,ότι για να προκύπτει ο μέγιστος αριθμός κομματιών κάθε ευθεία τομή με το μαχαίρι πρέπει να τέμνει όλες τις άλλες τομές,χωρίς τρεις οποιεσδήποτε τομές να τέμνονται στο ίδιο σημείο.

-Με το $1^{ο}$ κόψιμο προκύπτουν 2 κομμάτια δηλαδή προστίθεται 1 νέο κομμάτι.
-Με το $2^{ο}$ κόψιμο προκύπτουν 4 κομμάτια δηλαδή προστίθεται 2 νέα κομμάτια.
-Με το $3^{ο}$ κόψιμο προκύπτουν 7 κομμάτια δηλαδή προστίθεται 3 νέα κομμάτια.
-Με το $4^{ο}$ κόψιμο προκύπτουν 11 κομμάτια δηλαδή προστίθεται 4 νέα κομμάτια.

Το μοτίβο αρχίζει να γίνεται εμφανές,με το ν-οστο κόψιμο στα ήδη υπάρχοντα κομμάτια.Προστίθενται ν κομμάτια πίτσας.Είναι λογικό καθώς κάθε νέα τομή θα τέμνει τις ν-1 προηγούμενες και τα ν-1 σημεία τομής θα την διαιρούν σε ν ευθύγραμμα τμήματα ,το καθένα από αυτά θα χωρίζει τα υπάρχοντα κομμάτια σε δυο μέρη. Έτσι προστίθενται ν νέα κομμάτια.

Ο Γιάννης σκέφτηκε ότι αν Π(ν) είναι το συνολικό πλήθος των κομματιών που προκύπτουν από την νιοστή τομή με το μαχαίρι θα ισχύει ο αναδρομικός τύπος:

$$\Pi(\nu)= \Pi(\nu-1)+\nu \text{ , } \nu=0,1,2\ldots.$$

Δεν του αρκούσε, ήθελε έναν τύπο που για δοσμένη τιμή του ν να επιστρέφει τον αριθμό των κομματιών.Τότε, σκέφτηκε ως εξής:

Για ν=1 ισχύει : $\Pi(1)= \Pi(0)+1$
Για ν=2 ισχύει : $\Pi(2)= \Pi(1)+2$
Για ν=3 ισχύει : $\Pi(3)= \Pi(2)+3$
……...
Για ν=ν ισχύει : $\Pi(\nu)= \Pi(\nu-1)+\nu$

Προσθέτουμε κατά μέλη:

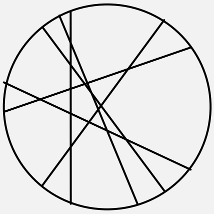
$\Pi(1)+\Pi(2)+\Pi(3)+\ldots +\Pi(\nu-1)+\Pi(\nu)=\Pi(0)+\Pi(1)+1+\Pi(2)+2+\Pi(3)+3+\ldots\Pi(\nu-1)+\nu$

$\Pi(\nu)=\Pi(0)+1+ 2+ 3..+ \nu$ (αλλά $1+ 2+ 3..+ \nu =\nu(\nu+1)/2$)

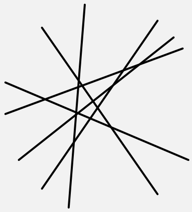
$\Pi(\nu)=1+\dfrac{\nu(\nu+1)}{2}$ ή $\Pi(\nu)=\dfrac{2+\nu(\nu+1)}{2}$ ή $\Pi(\nu)=\dfrac{\nu^2+\nu+2}{2}$

Άρα ο μέγιστος αριθμός κομματιών Π(ν) που μπορούν να προκύψουν με ν ευθεία κοψίματα σε μια πίτσα είναι $\dfrac{\nu^2+\nu+2}{2}$.

Βέβαια,για να πούμε την αλήθεια, ο Γιάννης δεν ήταν ο πρώτος που μελέτησε το πρόβλημα η αρχική του μορφή του προβλήματος μελετήθηκε από τον Ελβετό μαθηματικό Jacob Steiner(1796-1863) με ελαφρώς διαφορετική διατύπωση.Η πίτσα του Steiner ήταν άπειρη(ο Γιάννης πολύ συχνά ονειρευόταν μια πίτσα απείρων διαστάσεων) δηλαδή ένα επίπεδο και αναρωτήθηκε ποιος είναι μεγαλύτερος αριθμός από χωρία-τομείς στα οποία θα χωριζόταν το επίπεδο με ν ευθείες.Στο παρακάτω σχήμα η προφανής αναλογία:



6 τομές
22 κομμάτια
Πρόβλημα Γιάννης



6 ευθείες
22 χωρία τομείς
Πρόβλημα Steiner



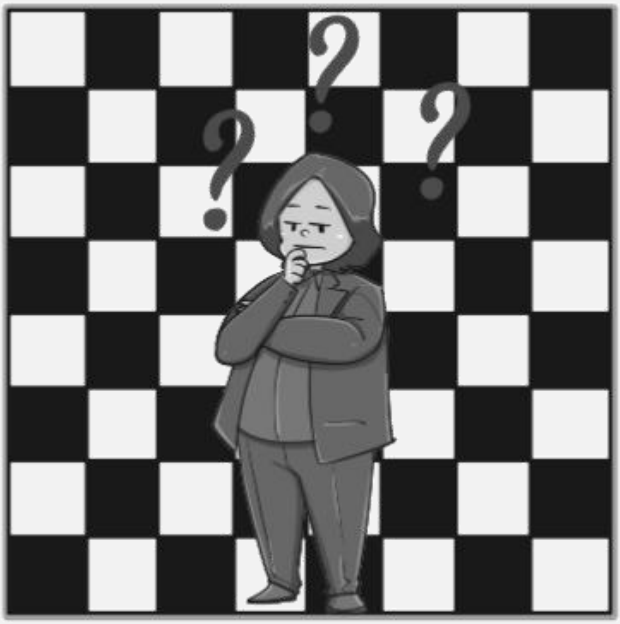
Jacob Steiner (1796-1863)

Η ακολουθία 1,2,4,7,11,16,22,.. με τους μέγιστους αριθμούς επιπέδων χωρίων που μπορούν να προκύψουν με ν ευθείες τομές σε οποιαδήποτε πίτσα ή άλλο παρεμφερές γευστικό έδεσμα (τηγανίτα,πίτα,..) ονομάζεται *Ακολουθία του οκνηρού τεμαχιστή πίτσας* (the Lazy Caterer's sequence). ■

Συνδυαστική γεωμετρία,προβλήματα χρωματισμών

Ο Άντριου Γουάιλς,ο μαθηματικός που κατόρθωσε να αποδείξει το τελευταίο θεώρημα του Φερμά περιγράφει,τι αισθάνεται ο μαθηματικός από την στιγμή που έρχεται αντιμέτωπος με ένα άλυτο πρόβλημα:

«Ίσως ο καλύτερος τρόπος για να περιγράψω την εμπειρία μου ως μαθηματικός είναι ο εξής:φανταστείτε ότι μπαίνετε σε μια σκοτεινή έπαυλη.Περνάτε στο πρώτο δωμάτιο το οποίο είναι κατασκότεινο.Σκοντάφτετε και πέφτετε πάνω στα έπιπλα, αλλά την ίδια στιγμή μαθαίνετε που βρίσκεται το καθετί. Στο τέλος ,ίσως μετά από αρκετούς μήνες,βρίσκεστε επιτέλους τον διακόπτη, τον πατάτε, και ξάφνου,τα πάντα φωτίζονται και ξέρετε που ακριβώς είσαστε!!»



Προβλήματα χρωματισμού

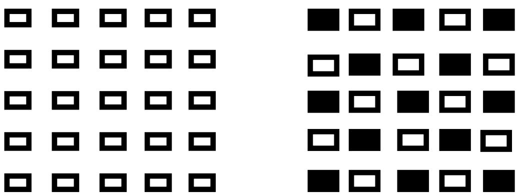
-Τι κάνεις άμα έχεις ένα αδύνατο πρόβλημα;
-Τα βάφεις μαύρα!

Ορισμένα προβλήματα που αφορούν την συνδυαστική γεωμετρία –και όχι μόνο- μπορούν να λυθούν με τον χρωματισμό ενός σχήματος.Μέσω του χρωματισμού συνήθως μπορούμε να απαντήσουμε «αρνητικά» ως προς το αν είναι δυνατό να ικανοποιούνται οι απαιτήσεις του προβλήματος.Πρόκειται για κομψές και ευφυείς λύσεις που δίνουν απαντήσεις σε προβλήματα όταν άλλες προσεγγίσεις είναι στρυφνές και δύσκολες.Όμως,τα μαθηματικά προβλήματα είναι σαν το κολύμπι όσο και αν σε κατατοπίζουν για αυτό θα πρέπει κάποια στιγμή να μπεις το νερό!
Ας δούμε μερικά παραδείγματα κλιμακούμενης δυσκολίας.

113.Στο Γυμνάσιο της Λοξολάνδης σε μια σχολική αίθουσα υπάρχουν 25 θρανία του ενός ατόμου,διατεταγμένα σε 5 γραμμές των 5 θρανίων η καθεμία, σχηματίζοντας ένα τετράγωνο.Την Τρίτη στην τάξη ήρθε μια νέα δασκάλα η οποία ,έδωσε οδηγίες στους μαθητές να αλλάξουν όλοι τους θέση με όσο το δυνατόν λιγότερες μετακινήσεις.Για αυτό τους είπε: *«ο καθένας τους να μετακινηθεί κατά ένα μόνο θρανίο, είτε μπροστά, είτε πίσω,είτε αριστερά, είτε δεξιά.»*Το έκαναν όλοι οι μαθητές αλλά πρέπει να σημειώσουμε ότι την ημέρα εκείνη έλειπε ένας μαθητής,ο Γιάννης και το θρανίο του έμεινε άδειο.Την επόμενη μέρα ο Γιάννης ήρθε στο σχολείο και όταν κάθισαν όλοι η δασκάλα είπε ξανά στα παιδιά να μετακινηθούν ξανά όλοι, κατά ένα θρανίο, είτε μπροστά, είτε πίσω, είτε αριστερά, είτε δεξιά. Ο Γιάννης όμως της είπε ότι αυτό που τους ζητούσε, δεν ήταν δυνατό να γίνει και…κατέληξε στο γραφείο του Γυμνασιάρχη.Μπορείς να αιτιολογήσεις γιατί ο Γιάννης είχε δίκιο.*(Mensa 1978)*

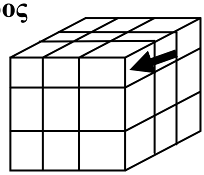
Λύση

Ας κάνουμε ένα σχήμα με τα 25 θρανία,χρωματίζοντας εναλλάξ τα γειτονικά θρανία άσπρο-μαύρο.



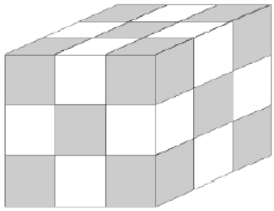
Παρατηρούμε ότι έχουμε 13 θρανία μαύρου χρώματος και 12 θρανία άσπρου χρώματος.Σύμφωνα με τις οδηγίες της δασκάλας,ο κάθε μαθητής θα μετακινούνταν σε θρανίο διαφορετικού χρώματος.Την πρώτη μέρα αυτό ήταν δυνατό γιατί υπήρχαν 12 μαθητές σε άσπρα θρανία και 12 μαθητές σε 12 μαύρα. Την δεύτερη μέρα όμως θα υπάρχουν 13 μαθητές σε θρανίο μαύρου χρώματος και 12 μαθητές άσπρου χρώματος οπότε είναι αδύνατο κατά τις οδηγίες της δασκάλας,κάθε μαθητής να μεταβεί σε γειτονικό θρανίο διαφορετικού χρώματος.
Άρα είχε δίκιο ο Γιάννης ότι ήταν αδύνατο και κακώς τον πήγαν στο γραφείο! ■

114.Ένα ποντίκι «ροκανίζει» το δρόμο του σε ένα 3x3x3 κυβικό τυρί διασχίζοντας διαδοχικά και τους 27 μικρούς κύβους που αποτελούν το κυβικό τυρί. Το ποντίκι μπορεί να προχωρεί «τρώγοντας» μόνο σε κάποιο γειτονικό μικρό κύβο που δεν έχει φάει, δεν μπορεί να επιστρέψει σε «φαγωμένο» μέρος και δεν μπορεί να κινηθεί διαγώνια.Το ερώτημα είναι: αν το ποντίκι ξεκινήσει από ένα κύβο στην γωνία όπως φαίνεται στο σχήμα μπορεί να ακολουθήσει μια διαδρομή που θα καταλήγει στο κέντρο του τυριού;



Λύση

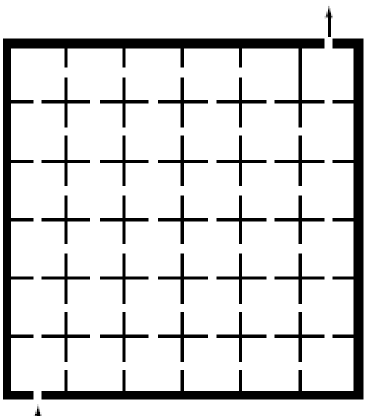
Χρωματίζουμε τους κύβους του τυριού έτσι ώστε κάθε δυο κύβοι που έχουν κοινή έδρα έχουν διαφορετικά χρώματα (άσπρο-μαύρο).Τους τέσσερεις γωνιακούς μικρούς κύβους τους χρωματίζουμε μαύρους. (βλέπε σχήμα). Ο ποντικός πρέπει να διασχίσει 27 κύβους ξεκινώντας από ένα μαύρο κύβο και το χρώμα στην διαδρομή του θα εναλλάσσεται διαδοχικά (μαύρο-άσπρο-μαύρο…).Ο αριθμός 27 είναι περιττός αριθμός άρα θα καταλήξει σε μαύρο κύβο,αλλά ο κύβος στο κέντρο του τυριού είναι άσπρος,κατά συνέπεια είναι αδύνατη η διαδρομή που ζητείται από το πρόβλημα.



■

Ένα παράδειγμα του ιδίου φυράματος.

115. Μια δημόσια υπηρεσία σε μια «μακρινή» χώρα στεγάζεται σε ένα κτίριο που έχει μόνο μια είσοδο και μια έξοδο και αποτελείται από 36 χώρους γραφείων.Το κτίριο διαθέτει από μια πόρτα σε κάθε εσωτερικό τοίχο χώρου γραφείου (βλέπε σχήμα).

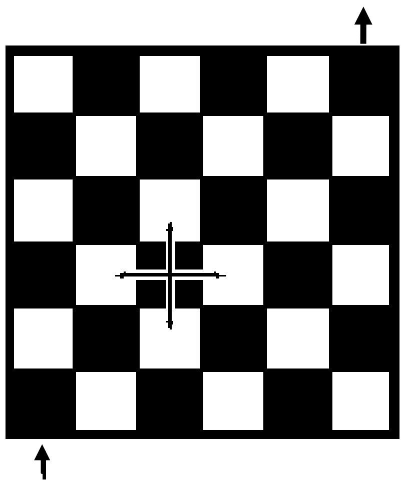


Ο Παπαδόπουλος πρέπει να πάρει ένα πιστοποιητικό, ο προϊστάμενος του είπε ότι θα του το δώσει αν μπει από την είσοδο του κτιρίου περάσει από κάθε χώρο γραφείου του κτιρίου μια ακριβώς φορά και βγει από την έξοδο.

Τι λέτε; Θα το πάρει το πιστοποιητικό ο Παπαδόπουλος;

Λύση

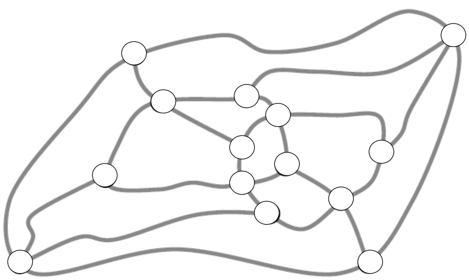
Είναι αδύνατο.Χρωματίζουμε τους 36 χώρους του κτίριου μαύρο-λευκό ,όπως η σκακιέρα.Η διαδρομή που ζητείται από τον Παπαδόπουλο θα ξεκινήσει από μαύρο κελί και το χρώμα θα εναλλάσσεται συνεχώς.Μαύρο-άσπρο-μαυρο,…,36 φορές άρα θα πρέπει να καταλήξει σε λευκό ,όμως το κελί εξόδου είναι μαύρο. Συνεπώς δεν υπάρχει η ζητούμενη διαδρομή.



■

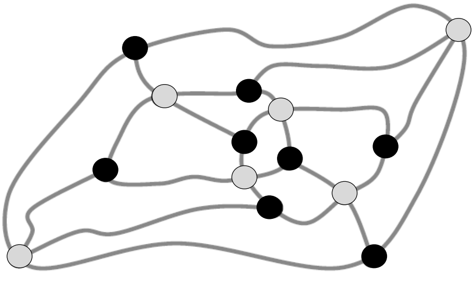
Η παραπάνω τεχνική εφαρμόζεται όχι μόνο σε πίνακες ή σκακιέρες αλλά και ευρύτερα.

116.Δείξτε στον χάρτη του σχήματος ότι δεν υπάρχει διαδρομή που να περνά από μία φορά από όλες τις πόλεις.



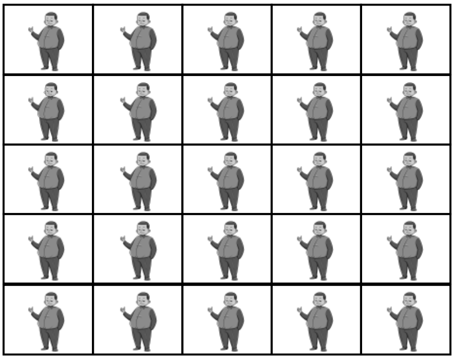
Λύση

Βάφουμε τις πόλεις με δύο χρώματα, γκρι και μαύρο , όπως στον διπλανό χάρτη. παρατηρούμε ότι από γκρι πόλη μεταβαίνουμε σε μαύρη και, αντίστροφα, από μαύρη σε γκρι.Συνολικά οι πόλεις είναι 14, από τις οποίες οι 8 είναι μαύρες και οι 6 γκρι. Συμπεραίνουμε ότι δεν υπάρχει διαδρομή όπως η ζητούμενη γιατί αυτό θα απαιτούσε 7 μαυρες και 7 γκρι πόλεις.

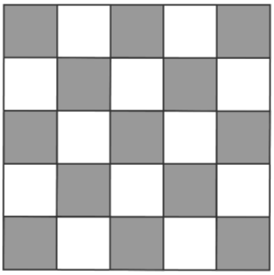


■

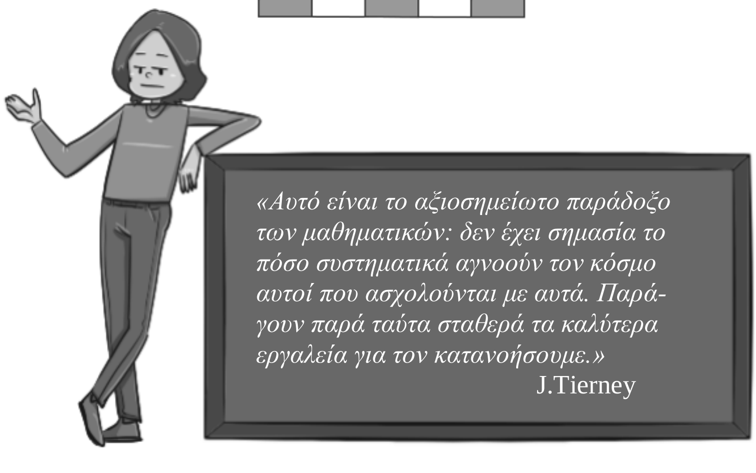
117.Ο Συνταγματάρχης Καραβανέας είναι διοικητής του στρατοπέδου της Λοξολάνδης και αντιμετωπίζει το εξής πρόβλημα:Εικοσιπέντε αξιωματικοί είναι τοποθετημένοι (ένας –ένας) στα τετραγωνικά διαμερίσματα του 5×5 τετραγωνικού οικοδομικού συγκροτήματος που αποτελεί τις κατοικίες των αξιωματικών. Στο σχήμα, βλέπουμε κάτοψη του τετραγωνικού συγκροτήματος των κατοικιών. Καθένας από αυτούς νομίζει ότι, κάθε γείτονας του, που συνορεύει μαζί του οριζοντίως ή καθέτως,
βρίσκεται σε καλύτερο δωμάτιο από αυτόν.
Είναι δυνατόν όλοι τους να τοποθετηθούν με τέτοιο τρόπο, ώστε καθένας να καταλήξεισε κάποιο από τα γειτονικά δωμάτια ενός πρώην γείτονά του και να είναι όλοι ευχαριστημένοι;



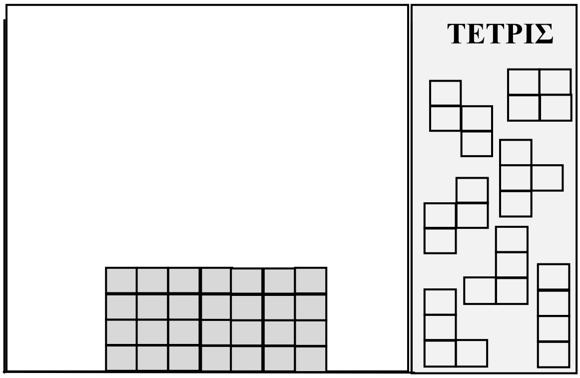
Λύση
Είναι αδύνατο για τον Καραβανέα να βρει λύση στο πρόβλημα.Χρωματίζουμε το 5x5 τετραγωνικό συγκρότημα με το συνήθη χρωματισμό της σκακιέρας όπως στο διπλανό σχήμα. Έχουμε 13 μαύρα και 12 λευκά τετράγωνα συνεπώς κάθε αξιωματικός μετά τη μεταφορά θα βρεθεί από δωμάτιο που είναι χρωματισμένο μαύρο σε δωμάτιο που είναι χρωματισμένο λευκό. Όμως μία τέτοια τοποθέτηση και των 25 αξιωματικών, δεν είναι δυνατή καθώς δεν υπάρχουν 13 λευκά διαμερίσματα.



■

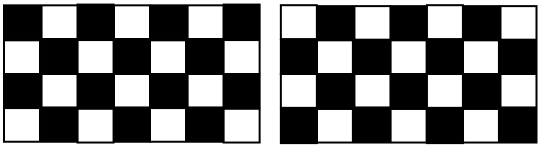


118.Στο παιχνίδι ΤΕΤΡΙΣ «πέφτουν» τετρόμινα (τα σχήματα στο έντονο γκρι πλαίσιο) και ο παίκτης τα οδηγεί, με την δυνατότητα να μπορεί να τα περιστρέψει έτσι ώστε να σχηματιστούν γραμμές που "εξαφανίζονται". Υπάρχουν επτά διαφορετικά τετρόμινα. Είναι δυνατόν κάποιος παίκτης με καθένα από τα επτά να σχηματίσει το ορθογώνιο 4x7 που φαίνεται στην οθόνη; Κάθε τετρόμινο πρέπει να χρησιμοποιηθεί μια φορά.



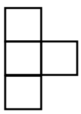
Λύση

Είναι αδύνατο.Αν χρωματίσουμε εναλλάξ (μαύρο–λευκό) τα κελιά του ορθογωνίου 4Χ7 έχουμε δυο δυνατότητες:



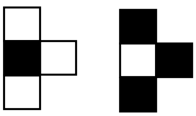
(σχήμα 1)

Και στις δυο όμως 14 μαύρα κελιά και 14 λευκά
Όμως αν χρωματίσουμε εναλλάξ τα τετρόμινα όλα τα τετρόμινα έχουν μισά και μισά άσπρα –μαύρα κελιά πλην ενός (σχήμα 2)



(σχήμα 2)

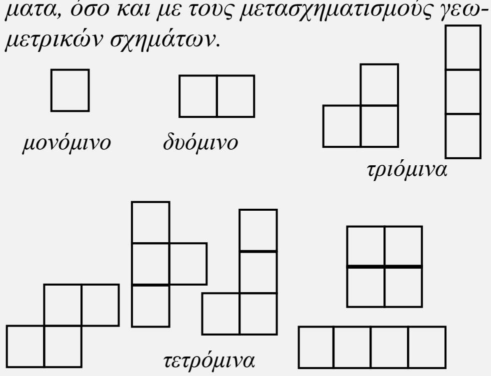
Έχουμε μόνο δυο δυνατότητες.



(σχήμα 3)

Με την πρώτη προκύπτουν 13 μαύρα 15 λευκά
Με την δεύτερη προκύπτουν 15 μαύρα 13 λευκά.
Σε κάθε περίπτωση είναι αδύνατο με την “συγκόλληση” με οποιοδήποτε τρόπο των επτά τετραόμινων να προκύψει το 4x7 του σχήματος (1) ■

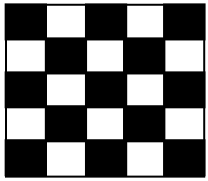
Τα πολυόμινα είναι επίπεδα γεωμετρικά σχήματα που προκύπτουν από την «συγκόλληση» ίσων τετραγώνων, ανάλογα με το πλήθος των τετραγώνων ονομάζονται μονόμινα, δυόμινα, τριόμινα κ.ο.κ. Το μονόμινα και το δυόμινα μπορούν να πάρουν μόνο μια μορφή όμως από κει και πέρα τα σχήματα ποικίλουν. Η μελέτη των πολυομίνων σχετίζεται με την κάλυψη ενός επίπεδου σχήματος από άλλα γεωμετρικά σχήματα, όσο και με τους μετασχηματισμούς γεωμετρικών σχημάτων.



119.Ένα τετράγωνο που έχει μήκος πλευράς 5 αποτελείται από 25 μικρότερα και ίσα μη επικαλυπτόμενα τετράγωνα. Είναι δυνατό να τοποθετήσουμε σε κάθε μικρό τετράγωνο από δυο σημεία με τους εξής κανόνες:
Ι.Κάθε σημείο να ανήκει σε πλευρά μικρού τετράγωνου όχι σε κορυφή του.
ΙΙ.Τα σημεία δεν πρέπει να τοποθετηθούν σε πλευρά του μεγάλου τετράγωνου, μόνο σε εσωτερικές θέσεις.

Λύση

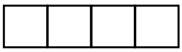
Θα χρησιμοποιήσουμε χρωματισμό. (Τι πρωτότυπο!)Χρωματίζουμε εναλλάξ τα μικρά τετράγωνα μαύρο-άσπρο.Προφανώς ο αριθμός των τετραγώνων άσπρου χρώματος (12) είναι διαφορετικός από τον αριθμό των τετραγώνων μαύρου χρώματος (13).Αυτο συμβαίνει γιατί το 5 είναι περιττός.



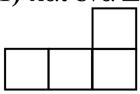
Παρατηρούμε ότι ο αριθμός των σημείων που ανήκουν στις πλευρές των άσπρων τετράγωνων είναι διπλάσιο από το πλήθος των τετραγώνων αυτών.Αντίστοιχα το πλήθος των σημείων που ανήκουν στις πλευρές των μαύρων τετραγώνων είναι διπλάσιο από το πλήθος των μαύρων τετραγώνων.Όμως ο ίδιος αριθμός σημείων πρέπει να ανήκει τόσο σε άσπρο όσο και μαύρα τετράγωνα.Επειδή αυτό είναι άτοπο , προκύπτει το συμπέρασμα, ότι η απάντηση στο ερώτημα είναι αρνητική.

Γενικεύεται για τετράγωνα μήκους πλευρά 2ν+1 ,με ν φυσικό αριθμό μεγαλύτερο ή ίσο του 2. ■

120.Να δείξετε ότι μια σκακιέρα 8x8 δεν μπορεί να καλυφτεί (χωρίς επικαλύψεις) με 15 τετρόμινα διαστάσεων 1x4 (σχήμα 1) και ένα L τετραόμινο (σχήμα 2) .



σχήμα 1



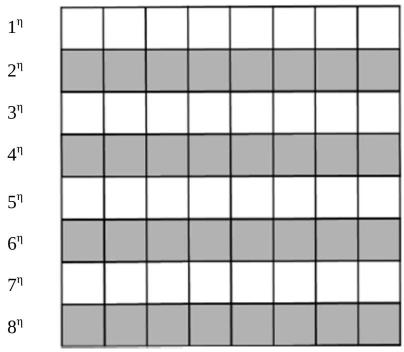
σχήμα 2

Λύση

Χρωματίζουμε τις άρτιες γραμμές με γκρι χρώμα και τις περιττές με λευκό (σχήμα 3).Κάθε 1x4 τετρόμινο καταλαμβάνει πάντα άρτιο αριθμό λευκών τετραγωνικών κελιών ανεξάρτητα από τον τρόπο τοποθέτησης (οριζόντια ή κατακόρυφα)

Το L τετρόμινο καταλαμβάνει περιττό αριθμό από λεύκα τετράγωνα.

Συνεπώς, αν ήταν δυνατή η κάλυψη της σκακιέρας τότε ο συνολικός αριθμός λευκών τετραγωνικών κελιών είναι περιττός, άτοπο εφόσον ο αριθμός των λευκών κελιών είναι 32.

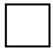


σχήμα 3

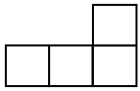
■

Ανάλογα επιλύεται και το προβλημα:

121.Να δείξετε ότι μια σκακιέρα 8x8 δεν μπορεί να καλυφτεί (χωρίς επικαλύψεις) με 4 τετραγωνα διαστάσεων 1x1 (σχήμα 1)και 15 L τετραόμινα (σχήμα 2) .



σχήμα 1



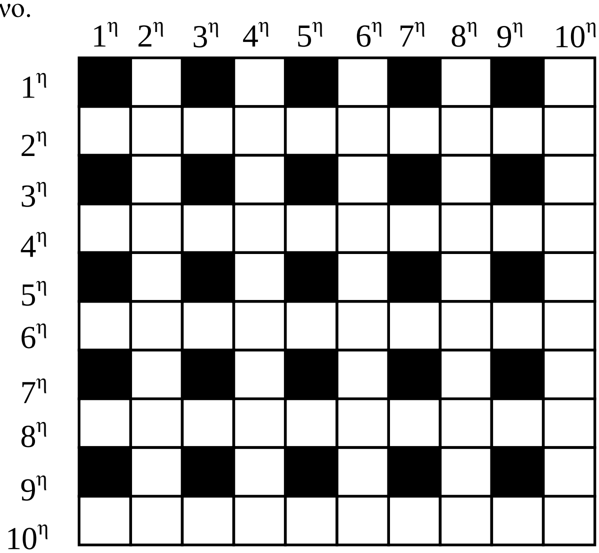
σχήμα 2

Μπορεί να καλυφτεί (χωρίς επικαλύψεις) ένα τετράγωνο 10x10 με 25 ορθογώνια 4x1;

Λύση

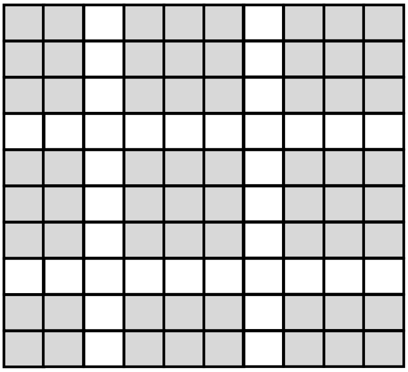
Αριθμούμε τις γραμμές και τις στήλες του τετραγώνου με τους αριθμούς 1,2,3..,10 (σχήμα 1).Βάφουμε μαύρα (sic) όλα τα τετράγωνα που ανήκουν ταυτόχρονα σε γραμμές και στήλες με περιττούς δείκτες.Συνολικά είναι 25.Καθε ορθογώνιο 4x1 καλύπτει είτε 0 είτε 2 μαύρα τετράγωνα,άρα άρτιο πλήθος, που δεν μπορεί ,κατά συνέπεια να είναι 25.Αυτα σημαίνει ότι 25 ορθογώνια των δεδομένων διαστάσεων δεν μπορούν να καλύψουν το τετράγωνο.





Σχήμα 1

Άλλος τρόπος είναι ο χρωματισμός να γίνει ως εξής:



Είναι αδύνατη η κάλυψη καθώς κάθε πλακίδιο αν καλύπτει μαύρα τετραγωνάκια θα καλύπτει ένα περιττό αριθμό άρα 25 πλακίδια δεν μπορούν να καλύψουν 64 (άρτιος) μαύρα τετραγωνάκια. ■

Ο χρωματισμός και ο Βαρονος Μινχάουζεν!

122.Ο Βαρόνος Μινχάουζεν διαθέτει μια χρονομηχανή η οποία του επιτρέπει να κάνει χρονικά άλματα σε όποιο έτος επιθυμεί αλλά μόνο συγκεκριμένες ημερομηνιες,από την 1^{η} Μαρτίου στην 1^{η} Νοέμβριου,από την 1^{η} Απριλίου στην 1^{η} Δεκεμβρίου, από την 1^{η} Μαΐου στην 1^{η} Ιανουαρίου κ.ο.κ. Δεν μπορεί να κάνει δυο χρονικά άλματα την ίδια μέρα.Ο βαρόνος αρχίζει και τελειώνει το ταξίδι την 1^{η} Απριλίου και ισχυρίζεται ότι έλειψε 26 μήνες. Να αποδείξετε ότι λέει ψέματα!

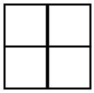
(Leningrad Math Olympiad 1983)

Λύση

Χρωματίζουμε τους μήνες.Τους Ιανουάριο, Μάιο και Σεπτέμβριο ως κόκκινους, Φεβρουάριο, Ιούνιο και Οκτώβριο ως κίτρινους, Μάρτιο ,Ιούλιο και Νοέμβριο μπλε και Απρίλιο Αύγουστο και Δεκέμβριο πράσινους.Αν ο Βαρόνος χρησιμοποιήσει την χρονομηχανή ,θα φτάσει σε μήνα ίδιου χρώματος και πρέπει να περιμένει ένα μήνα προτού χρησιμοποιήσει την χρονομηχανή για να φύγει ξανά. Άρα οι μήνες που θα περιμένει θα είναι με την εξής σειρά: κόκκινος, κίτρινος, μπλε και πράσινος και η σειρά γυρίζει κυκλικά.Εφόσον αναχωρεί και επιστρέφει πράσινο μήνα ,ο αριθμός των μηνών που ταξιδέψε συνολικά είναι πολλαπλάσιο του 4, άρα δεν μπορεί είναι 26! ■



123.Να δείξετε ότι μια σκακιέρα 8x8 δεν μπορεί να καλυφτεί (χωρίς επικαλύψεις) με 1 τετράγωνο διαστάσεων 2x2 και 15 ορθογώνια 1x4;



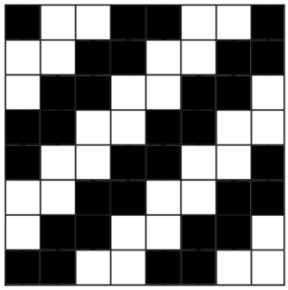
2x2



1x4

Λύση

Χρωματίζουμε την σκακιέρα ως εξής:

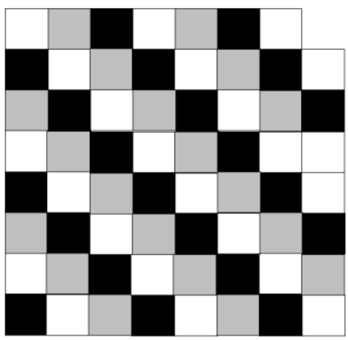


Με τον χρωματισμό δημιουργήσαμε 32 λεύκα και 32 μαύρα τετράγωνα .Όπως και να τοποθετηθεί (οριζοντίως ή καθέτως) το ορθογώνιο 1x4 θα καλύπτει 2 μαύρα και 2 λευκά τετράγωνα. Το τετράγωνο όμως 2x2 όπως και να τοποθετηθεί θα καλύπτει είτε 1 μαύρο είτε 3 λευκά κελιά ή είτε 3 μαύρα είτε 1 λευκό κελί. Ας υποθέσουμε ότι είναι δυνατό να γίνει η κάλυψη.Τότε τα 15 1x4 και το 1 2x2 τετράγωνο θα καλύπτουν συνολικά είτε 29 μαύρα είτε 31 λευκά κελιά είτε 31 μαύρα είτε 29 λευκά κελιά Δηλαδη τα 15 2x2 και το το ορθογώνιο 1x4 θα καλύπτουν ειτε 31 μαύρα είτε 33 λευκά κελιά είτε 33 μαύρα είτε 31 λευκά κελιά το όποιο αντιφάσκει με την υπογραμμισμένη φράση.

124.Αφαιρούμε ένα τετράγωνο από την γωνία μιας σκακιέρας 8x8.Πως μπορούμε να πλακοστρώσουμε τα υπόλοιπα 63 τετράγωνα χρησιμοποιώντας 21 ορθογώνια διαστάσεων 1x3;

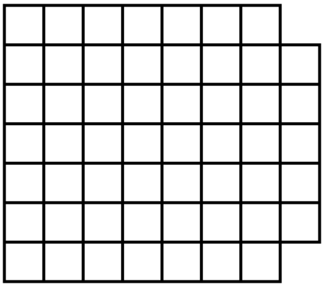
Λύση

Χρωματίζουμε τα τετράγωνα της σκακιέρας κατά τριάδες, όπως δείχνει το ακόλουθο σχήμα.Θα έχουμε 22,21,20 τετράγωνα ίδιου χρώματος,αντίστοιχα.Δεν μπορούμε να πλακοστρώσουμε την σκακιέρα με 21 ορθογώνια 1x3,επειδή κάθε κάλυψη-πλακόστρωση πρέπει να περιέχει μόνο ορθογώνια που χρωματίζονται και με τα τρία χρώματα.

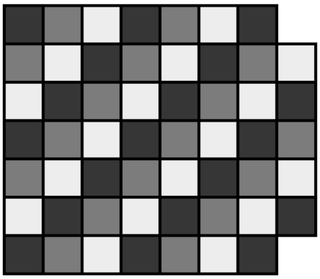


■

125.Έχουμε αφαιρέσει δυο τετραγωνάκια από το παρακάτω ορθογώνιο διάστασης 8x7.Είναι δυνατόν να καλύψουμε τα 54 τετραγωνάκια που απέμειναν με 16 ορθογώνια πλακίδια -το καθένα διάστασης 3x1;
(Σημειώνουμε ότι κανένα από τα ορθογώνια πλακίδια 3x1 δεν πρέπει να προεξέχει από το παραπάνω ελλιπές ορθογώνιο)



Λύση
Δεν είναι δυνατόν.Χρωματίζουμε κάθε τετραγωνάκι με ένα από τα χρώματα, μαύρο γκρι, λευκό όπως φαίνεται στο σχήμα. Για να καλύψουμε το σχήμα πλήρως, πρέπει, να αποτελείται από ίσο αριθμό μικρών τετραγώνων για καθένα από τα 3 χρώματα. Όμως έχουμε 17 γκρι τετραγωνάκια,18 λευκα και 19 μαυρα. Έτσι η κάλυψη είναι αδύνατη.



■

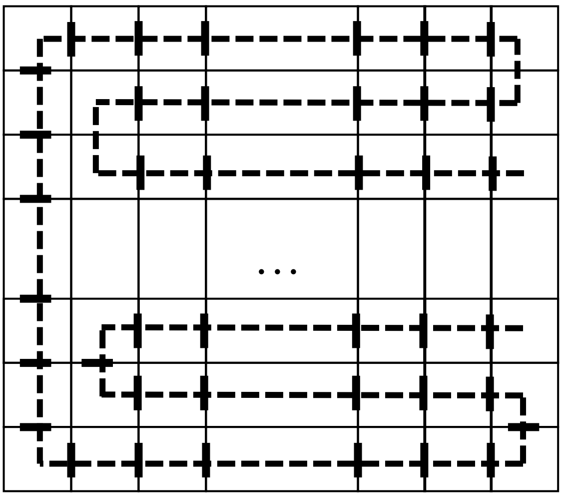
126.Δίνεται ένα σύνολο από 20 σημεία στο χώρο.Συνδέουμε τα σημεία αυτά με 101 ευθύγραμμα τμήματα. Να αποδείξετε ότι τουλάχιστον μια τριάδα από αυτές τις συνδέσεις σχηματίζει τρίγωνο. Να αποδείξετε ότι αν είχαμε συνδέσει 20 σημεία στο χώρο με 100 ευθύγραμμα τμήματα θα ήταν δυνατό να μην σχηματιστεί ούτε ένα τρίγωνο.
Λύση
Από τα 20 σημεία χρωματίζουμε 10 σημεία μαύρα και 10 σημεία άσπρα συνδέουμε κάθε άσπρο σημείο με όλα τα μαύρα σχηματίζονται 100 συνδέσεις οι οποίες δεν αποτελούν κάποιο τρίγωνο αν τώρα κάνουμε μια ακόμα σύνδεση π.χ μεταξύ δυο άσπρων σημείων ή μεταξύ δυο μαύρων τότε έχουμε τριγωνική σύνδεση. Γεγονός το οποίο δεν θα ίσχυε μόνο με 100 ευθύγραμμα τμήματα. ■

127. Η εταιρεία Barbamitsos Α.Ε θέλει να μετακομίσει σε νέο κτίριο. Θα μεταφερθεί σε κτίριο τετραγώνου διαστάσεων 39x40.Απαραιτητη προϋπόθεση κάθε δωμάτιο έχει ακριβώς δυο πόρτες και το κτίριο δεν έχει εξόδους, ούτε εισόδους (φανταστείτε ότι η είσοδος γίνεται από την οροφή).Είναι αυτό δυνατό; Τι θα ίσχυε για ένα κτίριο διαστάσεων 39x39;

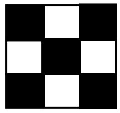
Λύση Για το πρώτο ερώτημα μια λύση θα ήταν:

39

39



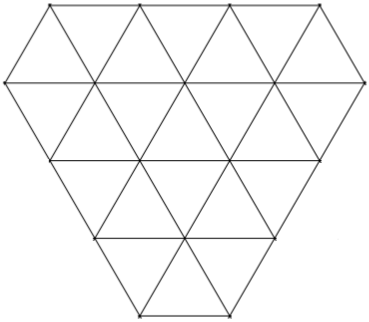
Όσο αφορά το κτίριο 39x39 ,είναι αδύνατο.Χρωματίζουμε την κάτοψη 39x39 με δυο χρώματα σαν μια σκακιέρα .Μια πόρτα συνδέει δυο γειτονικά δωμάτια, άρα αυτά έχουν διαφορετικό χρώμα. Μπορούμε να μετρήσουμε τον αριθμό των θυρών με δυο τρόπους. Ο αριθμός των θυρών είναι διπλάσιος από τον αριθμό των άσπρων δωματίων και είναι διπλάσιος από τον αριθμό των μαύρων δωματίων.Αυτό φυσικά είναι άτοπο, αφού έχουμε ένα περισσότερο μαύρο τετράγωνο στην κάτοψη.Αν λοιπόν το πλήθος των δωματίων είναι περιττός δεν μπορούμε να καταφέρουμε κάθε δωμάτιο να έχει δυο πόρτες.



■

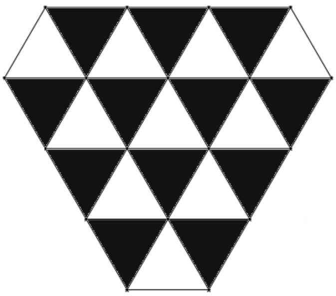
Δεν παίζουμε φυσικά μόνο σε σκακιέρα άλλα σε κάθε σχήμα που παρουσιάζει μια συμμετρία στο χρωματισμό όπως το… παλάτι του βασιλιά Χαρίλαου!!

128.Ο Βασιλιάς Χαρίλαος ζει σε ένα παλάτι που κάθε δωμάτιο είναι τριγωνικό.Πριν πέσει για ύπνο θέλει να κάνει μια επιθεώρηση σε όλα τα δωμάτια του παλατιού.Υπάρχει διάδρομη που θα του επιτρέψει να επισκεφτεί κάθε δωμάτιο του παλατιού ακριβώς μια φορά.



Λύση

Είναι αδύνατο.Χρωματίζουμε διαδοχικά δωμάτια με άσπρο και μαύρο χρώμα.Μια τέτοια διαδρομή θα απαιτούσε από τον Βασιλιά να περνά από ένα μαύρο δωμάτιο σε ένα λευκό και τανάπαλιν δηλαδή θα απαιτούσε το πλήθος των μαύρων να είναι ίδιο με των λευκών,άτοπο,καθώς έχουμε 12 μαύρα και 10 λευκά δωμάτια.



■

129.Είναι δυνατόν να τοποθετηθούν 53 ίδια κουτιά σχήματος ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου διαστάσεων 1x1x4 cm μέσα σε ένα μεγαλύτερο κουτί διαστάσεων 6x6x6;Οι έδρες των μικρών κουτιών πρέπει να είναι παράλληλες προς αυτές του μεγάλου.

Λύση

Έχουμε ότι 53*4=212 και 6*6*6=216.Επειδη 212<216 θα μπορούσαμε να δεχτούμε ότι υπάρχει τρόπος για την ζητούμενη τοποθέτηση των κουτιών. Μπορούμε να θεωρήσουμε ότι το μεγάλο κουτί αποτελείται από 27 κύβους 2x2x2 ,αφού 216=27*8.Αυτοι οι μικροί κύβοι θα χρησιμεύσουν ως «μονάδες διευθέτησης» των κουτιών. Θεωρούμε ότι αυτοί είναι χρωματισμένοι με άσπρο και μαύρο χρώμα εναλλάξ για να διατυπώσουμε τον ακόλουθο συλλογισμό. Αν ξεκινήσουμε να χρωματίζουμε ένα μικρό γωνιακό κύβο μαύρο, τότε θα έχουμε ένα στρώμα με 9 κύβους από τους οποίους θα είναι 5 μαύροι και 4 άσπροι.Στο δεύτερο στρώμα θα έχουμε 5 άσπρους και 4 μαύρους κύβους και στο τρίτο 5 μαύρους και 4 άσπρους κύβους. Συνολικά από τους 27 κύβους, οι 14 είναι χρωματισμένοι μαύροι και οι 13 άσπροι. Επειδή κάθε τέτοιος κύβος αποτελείται από 8 κύβους ακμής 1, θα έχουμε 14*8=112 μαύρους μοναδιαίους κύβους και

13*8=104 άσπρους μοναδιαίους κύβους.Όμως κάθε κιβώτιο διαστάσεων 1x1x4 θα πρέπει να έχει 2 άσπρους και 2 μαύρους κύβους.Συνεπώς τα 53 κιβώτια θα περιέχουν 106 μαύρους και 106 άσπρους μοναδιαίους κύβους.Επειδή,όμως στο μεγάλο κιβώτιο μπορούν τοποθετηθούν μόνο 104 άσπροι μοναδιαίοι κύβοι,σημαίνει ότι η απάντηση στο ζητούμενο ερώτημα είναι αρνητική. ■

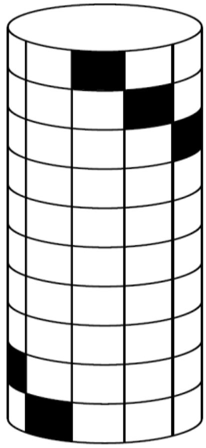
Ο χρωματισμός δεν αφορά μόνο προβλήματα που ζητείται να αποδείξουμε ότι δεν ισχύει μια ιδιότητα.

130.Να αποδείξετε ότι σε μια σκακιέρα 10x10 όπως και αν τοποθετήσουμε 41 πύργους τουλάχιστον 5 από αυτούς δεν μπορούν να επιτεθούν ο ένας στον άλλο.
(Οι πύργοι στο σκάκι κινούνται οριζόντια ή κάθετα) (Soifer)

Λύση

Μια λύση με χρωματισμό εξαιρετικά κομψή που εκμεταλλεύεται την συμμετρία. Δημιουργούμε ένα κύλινδρο «κολλώντας» δυο απέναντι πλευρές της σκακιέρας. Και χρωματίζουμε διαγώνια τον κύλινδρο με δέκα διαφορετικά χρώματα. Δείτε στο σχήμα που έχουμε χρωματίσει μόνο την μια διαγώνιο. Έχουμε ,41=4*10+1 πύργους (περιστέρια) σε 10 μονοχρωματικές διαγώνιους (περιστεροφωλιές). Άρα από την αρχή της περιστεροφωλιάς σε μια διαγώνιο (περιστεροφωλιά) υπάρχουν τουλάχιστον 5 πύργοι (περιστέρια) οι οποίοι ανήκουν σε διαγώνιες θέσεις άρα δεν μπορούν να επιτεθούν ο ένας στον άλλο.





Β τρόπος

Από την αρχή της περιστεροφωλιάς υπάρχει μια στήλη Α1 η οποία περιέχει τουλάχιστον 5 πύργους.Στις υπόλοιπες 9 στήλες έχουμε τουλάχιστον 31 πύργους οπότε τουλάχιστον μια από αυτές τις στήλες ,έστω η Α2, έχει τουλάχιστον 4 πύργους. (Αφού 3x9<31) Συνεχίζοντας στο ίδιο μοτίβο ,βρίσκουμε στήλη Α3 με τουλάχιστον 3 πύργους, στήλη Α4 με τουλάχιστον δυο πύργους ,και στήλη Α5 με τουλάχιστον ένα πύργο. Τώρα δουλεύουμε ανάποδα.Παίρνουμε έναν πύργο από την Α5.Μετα παίρνουμε έναν πύργο από την Α4 ο οποίος να είναι σε διαφορετική σειρά από τον πύργο του Α5.Αυτο επιτυγχάνεται αφού η Α4 έχει τουλάχιστον δυο πύργους. Ομοίως βρίσκουμε πύργο στην Α3 σε διαφορετική σειρά από τους πύργους των Α4,Α5 που επιλέξαμε κ.ο.κ μέχρι να πάρουμε τον πέμπτο πύργο από την Α1. ■

A-ha solution problems στην Αγγλόφωνη βιβλιογραφία ονομάζονται τα προβλήματα-πάντα αναφέρομαι στα μαθηματικά-που η λύση τους είναι σύντομη, κομψή, ευρηματική, ευφυής και συνοδεύεται από επιφώνημα έκπληξης. Δείτε το προηγούμενο παράδειγμα και συγκρίνετε τις δυο λύσεις.Ο χρωματισμός έρχεται σαν λαγός από το καπέλο!



131.Έστω ότι έχουμε ένα πίνακα 21x21 και τοποθετούμε ακεραίους αριθμούς στα κελιά του.Κάθε στήλη και κάθε γραμμή έχει το πολύ 6 διαφορετικούς ακεραίους Να δείξετε ότι υπάρχουν 3 τουλάχιστον γραμμές και 3 τουλάχιστον στήλες που περιέχουν τον ίδιο ακέραιο.

Λύση

Έστω ότι δεν υπάρχει η ζητούμενη διάταξη δηλαδή δεν υπάρχει ακέραιος που να βρίσκεται σε 3 τουλάχιστον γραμμές και 3 τουλάχιστον στήλες.Χρωματίζουμε ένα κελί άσπρο αν ο ακέραιος του εμφανίζεται σε 3 ή περισσότερες γραμμές και μαύρο αν ο ακέραιος του εμφανίζεται σε 1 ή 2 γραμμές.Θα μετρήσουμε τα άσπρα και τα μαύρα κελιά.

Κάθε γραμμή έχει 21 κελιά και το πολύ 6 διαφορετικούς ακεραίους.Ισχύει 6x2=12<21,αρα κάθε γραμμή περιέχει ένα ακέραιο που εμφανίζεται 3 ή περισσότερες φόρες και το πολύ σε δυο γραμμές. Άρα στην γραμμή έχουμε το πολύ 5 διαφορετικους ακεραίους που εμφανίζονται σε 3 ή περισσότερες γραμμές, άρα υπάρχουν 5x2=10 άσπρα κελιά στην γραμμή.Το ίδιο ισχύει σε κάθε γραμμή άρα έχουμε συνολικά 21x10=210 άσπρα κελιά.

Αναλόγως, κάθε στήλη έχει 21 κελιά και το πολύ 6 διαφορετικούς ακεραίους. Ισχύει 6x2=12<21,αρα κάθε στήλη περιέχει ένα ακέραιο που εμφανίζεται 3 ή περισσότερες φορες και το πολύ σε δυο γραμμές.Άρα στην στήλη έχουμε το πολύ 5 διαφορετικούς ακεραίους που εμφανίζονται σε 3 ή περισσότερες γραμμές, άρα υπάρχουν 5x2=10 μαύρα κελιά στην στήλη.Το ίδιο ισχύει σε κάθε στήλη άρα έχουμε συνολικά 21x10=210 μαύρα κελιά.Όμως 210+210 =420<441 άτοπο.

Το πρόβλημα έχει ισοδύναμη διατύπωση:

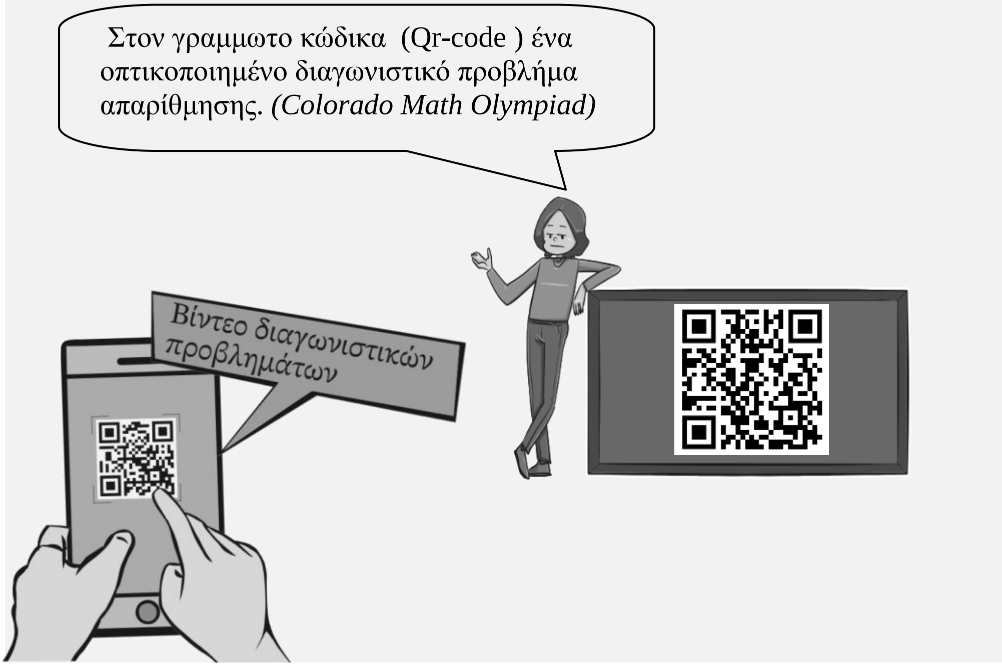
Σε ένα μαθηματικό διαγωνισμό λαμβάνουν μέρος 21 μαθητές και 21 μαθήτριες. Κάθε μαθητής /τρια έλυσε το πολύ έξι προβλήματα και για κάθε ζευγάρι από ένα μαθητή και μια μαθήτρια υπήρξε τουλάχιστον ένα πρόβλημα που λύθηκε και από τους δυο.Να αποδείξετε ότι υπήρχε πρόβλημα που λύθηκε από τρεις τουλάχιστον μαθητές και τρεις τουλάχιστον μαθήτριες. (IMO 2001)

Αν θεωρήσουμε ένα πινάκα A_{21x21},αριθμήσουμε τα προβλήματα του διαγωνισμού με 6 διαφορετικούς ακεραίους π.χ $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5,\alpha_6$ και θεωρήσουμε τις γραμμές ως τους μαθητές και τις στήλες ως μαθήτριες κατά τέτοιο τρόπο ώστε αν στο κελί $A[2,3]=\alpha_1$, σημαίνει ότι το πρόβλημα α_1 το έλυσε ο $2^{ος}$ μαθητής και η $3^{η}$ μαθήτρια.

Ο συμβολισμός μας «γύρισε» στο προηγούμενο πρόβλημα. ■

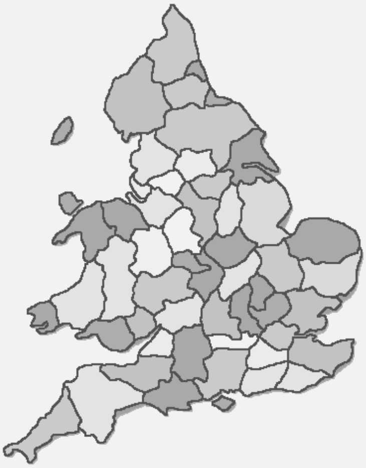
Ο έμπειρος λύτης μαθηματικών προβλημάτων λειτουργεί σε τρία διαφορετικά επίπεδα:

***Στρατηγική**:Μαθηματικές και ψυχολογικές ιδέες για τον αρχικό τρόπο προσέγγισης και την επίλυση προβλημάτων.(Το επίθετο «ψυχολογικές» μην σας φαίνεται παράταιρο πρέπει να έχετε διάθεση να επιλύσετε οποιοδήποτε πρόβλημα)*
***Τακτικές**:Διάφορες μαθηματικές μέθοδοι που λειτουργούν σε μια πληθώρα διαφορετικών καταστάσεων.*
***Εργαλεία**:Τεχνικές εστίασης σε μεμονωμένες περιπτώσεις και «τεχνάσματα» και «κόλπα» για συγκεκριμένες καταστάσεις.*



Το θεώρημα των τεσσάρων χρωμάτων

Στις 23 Οκτώβριου του 1852,ο Φράνσις Γκάθρι, προπτυχιακός φοιτητής στο University College του Λονδίνου προσπάθησε να χρωματίσει τον χάρτη των περιφερειών της Αγγλίας.



Αναρωτήθηκε ποιος θα ήταν ο ελάχιστος αριθμός διαφορετικών χρωμάτων τα οποία θα χρησιμοποιούσε ώστε οι γειτονικές περιφέρειες να έχουν διαφορετικό χρώμα.Δεν κατέληξε πουθενά όποτε έθεσε στον καθηγητή Αύγουστο Ντε Μόργκαν το ερώτημα. Ο Ντε Μόργκαν ήταν ο πρώτος καθηγητής μαθηματικών του πανεπιστήμιου University College και διάσημος για τις έρευνες του πάνω στην Λογική. Όμως παρά την εξαιρετική του ευφυΐα,ο Ντε Μόργκαν δεν ήξερε την απάντηση στην ερώτηση του μαθητή του.Την ίδια μέρα έγραψε στον συνάδελφο του Χάμιλτον, *τον εξυπνότερο άνθρωπο της Ιρλανδίας*,στο Δουβλίνο:

Ένας μαθητής μου με,ρώτησε σήμερα να του αιτιολογήσω ένα γεγονός το όποιο αγνοούσα-και εξακολουθώ να αγνοώ- αν είναι γεγονός.Λέει ότι αν ένα σχήμα είναι χωρισμένο σε τμήματα με οποιοδήποτε τρόπο και κάθε τμήμα είναι χρωματισμένο ώστε να έχει διαφορετικό χρώμα από οποιοδήποτε άλλο με το οποίο συνορεύει-μπορεί να απαιτούνται τέσσερα χρώματα, αλλά όχι παραπάνω…Αν μου δώσεις κάποια πολύ απλή εξήγηση που θα με κάνει να νιώσω ένα αδαές ζώο, μάλλον θα ακολουθήσω το παράδειγμα της σφίγγας….

Ο Ντε Μόργκαν είχε κατά νου την μυθολογική σφίγγα η οποία αυτοκτόνησε αφού ο Οιδίποδας έλυσε τον γρίφο της. Ευκολότερος από την εικασία των τεσσάρων χρωμάτων διατυπώνεται ως εξής: *«Ποιο ζώο περπατά με τέσσερα πόδια το πρωί, δυο το μεσημέρι και τρία το απόγευμα;»* Η απάντηση είναι άνθρωπος. Αν η μέρα αντιστοιχεί στην ζωή του ανθρώπου,ως βρέφος μπουσούλαγε ,ως ενήλικος περπατά με τα δυο πόδια και ως ηλικιωμένος με μπαστούνι.

Ούτε,όμως ο Χάμιλτον γνώριζε την απάντηση και μέσα σε τρεις μέρες του έγραψε:

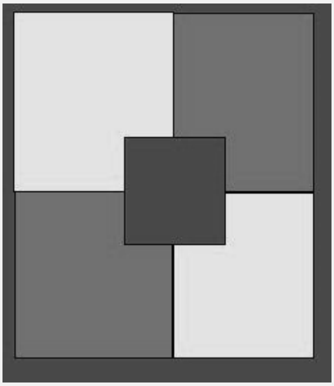
«Δεν νομίζω να ασχοληθώ σύντομα με την τετράδα των χρωμάτων σου.»

Πολλοί μαθηματικοί μεγάλου βεληνεκούς δοκίμασαν την τύχη τους με το πρόβλημα, μάταια όμως. Χαρακτηριστικό παράδειγμα ο καλύτερος φίλος του Χιλμπερτ στο Γκέτιγκεν, ο Χέρμαν Μινκοφσκι. Όταν το ερώτημα τέθηκε σε κάποιο από τα μαθήματα του.Σχολίασε: *«Το θεώρημα δεν έχει ακόμα αποδειχτεί, αλλά αυτό οφείλεται στο ότι ασχολήθηκαν μαζί του μόνο μαθηματικοί τρίτης κατηγορίας».*

«Πιστεύω ότι μπορώ να το αποδείξω!!» Αφιέρωσε αρκετά μαθήματα, παλεύοντας με διάφορες ιδέες στον πίνακα.Τέλος,κάποιο πρωί, μπαίνοντας στην τάξη, ομολόγησε: *«Οι ουρανοί εξοργίστηκαν από την αλαζονεία μου»,* ομολόγησε *«Η απόδειξη μου παρουσιάζει προβλήματα.»*

Το τοπολογικό αυτό πρόβλημα έγινε γνωστό ως το πρόβλημα των τεσσάρων χρωμάτων του χάρτη και το ερώτημα που έθεσε ο Φράνσις Γκάθρι έμεινε γνωστό ως το θεώρημα των τεσσάρων χρωμάτων.

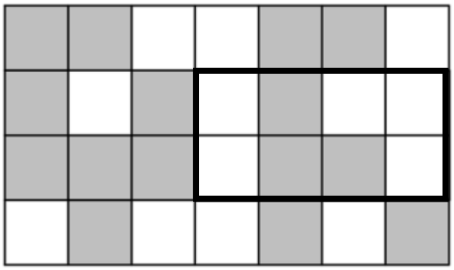
Μπορούμε να δούμε την πιο συνήθη περίπτωση του ανοίγοντας έναν πολιτικό χάρτη.Οι διαφορετικές χώρες που εικονίζονται πρέπει να χρωματιστούν διαφορετικά ώστε να ξεχωρίζουν εύκολα.Ο προφανής κανόνας είναι ότι δυο γειτονικές χώρες δεν πρέπει να έχουν το ίδιο χρώμα.Η ερώτηση του Φράνσις Γκάθρι ήταν: μπορείτε να αποδείξετε ότι δεν χρειάζεστε πάνω από τέσσερα χρώματα για οποιονδήποτε χάρτη;
Διαισθητικά αν ένας χάρτης αποτελούμενος από γραμμές που τέμνονται κάθετα χρειάζεται μόλις δυο χρώματα για παράδειγμα μια σκακιέρα.Μερικοί χάρτες με τα κατάλληλα τοπολογικά στοιχεία χρειάζονται μονό τρία.Αρκεί ένα απλό παράδειγμα για να δείξουμε ότι τα τρία χρώματα δεν επαρκούν για το χρωματισμό κάθε χάρτη.
Δείτε το σχήμα 1.
Αν και οι μαθηματικοί δεν έδιναν δεκάρα για το αν η επίλυση του προβλήματος θα βοηθούσε τους χαρτογράφους ή όχι, η πρόκληση του ερωτήματος τους συνεπήρε.Για χρόνια ο Ντε Μόργκαν συνέχισε να ρωτά τους συναδέλφους του αν μπορούσαν αν βρουν μια απόδειξη μέχρι που τελικά ένας μαθηματικός ο Άλφρεντ Κεμπ δημοσίευσε μια απόδειξη.Ο Κεμπ έγινε αρκετά διάσημος ώστε τον δέχτηκαν στην Βασιλική εταιρεία και τον έχρισαν ιππότη. Φανταστείτε την αμηχανία του όταν η απόδειξη του αποδείχθηκε λανθασμένη από έναν άλλο μαθηματικό.Τον Περσι Χειγουντ.Ο Χειγουντ εργάστηκε για αρκετά χρόνια πάνω στο ίδιο πρόβλημα και κατάφερε να αποδείξει ότι η απόδειξη του Κέμπ ήταν λανθασμένη.


Σχήμα1

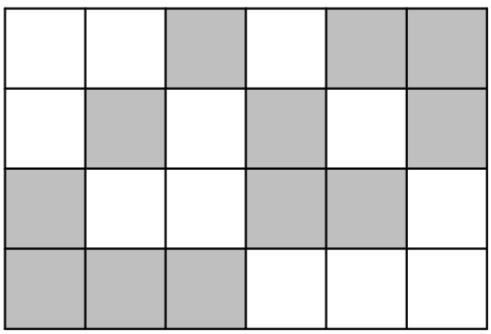
Ωστόσο πάλι οι μαθηματικοί δεν ήταν ικανοποιημένοι απόλυτα.Τα πέντε χρώματα πράγματι θα χρωμάτιζαν οποιοδήποτε χάρτη, αλλά τι γινόταν με τέσσερα η ακόμη και τρία; Η απόδειξη χρειάστηκε άλλα 80 χρόνια και η εκτεταμένη χρήση υπολογιστή. Η πρώτη απόδειξη ήρθε το 1976 από τους Αμερικανούς μαθηματικούς Κένεθ Άπελ και Γουλφανγκ Χάκεν,από το Πανεπιστήμιο του Ιλινόις.Για την απόδειξη απαιτήθηκε η ανάλυση 2000 ειδικών περιπτώσεων και 1000 ώρες υπολογιστικού χρόνου.



132.Υποθέτουμε ότι κάθε τετράγωνο μιας 4x7 σκακιέρας, όπως του σχήματος χρωματίζεται είτε γκρι είτε άσπρο.
i.Να δείξετε ότι με οποιοδήποτε τρόπο και αν γίνει ο χρωματισμός πάντα μπορούμε να βρούμε ένα ορθογώνιο (που σχηματίζεται από τις οριζόντιες και τις κάθετες γραμμές που ορίζουν την σκακιέρα) όπου τα κελιά των τεσσάρων κορυφών του να έχουν το ίδιο χρώμα.Ένα τέτοιο ορθογώνιο φαίνεται στο σχήμα.
iii.Να βρείτε χρωματισμό άσπρου-μαύρου μιας 4x6 σκακιέρας τέτοιο ώστε για κάθε ορθογώνιο (που σχηματίζεται από τις οριζόντιες και τις κάθετες γραμμές που ορίζουν την σκακιέρα) τα κελιά των τεσσάρων κορυφών του να μην έχουν το ίδιο χρώμα. ***(1976 USAMO)***

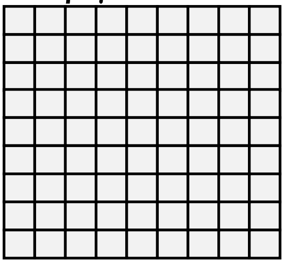


Λύση
i.Θεωρούμε την πρώτη γραμμή.Περιέχει τουλάχιστον 4 κελιά ίδιου χρώματος,ας πούμε άσπρο.Επιλέγουμε οποιαδήποτε 4 άσπρα κελιά.Θεωρούμε τις στήλες αυτών των τεσσάρων κελιών.Έχουμε λοιπόν ένα ορθογώνιο με τα κελιά των πάνω γωνιακών κορυφών άσπρα.
Σε αυτό το ορθογώνιο αν κάποια από τις τρεις γραμμές πλην της πρώτης περιέχουν δυο κελιά άσπρου χρώματος τότε το ζητούμενο αποδείχτηκε. Διαφορετικά, έχουμε την εξής κατάσταση:τρεις γραμμές και τέσσερεις στήλες,και σε καθεμία γραμμή υπάρχει το πολύ ένα άσπρο τετράγωνο.Μπορούμε τώρα να επιλέξουμε δυο οποιεσδήποτε γραμμές γ1,γ2 και κατόπιν να βρούμε δυο στήλες σ1,σ2 τέτοιες ώστε τα τέσσερα κελιά σημεία τομής των γ1,γ2,σ1,σ2 να είναι όλα μαύρα ,και το ζητούμενο αποδείχτηκε.
ii. Ένας από τους ζητούμενους χρωματισμούς είναι:



■

133.Σε ένα 9x9 πίνακα (σχήμα) 65 μυρμήγκια είναι τοποθετημένα στα κέντρα κάποιων από τα 81 μοναδιαία τετράγωνα.



Τα μυρμήγκια αρχίζουν ταυτόχρονα να κινούνται με την ίδια ταχύτητα σύμφωνα με τους εξής κανόνες:

● Μπορούν να κινηθούν μόνο σε γειτονικά τους μοναδιαία τετράγωνα (δηλαδή, το τετράγωνο το οποίο βρίσκονται και το τετράγωνο στο οποίο μεταβαίνουν να έχουν μια κοινή πλευρά).

● Όταν φτάσουν στο κέντρο του γειτονικού τετραγώνου κάνουν μια στροφή 90° (είτε αριστερά είτε δεξιά) και συνεχίζουν την κίνηση σε γειτονικό τετράγωνο. Δεν βγαίνουν έξω από τον πίνακα και δεν σταματούν να κινούνται.

Να αποδείξετε ότι κάποια χρονική στιγμή θα βρεθούν δυο τουλάχιστον μυρμήγκια στο ίδιο τετράγωνο.*(A.Soifer)*

Λύση

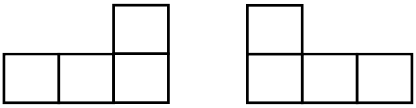
Ο χρωματισμόςδίνει διέξοδο.Χρησιμοποιούμε 4 χρώματα,τα συμβολίζουμε με Α,Β,Γ,Δ και χρωματίζουμε το πίνακα σύμφωνα με το σχήμα.

Α	Γ	Α	Γ	Α	Γ	Α	Γ	Α
Β	Δ	Β	Δ	Β	Δ	Β	Δ	Β
Α	Γ	Α	Γ	Α	Γ	Α	Γ	Α
Β	Δ	Β	Δ	Β	Δ	Β	Δ	Β
Α	Γ	Α	Γ	Α	Γ	Α	Γ	Α
Β	Δ	Β	Δ	Β	Δ	Β	Δ	Β
Α	Γ	Α	Γ	Α	Γ	Α	Γ	Α
Β	Δ	Β	Δ	Β	Δ	Β	Δ	Β
Α	Γ	Α	Γ	Α	Γ	Α	Γ	Α

Βλέπουμε ότι έχουμε 25 τετράγωνα Α,20 τετράγωνα Β,20 τετράγωνα Γ και 16 τετράγωνα Δ.Από την αρχή της περιστεροφωλιάς υπάρχουν τουλάχιστον 33 μυρμήγκια σε κελιά με χρώματα Α και Δ ή 33 μυρμήγκια σε τετράγωνα με χρώματα Β και Γ. Στην δεύτερη περίπτωση,μετά το πρώτο βήμα υπάρχουν τουλάχιστον 33 μυρμήγκια στα τετράγωνα Α και Δ.Οποτε αναγόμαστε πάλι στην πρώτη περίπτωση. Εφόσον τα μυρμήγκια πρέπει να στρίβουν σε κάθε βήμα, ξέρουμε ότι κάθε μυρμήγκι που βρίσκε-

ται σε τετράγωνο χρώματος Α μεταβαίνει σε τετράγωνο χρώματος Δ ύστερα από δυο βήματα και αντιστρόφως. Από την αρχή της περιστεροφωλιάς υπάρχουν τουλάχιστον 17 μυρμήγκια σε χρώματος Α τετράγωνα ή τουλάχιστον 17 μυρμήγκια σε τετράγωνα χρώματος Δ. Από το τελευταίο συμπεραίνουμε ότι κάποια χρονική στιγμή υπάρχουν τουλάχιστον 17 τουλάχιστον μυρμήγκια σε Δ τετράγωνα.Εφαρμόζουμε ξανά την αρχή της περιστεροφωλιάς-τα τετράγωνα Δ είναι 16- και προκύπτει ότι έχουμε δυο τουλάχιστον μυρμήγκια στο ίδιο τετράγωνο. ■

134.Σε ένα πίνακα 5x7 έχουμε χρωματίσει ένα μόνο μοναδιαίο τετράγωνο γκρι,ενώ τα υπόλοιπα είναι λευκά.Διαθέτουμε πλακίδια επικάλυψης σχήματος L,όπως στο παρακάτω σχήμα,τα οποία μπορούμε να περιστρέφουμε κατάλληλα.

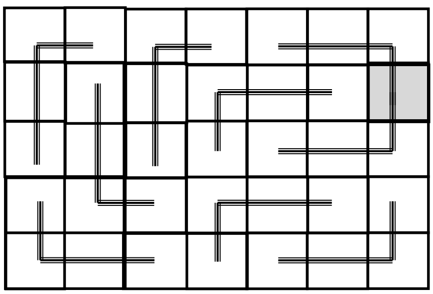


Τα πλακίδια πρέπει να επικαλύπτουν ακριβώς 4 μοναδιαία τετράγωνα και μπορούν να επικαλύπτονται μόνο στο γκρι τετράγωνο. Βρείτε όλες τις δυνατές θέσεις του γκρι τετραγώνου, για τις οποίες είναι δυνατή η πλήρης κάλυψη του πίνακα με L πλακίδια. ***(Μαθηματική ολυμπιάδα Σλοβενίας)***

Λύση

Ο πίνακας έχει 35 μοναδιαία τετράγωνα, οπότε πρέπει να χρησιμοποιήσουμε 9 L πλακίδια (35=4*9-1) και ένα τετράγωνο θα καλυφτεί δυο φορές,αυτό πρέπει να είναι γκρι.Αριθμούμε τις γραμμές του πίνακα από το 1 έως και το 5 και τις στήλες του από το 1 έως και το 7.Αν έχουμε σκιάσει όλα τα μοναδιαία τετράγωνα των περιττών γραμμών,τότε έχουμε σκιάσει 21 τετράγωνα.Κάθε L πλακίδιο μπορεί να καλύψει τρία σκιασμένα τετράγωνα και ένα λευκό ή τρία λευκά και ένα σκιασμένο. Αν για την πλήρη κάλυψη πίνακα έχουμε χρησιμοποιήσει κ πλακίδια που καλύπτουν σκιασμένα τετράγωνα, τότε 9-κ πλακίδια θα καλύπτουν ένα μόνο σκιασμένο τετράγωνο.Έτσι, συνολικά, θα καλύπτονται 3κ+(9-κ)=2κ+9 σκιασμένα τετράγωνα, δηλαδή περιττός αριθμός τετραγώνων, όπως ο 21.**Αυτο σημαίνει ότι δεν είναι δυνατό κάποιο από τα σκιασμένα τετράγωνα να είναι γκρι**. Με όμοιο συλλογισμό αν σκιάσουμε τα τετράγωνα των αρτίων στηλών του πίνακα, αποδεικνύεται **ότι δεν είναι δυνατόν κάποια από τα σκιασμένα τετράγωνα να είναι γκρι**.Αυτό σημαίνει ότι τα πιθανά τετράγωνα που μπορεί να είναι λύση είναι αυτά που ανήκουν σε άρτια γραμμή και περιττή στήλη, δηλαδή τα τετράγωνα (2,1),(2,3),(2,5),(2,7),(4,1),(4,3),(4,5),(4,7).

Μια λύση με γκρι τετράγωνο το (2,7) δείχνει το σχήμα που ακολουθεί.

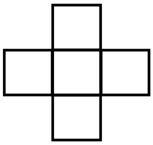


■

Δεν είναι λίγες οι φορές που οι λύσεις σε διαγωνιστικά προβλήματα δίνουν την εντύπωση εξεζητημένων τεχνασμάτων όπως το ακόλουθο:

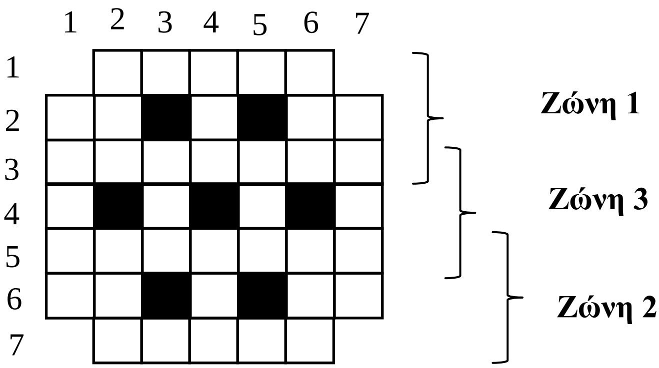
135.Δίνεται επιφάνεια σκακιέρας 7x7 αποτελούμενη από λεύκα τετράγωνα, από τα οποία τα τέσσερα γωνιακά τετράγωνα έχουν αφαιρεθεί.

i.Ποιος είναι ο μικρότερος αριθμός τετράγωνων,τα οποία μπορεί να χρωματιστούν ώστε να μην υπάρχει σταυρός (σχήμα) αποτελούμενος από 5 λεύκα τετράγωνα.



ii.Αποδείξτε ότι μπορούμε να γράψουμε σε κάθε τετράγωνο, έναν ακέραιο αριθμό τέτοιον, ώστε το άθροισμα σε κάθε σταυρό αποτελούμενο από 5 λεύκα τετράγωνα να είναι αρνητικός, ενώ το άθροισμα των αριθμών όλων των τετραγώνων της επιφάνειας να είναι θετικός. ***(Διαγωνισμός επιλογής Βουλγαρία)***

Λύση



i.Το σύνολο των τετραγώνων είναι 49-4=45.Ουσιαστικα ζητάμε *«τετράγωνες»* τρύπες που δημιουργούν περιβάλλον στο οποίο δεν μπορούν να υπάρχουν σταυροί. Λόγω της συμμετρίας,μπορούμε να εργαστούμε σε τρεις οριζόντιες ζώνες,και τα ίδια συμπεράσματα θα εξαχθούν για τις αντίστοιχες κατακόρυφες ζώνες.Αν στην ζώνη 1 μαυρίσουμε τα τετράγωνα (2,3),(2,5),τότε αποκλείουμε την δημιουργία σταυρών στην ζώνη αυτή, άρα για την ζώνη 2,για τα τετράγωνα (6,3) (6,5).Μένει λοιπόν να αποκλείσουμε την δημιουργία σταυρών με βάση την ζώνη 3(που έχει τομές με την ζώνες 1 και 2) Παρατηρούμε ότι, μαυρίζοντας τα τετράγωνα (4,2),(4,4),(4,6) επιτυγχάνουμε το στόχο μας. Έτσι χρειαζόμαστε 7 τετράγωνα ,ή και περισσότερα, ώστε να μην υπάρχει σταυρός αποτελούμενος από 5 λεύκα τετράγωνα. Θα αποδείξουμε ότι 6 μαύρα τετράγωνα δεν αρκούν, οπότε δεν θα αρκούν και λιγότερα. Αν έχει επιτευχτεί τα 6 μαύρα τετράγωνα να αρκούν,τότε εκ των πραγμάτων δεν μπορεί να υπάρχουν λευκοί σταυροί με κοινό τετράγωνο.Συνεπώς, η ένωση των σταυρών αυτών θα πρέπει να μας δίνει επιφάνεια αποτελούμενη από 6*5=30 τετράγωνα.Οπότε μένουν ελεύθερα 45-30=15 τετράγωνα. Από αυτά θα υπάρχει τουλάχιστον μια πεντάδα που δημιουργεί σταυρό, αφού τα περιμετρικά τετράγωνα είναι λεύκα, και τα 15 ελεύθερα τετράγωνα μπορούν να καλύψουν 3 διαδοχικές γραμμές ή 3 διαδοχικές στήλες.Άρα 6 μαυρισμένα τετράγωνα δεν αρκούν.

ii.Μπορούμε να γράψουμε -5 στα 7 παραπάνω μαυρισμένα τετράγωνα ,και 1 στα τετράγωνα που μένουν.Τότε κάθε σταυρός έχει αρνητικό άθροισμα, αλλά το άθροισμα όλων των αριθμών είναι: (-5)*7+1*(45-7)= -35+38=3 ■

Μην φοβάστε τα τεχνάσματα!
Η λύση στο προηγούμενο πρόβλημα μοιάζει ουρανοκατέβατη,δεν υπαινίσσεται τίποτα σχετικά με τις πηγές της ανακάλυψης της.Το μόνο που κάνει είναι μας ρίχνει «κατακέφαλα» την διαίρεση της σκακιέρας σε ζώνες από την οποία προκύπτουν τα πάντα, χωρίς να υπάρχει η παραμικρή υπόνοια πως θα μπορούσαμε να φτάσουμε στην τακτική αυτή μόνοι μας.Αλλάξτε οπτική ,δείτε αυτές τις λύσεις ως έξυπνες και ευφυεις κινήσεις σε μια παρτίδα σκακιού,είναι δυνατόν μην καταλαβαίνετε πως τις εμπνευστήκαν οι δημιουργοί τους από την άλλη τίποτα δεν σας εμποδίζει να τις χρησιμοποιείτε. Εμπλουτίστε το ρεπερτόριο σας και όταν τις έχετε πλήρως κατανοήσει ξεχάστε τις, αφήστε να κοιμούνται στο υποσυνείδητο σας μέχρι να τις αφυπνίσουν παρόμοια ή συναφή προβλήματα!



136.Ο εξπρεσιονιστής ζωγράφος Λένος Πινέλος δημιούργησε την μοναδική του σύνθεση «*Μπλε σκακιέρα κομμέν»* με την εξής τεχνοτροπία:
Ζωγράφισε μια συνηθισμένη σκακιέρα και ύστερα την χώρισε σε όσο το δυνατόν περισσότερα μη αλληλεπικαλυπτόμενα ορθογώνια ακολουθώντας δυο κανόνες :
1.Κάθε ορθογώνιο έχει τον ίδιο αριθμό άσπρων και μαύρων τετραγώνων.
2.Αν α_i είναι το πλήθος των άσπρων τετραγώνων του i ορθογωνίου τότε ισχύει :

$$\alpha_1<\alpha_2<\alpha_3<\ldots\ldots$$

Ύστερα χρωμάτισε κάθε ορθογώνιο χρησιμοποιώντας μια διαφορετική απόχρωση του μπλε.Τα ερωτήματα είναι:
i.Πόσες διαφορετικές αποχρώσεις του μπλε χρησιμοποίησε ο Λένος Πινέλος;
ii.Πόσους διαφορετικούς πίνακες θα μπορούσε να κατασκευάσει ο Λένος Πινέλος με τις αποχρώσεις του μπλε του παραπάνω ερωτήματος προφανώς ακολουθώντας τους κανόνες 1 και 2;

Λύση

i. Αν ν είναι το πλήθος των ορθογωνίων,είναι γνωστό ότι η σκακιέρα έχει 32 άσπρα και 32 μαύρα τετράγωνα οπότε θα έχουμε τις σχέσεις :
$\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\ldots+\alpha_\nu=32$ και $\alpha_1<\alpha_2<\alpha_3<\ldots<\alpha_\nu$

Επιπλέον,θα ισχύει $a_i \geq i, i=1,2,..,\nu$

$a_1 \geq 1$

$a_2 \geq 2$

. προσθέτουμε κατά μέλη

.

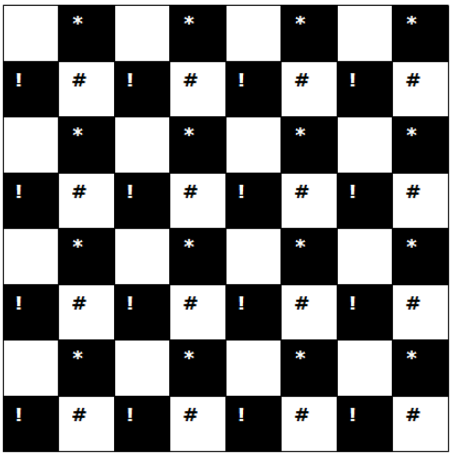
$a_\nu \geq \nu$

$$a_1+a_2+\ldots+a_\nu \geq 1+2+3+\ldots.+\nu \overset{a_1+a_2+\ldots+a_\nu=32}{\Leftrightarrow} 32 \geq 1+2+3+\ldots.+\nu \Leftrightarrow$$

$$32 \geq \frac{\nu(\nu+1)}{2} \Leftrightarrow \ldots. \Leftrightarrow \nu \leq 7$$

Άρα για τον ζητούμενο διαχωρισμό της σκακιέρας μπορούν να υπάρχουν το πολύ 7 ορθογώνια,οπότε ο Πινέλος χρησιμοποίησε 7 διαφορετικές αποχρώσεις του μπλε.
ii. Όλες οι δυνατές επτάδες θετικών ακέραιων $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\ldots,\alpha_\nu$ με $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\ldots+\alpha_\nu=32$ και $\alpha_1<\alpha_2<\alpha_3<\ldots\ldots<\alpha_7$ είναι:
α)1,2,3,4,5,6,11 β)1,2,3,4,5,7,10 γ)1,2,3,4,5,8,9 δ)1,2,3,4,6,7,9
ε)1,2,3,5,6,7,8
Η (α) απορρίπτεται γιατί δεν υπάρχει ορθογώνιο με 2x11=22 στην 8χ8 σκακιέρα όλες άλλες περιπτώσεις είναι δεκτές οπότε ο Πινέλος μπορεί να κατασκευάσει 4 διαφορετικούς πίνακες. ■

137.Οχτώ πιόνια τοποθετούνται σε μια σκακιέρα κατά τέτοιο τρόπο ώστε κάθε γραμμή και κάθε στήλη να περιέχει ακριβώς ένα πιόνι. Να δείξετε ότι υπάρχει άρτιος αριθμός πιονιών στα τετράγωνα κελιά με το μαύρο χρώμα.
(Soviet Union Math Competitions 1989)
Λύση
Τοποθετούμε στα κελιά τα σύμβολα !,#,* στην σκακιέρα όπως φαίνεται στο σχήμα.



Εφεξής θα αναφερόμαστε στα μαύρα κελιά με ! σαν κελιά $1^{ου}$ είδους
>> μαύρα κελιά με * σαν κελιά $2^{ου}$ είδους
>> λευκά κελιά με # σαν κελιά $3^{ου}$ είδους
Με το συμβολισμό Πi θεωρούμε ότι στα κελιά της σκακιέρας υπάρχουν Πi πλήθος πιονιών i είδους. Από υπόθεση θα ισχύει: Π1+Π3=4 και Π2+Π3=4 άρα Π1=Π2 και ο αριθμός των πιονιών στα μαύρα κελιά είναι Π1+Π2=2Π1 άρτιος. ■

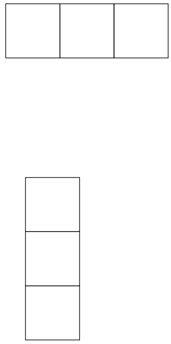
Η σκακιέρα είναι ήδη χρωματισμένη (λευκό-μαύρο),έτσι χρησιμοποιούμε σύμβολα αντί για επιπλέον χρώματα.Όπως θα κάνουμε και στο επόμενο παράδειγμα με αριθμούς.

138.Σκακιέρα 8×8 καλύπτεται από 21 ορθογώνια 3×1 (ή 1x3) ,και ένα τετραγωνάκι μένει ακάλυπτο.Μπορεί αυτό το τετραγωνάκι να είναι στην γωνία της σκακιέρας;

Λύση

Αριθμούμε τα τετραγωνάκια ως εξής:

1	2	3	1	2	3	1	2
2	3	1	2	3	1	2	3
3	1	2	3	1	2	3	1
1	2	3	1	2	3	1	2
2	3	1	2	3	1	2	3
3	1	2	3	1	2	3	1
1	2	3	1	2	3	1	2
2	3	1	2	3	1	2	3



Κάθε ορθογώνιο 3x1 (ή 1x3) καλύπτει τρία τετραγωνάκια που περιέχουν και τα 3 νούμερα.

-Ας υποθέσουμε ότι υπάρχει τέτοια κάλυψη και το ακάλυπτο τετραγωνάκι είναι πάνω αριστερά τότε παρατηρούμε ότι τα τετραγωνάκια που περιέχουν 2 είναι 22 ενώ τετραγωνάκια που περιέχουν 1 ή 3 είναι 21. Δεδομένου ότι κάθε ορθογώνιο 3x1 καλύπτει τρεις διαφορετικούς αριθμούς το ακάλυπτο τετραγωνάκι θα έπρεπε να περιέχει τον 2,και όχι 1,άτοπο.

Άρα δεν υπάρχει κάλυψη με ακάλυπτο τετραγωνάκι το πάνω αριστερά . (1)

-Έστω ότι υπάρχει κάλυψη με ακάλυπτο τετραγωνάκι το πάνω δεξιά τότε όμως με αριστερόστροφη στροφή 90 μοίρες της σκακιέρας έχουμε λύση για ακάλυπτο τετραγωνάκι πάνω αριστερά, άτοπο από (1).Ομοίως αποδεικνύεται άτοπο για ακάλυπτο τετραγωνάκι κάτω δεξιά ή κάτω αριστερά. ■

139.Να εξετάσετε αν υπάρχει μετάθεση των αριθμών 1,1,2,2,3,3,…1986,1986 τέτοια ώστε, για κάθε αριθμό $\lambda \in \{1,2,3,..,1986\}$ να υπάρχουν ακριβώς λ άλλοι αριθμοί μεταξύ των δυο ίδιων αριθμών λ. *(Chinese Math Competition 1986)*

Λύση

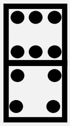
Έστω ότι η μετάθεση υπάρχει.Χρωματίζουμε τις 3972 θέσεις της μετάθεσης μαύρη-άσπρη εναλλάξ. Οι δυο ίδιοι αριθμοί λ έχουν ακριβώς λ αριθμούς ανάμεσα τους. Για τους άρτιους αριθμούς λ ισχύει ότι ,οι δυο αριθμοί λ θα καταλαμβάνουν θέσεις διαφορετικών χρωμάτων.Εφόσον όμως υπάρχουν 993 ζεύγη αρτίων,τότε θα καταλαμβάνουν στην μετάθεση ένα περιττό αριθμό από μαύρες θέσεις.Για τους περιττούς αριθμούς λ,οι δυο ίδιοι λ θα καταλαμβάνουν θέσεις με το ίδιο χρώμα.Έτσι τα 993 ζεύγη περιττών θα καταλαμβάνουν άρτιο αριθμό μαύρων θέσεων.Συνεπώς ο συνολικός αριθμός μαύρων θέσεων είναι περιττός.Ωστόσο,ο συνολικός αριθμός μαύρων θέσεων είναι ο 1986 ,άτοπο.Άρα δεν υπάρχει τέτοια μετάθεση! ■

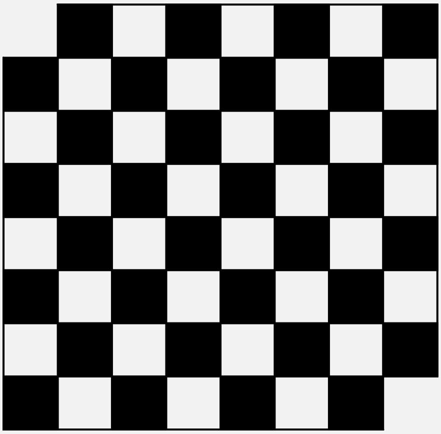
Το θεώρημα της κολοβής σκακιέρας (θεώρημα Gomory)

Αν αφαιρέσουμε ένα μαύρο και ένα άσπρο τετραγωνάκι από μια συνηθισμένη σκακιέρα.Τότε το μέρος της σκακιέρας που απομένει μπορεί να καλυφτεί με 31 ντόμινο διαστάσεων 2x1.



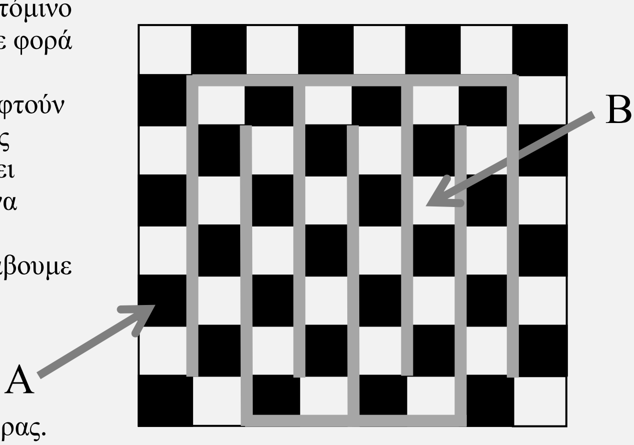
Ralph E.Gomory



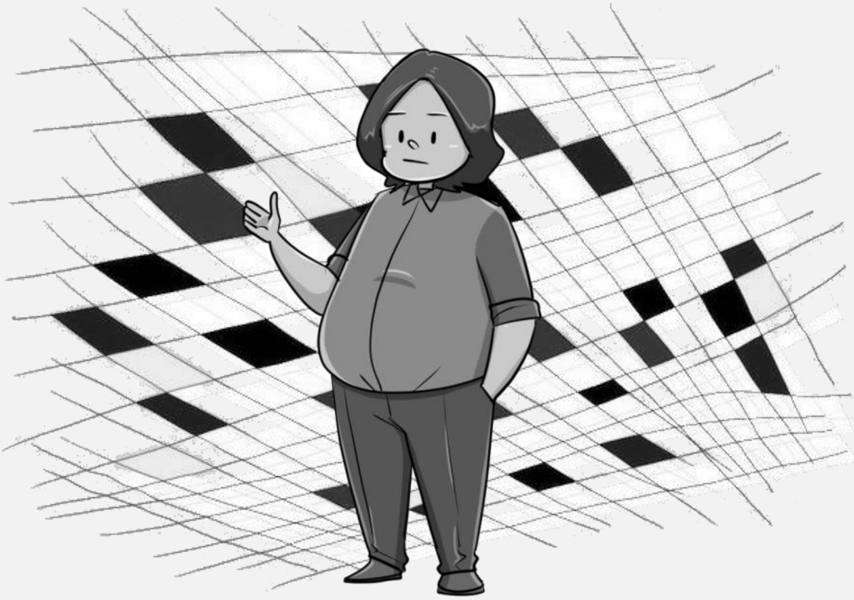


Η απόδειξη του Ralph Gomory είναι μοναδικά ευφυής.Μετατρέπουμε την σκακιέρα σε λαβύρινθο,όπως δείχνει το παρακάτω σχήμα.Αφαιρούμε ένα μαύρο και άσπρο τετράγωνο,για παράδειγμα το Α και το Β.Για να πάμε από το Α στο Β υπάρχουν δυο διαδρομές κατά μήκος του λαβυρίνθου,που ξεκινούν από καθένα από τα δυο γειτονικά στο Α τετράγωνα.

Τα τετράγωνα αυτά είναι και τα δυο άσπρα, ενώ τα γειτονικά στο Β τετράγωνα είναι μαύρα.Έτσι καλύπτοντας με ντόμινο ένα άσπρο και ένα μαύρο κάθε φορά ζεύγος και ακολουθώντας τις παραπάνω διαδρομές,θα καλυφτούν όλα τα τετράγωνα της κολοβής σκακιέρας,χωρίς να περισσέψει κανένα.Βλέπουμε ότι αρκεί να φανταστούμε ότι κινούμαστε για να μας επιτρέψει να συλλάβουμε την απόδειξη με μια ματιά.
Αν αφαιρέσουμε δύο τετραγωνάκια ίδιου χρώματος είναι αδύνατη η κάλυψη της κολοβής σκακιέρας.



Διαγωνιστικά προβλήματα για παίγνια



Προβλήματα παιγνίων

«Μολονότι δεν υπάρχουν πολλά πράγματα πιο διασκεδαστικά από τις σπαζοκεφαλιές που αποτελούν πρόκληση για την ευφυΐα και την ικανότητα λογικής σκέψης κάποιου,ο ρόλος αυτών των παιχνιδιών δεν περιορίζεται απλώς στην διασκέδαση:όπως υπέδειξε ο J.E.Littlewood (*),μια καλή μαθηματική σπαζοκεφαλιά μπορεί να συνεισφέρει περισσότερα στα μαθηματικά από μια ντουζίνα μέτρια άρθρα.»

Μάρτιν Γκάρντνερ (1914-2010)

Τα παιχνίδια μπορούν χωριστούν με διάφορους τρόπους,ανάλογα με το πλήθος των παικτών,την διάρκεια,το χώρο,το επίπεδο δυσκολίας.Στα διαγωνιστικά μαθηματικά ο ρόλος που παίζει η τύχη ή όχι τα κατατάσσει σε δυο κατηγορίες.Τα παίγνια τύχης και τα στρατηγικά παίγνια.Για παράδειγμα,τα περισσότερα παιχνίδια με χαρτιά είναι καθοριστικό πως θα μοιραστούν αρχικά τα χαρτιά για την εξέλιξη του παιχνιδιού, αντίθετα στο σκάκι όλα εξαρτώνται από την στρατηγική που θα ακολουθήσουν οι παίκτες.Συνήθως, μας απασχολούν τα παιχνίδια στα όποια η τύχη δεν παίζει κανένα απολύτως ρόλο δηλαδή τα χαρακτηριστικά τους είναι τα εξής:

1.Παιχνίδια με δυο παίκτες που κάνουν τις κινήσεις τους εναλλάξ.
2.Παιχνίδια που παρουσιάζουν μια αρχική θέση (κατάσταση),με πεπερασμένο αριθμό κινήσεων.
3.Παιχνίδια πλήρους πληροφόρησης:οι παίκτες γνωρίζουν ανά πάσα στιγμή το σύνολο των κινήσεων που μπορούν να κάνουν.
4.Η τύχη δεν παρεμβαίνει ούτε στην αρχική κατάσταση ούτε στις κινήσεις.
5.Η εξέλιξη μιας παρτίδας δεν επιτρέπει την επανάληψη των κινήσεων κι αυτές είναι καθορισμένες με τέτοιο τρόπο που αν ένας παίκτης δεν μπορεί να παίξει άλλο,χάνει την παρτίδα.

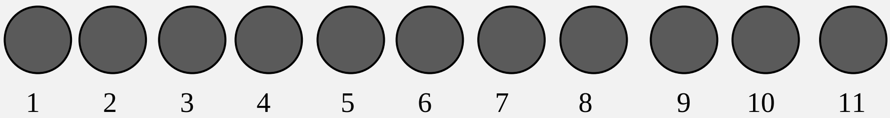
Το ζητούμενο συνήθως είναι η εύρεση της *«νικητήριας στρατηγικής»* για έναν ή και τους δυο από τους παίκτες.Δηλαδή η εύρεση ενός συνόλου συνθηκών που επιτρέπουν σε έναν από τους παίκτες να αποφασίσει πως πρέπει να παίξει κάθε στιγμή, λαμβάνοντας υπόψη τις κινήσεις που κάνει ο αντίπαλος του, με σκοπό να κερδίσει όποια και αν είναι η στρατηγική του τελευταίου. Προφανώς η ύπαρξη μιας νικητήριας στρατηγικής προϋποθέτει πως το παιχνίδι τελειώνει με την νίκη ενός εκ των δυο παικτών, αν και αυτό δεν συμβαίνει πάντα όπως,σε παιχνίδια που τελειώνουν με ισοπαλία, όπως το σκάκι.Σε αυτήν την περίπτωση,καλό είναι να επιλέγει κανείς μια στρατηγική που να του επιτρέπει να κερδίζει πάντα ή τουλάχιστον να μην χάνει.

(*) Ο J.E.Littlewood ήταν διακεκριμένος μαθηματικός του Κέιμπριτζ της δεκαετίας του 1920.

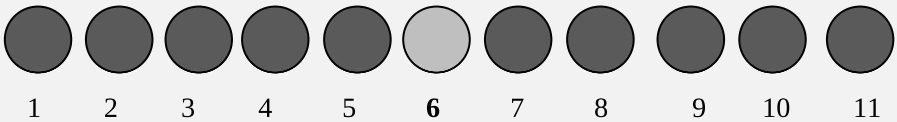
Στρατηγική Tweedledum-Tweedledee

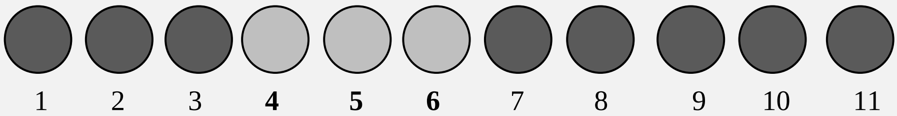
Ένα παιχνίδι δυο παικτών ονομάζεται αμερόληπτο αν οι παίκτες έχουν το ίδιο σύνολο επιλογών-κινήσεων.Θεωρούμε ένα αμερόληπτο παιχνίδι τελευταίας κίνησης δηλαδή έπειτα από διαδοχικούς γύρους,νικητής είναι αυτός που θα κάνει την τελευταία κίνηση.Ας υποθέσουμε ότι ο πρώτος παίκτης ή ο δεύτερος κάνει κάποια κίνηση και χωρίζει το παιχνίδι σε δύο όμοια και ανεξάρτητα μέρη (μισά).Τότε είναι εφικτό να κερδίσει αν καθρεφτίζει τις κινήσεις του αντιπάλου του,στο αντίθετο μέρος από εκεί που έπαιξε.Σε αυτού του είδους τα παιχνίδια εκμεταλλευόμαστε την συμμετρία.

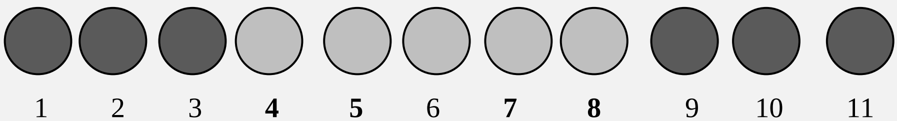
Για παράδειγμα, αν έχουν τοποθετηθεί σε μια σειρά 11 όμοια κέρματα,ένα σε κάθε θέση 1, 2, 3,…, 11. Παίζουν δυο παίκτες, ο Α και ο Β σε διαδοχικούς γύρους και σε κάθε γύρο ο κάθε παίκτης αφαιρει 1 ή 2 νομίσματα στις θέσεις Χ, Χ+1 (δηλαδή αφαιρεί γειτονικά κέρματα). Κερδίζει ο παίκτης που παίρνει το τελευταίο νόμισμα.



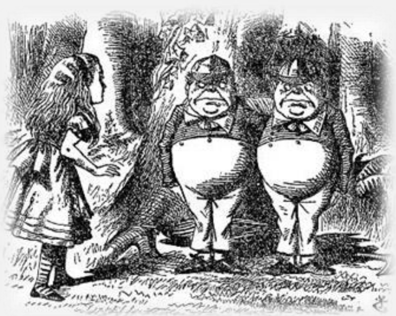
Υπάρχει στρατηγική νίκης για τον παίκτη που παίζει πρώτος, αφαιρεί το μεσαίο κερμα,το 6ο ’ τώρα όποια κίνηση και αν κάνει ο δεύτερος παίκτης στο ένα «μισό» α-φαιρεί το ίδιο πλήθος κερμάτων (1 ή 2) στο άλλο «μισό» στις συμμετρικές θέσεις ως προς το μεσαίο.Αν για παράδειγμα, ο δεύτερος παίκτης αφαιρέσει τα κέρματα 4,5 ο πρώτος αφαιρει τα 12-4=**8**,12-5=**7** .







Με αυτό τον τρόπο ο πρώτος θα πάρει το τελευταίο ή τα τελευταία κέρματα και θα νικήσει. Αν το πλήθος των κερμάτων ήταν άρτιο θα αφαιρούσε στην πρώτη κίνηση τα δυο μεσαία κέρματα.



Η ονομασία Tweedledum-Tweedledee προκύπτει από τους δίδυμους χαρακτήρες του βιβλίου του Λ.Κάρολ, *«Η Αλίκη στην χώρα των θαυμάτων»* που μιλούσαν με ρίμες και καθρέφτιζαν ο ένας τις κινήσεις και τα λόγια του άλλου.

Ένα παραπλήσιο πρόβλημα συμμετρίας από τον H.E.Dudeney (*)

139.Δυο φίλοι Α και Β παίζουν το εξής παιχνίδι:Στην επιφάνεια ενός κυκλικού τραπεζιού τοποθετούν διαδοχικά (ο ένας μετά τον άλλο) κέρματα του ενός ευρώ μέχρι να καλύψουν ολόκληρη την επιφάνεια του τραπεζιού .Ο παίκτης που θα τοποθετήσει τελευταίος κέρμα κερδίζει. Ποιος από τους δυο φίλους θα κερδίζει το παιχνίδι; *(Πρώτος παίζει ο Α.)*

Λύση

Ο παίκτης Α μπορεί να κερδίζει πάντα, ανεξάρτητα από τις κινήσεις του δευτέρου.
Η τακτική που θα ακολουθήσει βασίζεται στην συμμετρία.

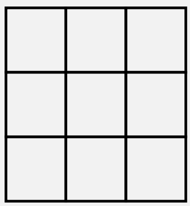
● *Τοποθετεί το πρώτο κέρμα έτσι, ώστε το κέντρο του να συμπέσει με το κέντρο του τραπεζιού.*

● *Κάθε φορά που ο παίκτης Β τοποθετεί ένα κέρμα Κ ,αυτός τοποθετεί το δικό του συμμετρικό του Κ, ως προς το κέντρο του τραπεζιού.*

Έτσι, για τον Α που παίζει πρώτος κάθε φορά που τοποθετεί νόμισμα ο Β , θα υπάρχει χώρος και για τον Α. Επομένως ο Α (ο παίκτης που θα παίξει πρώτος) έχει στρατηγική νίκης. ■

(*) *O Henry Ernest Dudeney (1857-1930) θεωρείται ο μεγαλύτερος δημιουργός μαθηματικών γρίφων στην Αγγλία.Δεν είχε λάβει ποτέ την τυπική μαθηματική εκπαίδευση, ωστόσο διέθετε το χάρισμα να δημιουργεί δύσκολα προβλήματα, τα οποία συχνά ανθίστανται πεισματικά στην συμβατική σκέψη.Έγραψε έξι βιβλία διασκεδαστικών μαθηματικών.*

Ο Πινγκ Πονγκ παρατηρεί ότι η τεχνική της συμμετρίας εφαρμόζεται και σε μια παραλλαγή του γνωστού παιχνιδιού των μαθητικών μας χρονων την Τρίλιζα:
«Δυο φίλοι Α,Β χρησιμοποιούν τον διπλανό 3x3 πίνακα για να παίξουν τρίλιζα. Καθένας τους βάζει από ένα Χ ή Ο σε ένα τετραγωνικό κελί της επιλογής του. Νικητής είναι όποιος καταφέρει να βάλει πρώτος το ίδιο σύμβολο και στα τρία τετραγωνικά κελιά ορίζοντια ή κάθετα. Ο παίκτης που θα παίξει πρώτος ή εκείνος που θα παίξει δεύτερος έχει στρατηγική νίκης ή ισοπαλίας στην χειρότερη περίπτωση,και γιατί;



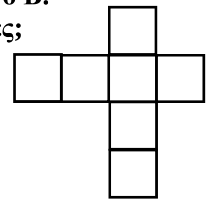
Ο πρώτος παίκτης μπορεί να νικήσει, αν βάλει στο κεντρικό τετράγωνο,π.χ το γράμμα Χ .Ο δεύτερος παίκτης,τότε, πρέπει να βάλει οπωσδήποτε Ο σε οποιοδήποτε άλλο τετραγωνικό κελί (γιατί αν βάλει Χ κερδίζει αμέσως ο πρώτος). Ύστερα, ο πρώτος παίκτης βάζει Ο στο συμμετρικό (ως προς το κέντρο) τετράγωνο.



Δοκιμάστε το ακόλουθο συναφές πρόβλημα το οποίο επιλύεται επίσης με χρήση συμμετρίας.
Σε ένα τετράγωνο 50x50 ,δυο παίκτες χρωματίζουν εναλλάξ,είτε ένα ορθογώνιο 1x2 ,είτε ένα τετράγωνο 1x1, είτε ένα τετράγωνο 2x2 .Οι χρωματισμένες περιοχές δεν μπορούν να ξαναχρωματιστούν.Νικητής είναι ο παίκτης που θα χρωματίσει την τελευταία άβαφη περιοχή του πινάκα.Υπάρχει νικητήρια στρατηγική τέτοια ώστε κάποιος από τους παίκτες να κερδίσει σίγουρα το παιχνίδι;

Του ιδίου φυράματος με το προηγούμενο.

140.Δυο παίκτες Α και Β παίζουν εναλλάξ συμπληρώνοντας τα τετράγωνα του σχήματος με ένα ● ή ένα ■ ,κερδίζει όποιος βάλει τρία ● ή τρία ■ στην σειρά είτε οριζόντια είτε κάθετα. Παίζει πρώτος ο Α και δεύτερος ο Β. Υπάρχει στρατηγική νίκης για κάποιον από τους δύο παίκτες;



(Υπόδειξη:Ο Α αν επιλέξει ένα συγκεκριμένο κελί για την τοποθέτηση συμβόλου θα φέρει τον Β σε αδιέξοδο, ποιο είναι αυτό;)

Παιχνίδια με σωρούς



Τοποθετούμε 20 σπίρτα σε ένα τραπέζι,δυο παίκτες παίζουν εναλλάξ και ο κάθε παίκτης μπορεί να αφαιρέσει ένα ή δυο σπίρτα κάθε φορά που έρχεται η σειρά του.Αυτός που θα αφαιρέσει το τελευταίο σπίρτο κερδίζει το παιχνίδι.Ποιος από τους δυο παίκτες έχει το πλεονέκτημα;Ο πρώτος ή ο δεύτερος;

Στην αρχή δοκιμάζουμε να παίξουμε μερικά παιχνίδια.Γρήγορα θα ανακαλύψουμε ότι ο παίκτης που αφήνει 3 σπίρτα στο τραπέζι κερδίζει την παρτίδα.Αυτή είναι μια καλή σκέψη αλλά δεν οδηγεί τον παίκτη στην νίκη, επειδή πρέπει να γνωρίζει πώς να φτάσει στα 3 σπίρτα.Ωστόσο ξέρουμε τώρα ότι κερδίζει το παιχνίδι αν έχει τραβήξει το 17° σπίρτο (αφήνοντας 3 σπίρτα).Προχωρώντας αντίστροφα κερδίζει αν έχει τραβήξει το 14° σπίρτο (αφήνοντας 6 σπίρτα),γενικά κερδίζει πάντα ο παίκτης που αφήνει στο τραπέζι ένα πλήθος σπίρτων πολλαπλάσιο του 3.Τωρα είναι εύκολο να προσδιορίσουμε την νικητήρια στρατηγική: με αρχικό σωρό 20 σπίρτων, ο πρώτος παίκτης μπορεί πάντα να κερδίσει παίρνοντας 2 σπίρτα στον πρώτο γύρο και αφήνοντας πάντα στο τραπέζι ένα πολλαπλάσιο του 3 (αν ο δεύτερος παίκτης πάρει 1 σπίρτο,ο πρώτος θα πάρει 2 και αντίστροφα).Συνεπώς,το συγκεκριμένο παιχνίδι δίνει το πλεονέκτημα στον πρώτο παίκτη με την νικητήρια στρατηγική να είναι η έξης:

Ο πρώτος παίκτης διαιρεί το αρχικό πλήθος των σπίρτων (20) με το 3 και κατόπιν αφαιρεί σαν πρώτη κίνηση από το σωρό το υπόλοιπο της διαίρεσης και στην συνέχεια «παρακολουθεί» τον αντίπαλο του τραβώντας 1 ή 2 σπίρτα κάθε φορά ώστε να αφήνει πολλαπλάσιο του 3 στον δεύτερο παίκτη.

Τι θα γινόταν αν τα σπίρτα ήταν 21;Εδώ τα πράγματα δυσκολεύουν για τον πρώτο παίκτη καθώς ότι και να τραβήξει 1ή 2 σπίρτα αν δεύτερος παίκτης τον ακολουθεί τραβώντας αντίστοιχα 2 ή 1 σπίρτο αφήνοντας αυτός στο τραπέζι πολλαπλάσιο του 3 πλήθος σπίρτων και μοιραία ο πρώτος παίκτης θα χάσει. Άρα στο συγκεκριμένο παιχνίδι όλα εξαρτώνται από το αν το αρχικό πλήθος των σπίρτων είναι ή όχι πολλαπλάσιο του 3.Αν δεν είναι κερδίζει ο πρώτος παίκτης αν είναι κερδίζει ο δεύτερος.

Ποιο είναι το συμπέρασμα που καταλήγουμε;Είναι δυνατόν να γενικεύσουμε.Η απάντηση είναι καταφατική.

Αν σε ένα παιχνίδι με μ σπίρτα (ή οπουδήποτε άλλο αντικείμενο) στο τραπέζι και σε κάθε γύρο δυο παίκτες μπορούν να πάρουν από 1 έως ν σπίρτα ($\nu<\mu$). Νικητής είναι ο παίκτης που θα πάρει το τελευταίο σπίρτο.Ποιος παίκτης έχει νικητήρια στρατηγική και πως την εντοπίζουμε;
Διαιρούμε το μ με το ν+1 και βρίσκουμε το υπόλοιπο υ της διαίρεσης που προφανώς είναι ένας αριθμός από το 0 έως το ν.
Στην συνέχεια έχουμε δυο περιπτώσεις:
● Το υπόλοιπο της διαίρεσης είναι 0.Σε αυτήν την περίπτωση, το πλεονέκτημα έχει ο δεύτερος παίκτης που θα πρέπει να αφήνει ένα αριθμό σπίρτων στο τραπέζι πολλαπλάσιο του ν+1. Συνεπώς σε κάθε γύρο αν ο πρώτος παίκτης τραβήξει α σπίρτα ($0<\alpha<\nu+1$),ο δεύτερος θα πρέπει να τραβήξει ν+1-α σπίρτα .
● Το υπόλοιπο της διαίρεσης είναι υ. ($0<\upsilon<\nu+1$)Σε αυτήν την περίπτωση, το πλεονέκτημα έχει ο πρώτος παίκτης που θα πρέπει στον πρώτο γύρο να τραβήξει υ σπίρτα για να αφήσει ένα αριθμό σπίρτων πολλαπλάσιο του ν+1 στο τραπέζι, έτσι ώστε να μπορέσει να παίξει σαν τον δεύτερο παίκτη στην προηγούμενη περίπτωση και να κερδίσει.Δηλαδή σε κάθε περίπτωση αν ο δεύτερος παίκτης τραβήξει α σπίρτα ($0<\alpha<\nu+1$), ο πρώτος θα πρέπει να τραβήξει ν+1-α σπίρτα.
«Πρέπει να εισαι σπίρτο για να παίξεις τέτοια παιχνίδια!» Ειπε ο Πινγκ Πονγκ και δεν γέλασε κανένας..

Δείτε το ακόλουθο παράδειγμα

141.Δυο παίκτες Α και Β παίζουν εναλλάξ και από δυο σωρούς με 10 και 12 σπίρτα μπορούν να πάρουν ένα σπίρτο από έναν από τους δυο σωρούς είτε ένα σπίρτο από κάθε σωρό. Ο παίκτης Α παίζει πρώτος. Το παιχνίδι τελειώνει όταν ένας από τους δυο παίκτες πάρει και το τελευταίο σπίρτο αυτός είναι και ο νικητής. Υπάρχει στρατηγικής νίκης για κάποιον από τους δυο παίκτες;

Λύση

Στρατηγική νίκης έχει ο παίκτης που παίζει δεύτερος ,ο Β.Κάθε φορά που παίζει ο Α ο παίκτης Β παίζει με τέτοιο τρόπο ώστε και στους δυο σωρούς να υπάρχει άρτιος αριθμός σπίρτων. Είναι πάντα δυνατό. Άρα ο Β θα έχει την τελευταία κίνηση και θα κερδίσει το παιχνίδι. ■

142.Στον πίνακα είναι γραμμένοι 50 άρτιοι και 50 περιττοί αριθμοί. Δυο φίλοι ο Αντώνης και ο Βασίλης παίζουν το εξής παιχνίδι: Σβήνουν με την σειρά (σε διαδοχικούς γύρους) από δυο τυχαίους αριθμούς. Το παιχνίδι τελειώνει όταν μένουν γραμμένοι δυο μόνο αριθμοί. Ο Αντώνης κερδίζει όταν το άθροισμα των δυο αυτών αριθμών είναι περιττός,διαφορετικά κερδίζει ο Βασίλης.Υπάρχει στρατηγική νίκης για τον Αντώνη αν παίξει πρώτος;

Λύση

Οι 100 αριθμοί αποτελούν 50 ζεύγη, αυτός που θα παίξει $1^{ος}$ θα παίξει και $49^{ος}$,δηλαδή τελευταίος. Γνωρίζουμε ότι ο Αντώνης παίζει πρώτος τότε θα πρέπει να φροντίσει , ώστε οι δυο τελευταίοι αριθμοί να είναι ένας άρτιος και ένας περιττός .Το άθροισμα των 50 περιττών είναι άρτιος καθώς και το άθροισμα των 50 αρτίων.
Πως πρέπει να κινηθεί ο Αντώνης;
Σβήνει στην αρχή έναν άρτιο και έναν περιττό αριθμό, όποτε το άθροισμα των εναπομεινάντων είναι επίσης περιττός. Από εκεί και πέρα πρέπει να διατηρήσει το άθροισμα περιττό.Πως το κάνει ότι και αν παίζει ο Βασίλης αυτός παίζει ακριβώς αντίθετα.

Δηλαδή,
● Σβήνει ο Βασίλης άρτιο- άρτιο ο Αντώνης σβήνει περιττό-περιττό.
● Σβήνει ο Βασίλης περιττό- περιττό ο Αντώνης σβήνει άρτιο -άρτιο.
● Σβήνει ο Βασίλης περιττό- άρτιο ο Αντώνης σβήνει επίσης περιττό –άρτιο.
Έτσι ο Αντώνης εξασφαλίζει ότι ο άθροισμα ελαττώνεται κατά άρτιο αριθμό άρα παραμένει περιττός και στο τέλος θα νικήσει! ■

Μην φοβάστε να «χάσετε» τον χρόνο σας δοκιμάζοντας.Κάντε σχήματα ή πειραματιστείτε με αριθμούς μικρότερους αν είναι ανάγκη. Μολύβι ,χαρτί και παιχνίδι με το πρόβλημα μέχρι να αναδυθεί το μοτίβο ή και πάλι όχι. Ο χρόνος που αφιερώνετε σε ένα μαθηματικό πρόβλημα δεν πάει ποτέ χαμένος ακόμα και αν νομίζετε ότι δεν σημειώνετε καμία πρόοδο. *«Η επίλυση είναι αποτέλεσμα κυρίως επίμονης και λιγότερο ευφυΐας!»* Είπε ο Πινγκ Πονγκ και έφαγε μια μπανάνα ή και δυο!



143.Σε ένα τραπέζι είναι τοποθετημένος ένας σωρός από 60 σπίρτα. Δυο παίκτες παίζουν σε διαδοχικούς γύρους και η μόνη επιτρεπτή κίνηση είναι η αφαίρεση από τον σωρό κ σπίρτων, οπού κ είναι θετικός διαιρέτης του εκάστοτε εναπομείναντα σωρού.Νικητής είναι ο παίκτης που θα αναγκάσει τον αντίπαλο του να πάρει και το τελευταίο σπίρτο.
Λύση
Αρχικά παρατηρούμε ότι οι διαιρέτες του 60 είναι: 1,2,3,4,5,6,10,15,20,30,60
Ονομάζουμε τους παίκτες Α και Β και έστω ότι παίζει πρώτος ο Α.
Ο Α θα κερδίσει αν καταφέρει:
- ο Β να έχει μπροστά του στο σωρό 1 σπίρτο.
- ο Β να έχει μπροστά του στο σωρό 3 σπίρτα (αν ο Β αφαιρέσει 3 χάνει, αν αφαιρέσει 1 τότε Α αφαιρει 1 και μένει με 1 οπότε πάλι χάνει).
- ο Β να έχει μπροστά του στο σωρό 5 σπίρτα (αν ο Β αφαιρέσει 5 χάνει, αν αφαιρέσει 1 τότε ο Α αφαιρει 1 και μένει με 3 οπότε πάλι χάνει).
- ο Β να έχει μπροστά του στο σωρό 7 σπίρτα (αν ο Β αφαιρέσει 7 χάνει, αν αφαιρέσει 1 τότε ο Α αφαιρει 1 και μένει με 5 οπότε πάλι χάνει).
- ο Β να έχει μπροστά του στο σωρό 9 σπίρτα (αν ο Β αφαιρέσει 9 χάνει, αν αφαιρέσει 1 τότε ο Α αφαιρει 1 και μένει με 7 οπότε πάλι χάνει,αν ο Β αφαιρέσει 3 τότε ο Α αφαιρει 1 και μένει με 5 οπότε πάλι χάνει,).
- ο Β να έχει μπροστά του στο σωρό 11 σπίρτα (αν ο Β αφαιρέσει 11 χάνει, αν αφαιρέσει 1 τότε ο Α αφαιρει 1 και μένει με 9 οπότε πάλι χάνει).
- ο Β να έχει μπροστά του στο σωρό 13 σπίρτα (αν ο Β αφαιρέσει 13 χάνει, αν αφαιρέσει 1 τότε ο Α αφαιρει 1 και μένει με 11 οπότε πάλι χάνει).
- ο Β να έχει μπροστά του στο σωρό 15 σπίρτα (αν ο Β αφαιρέσει 5 τότε ο Α αφαιρει 1 και μένει με 9 οπότε πάλι χάνει, αν ο Β αφαιρέσει 3 τότε ο Α αφαιρει 1 και μένει με 11 οπότε πάλι χάνει).
…….
Το μοτίβο ξεκαθαρίζει.
Ο Α αφαιρει διαιρέτες έτσι ώστε να μένει στον Β περιττός αριθμός σπίρτων ,μπορεί πάντα να το κάνει καθώς αρχικά αφαιρει περιττό αριθμο σπιρτων από το 60 και μετά

πάντα μπορεί να αφαιρει το 1.Οσο ο Β μένει με περιττό αριθμό σπίρτων,μοιραία θα οδηγηθεί στην ήττα. ■

144.Διαθέτουμε 4 σωρούς από βόλους που αποτελούνται από 6,8,8 και 9 βόλους αντίστοιχα.Πέντε παίχτες που τους συμβολίζουμε Α,Β,Γ,Δ,Ε αντίστοιχα παίζουν σε διαδοχικούς γύρους με αυτήν την σειρά,σε κάθε γύρο διαλέγουν ένα σωρό από βόλους και τον χωρίζουν σε δυο μικρότερους.Χαμένος είναι ο παίκτης που δεν θα μπορεί να το κάνει αυτό.(Μίζερη εκδοχή)

Λύση

Το άθροισμα των βόλων είναι 6+8+8+9=31,έχουμε 4 σωρούς και σε κάθε γύρο το πλήθος των σωρών αυξάνει κατά 1.Αρα πρόκειται να πραγματοποιηθούν 31-4=27 γύροι.Οι παίκτες παίζουν με την σειρά Α,Β,Γ,Δ,Ε οπότε αν διαιρέσουμε το 27 με το 5 και λάβουμε το υπόλοιπο έχουμε 2.Αρα ο $2^{ος}$ (Β) είναι ο τελευταίος παίκτης που θα μπορέσει να παίξει,οπότε ο $3^{ος}$ (Γ) παίκτης έχασε! ■

145.Ο Αντώνης και ο Βασίλης τοποθέτησαν σε ένα κουτί 2019 κέρματα και σε ένα δεύτερο κουτί 2021 κέρματα και συμφώνησαν να παίξουν το εξής παιχνίδι: Κάθε παίχτης με την σειρά του,θα επιλέγει ένα από τα δυο κουτιά,όποιο θέλει,θα το αδειάζει από όλα τα κέρματα που περιέχει και στην συνέχεια θα μοιράζει όπως επίσης θέλει τα κέρματα του άλλου κουτιού στα δυο κουτιά,φροντίζοντας σε κάθε κουτί να υπάρχει τουλάχιστον ένα κέρμα.Αν δεν μπορεί να χωρίσει τα κέρματα τηρώντας αυτόν τον κανόνα τότε χάνει το παιχνίδι και κερδίζει ο άλλος.Το παιχνίδι παίζεται σε συνεχόμενους γύρους με πρώτο τον Αντώνη.Υπάρχει βέλτιστη στρατηγική που θα εξασφαλίσει την νίκη σε κάποιον από τους δυο παίκτες;

Λύση

Ο Αντώνης όποιο κουτί και να επιλέξει να αδειάσει,με όποιο τρόπο και αν μοιράσει τα κέρματα του άλλου κουτιού είναι σίγουρο ότι σε ένα κουτί θα μείνουν κέρματα άρτιου πλήθους και στο άλλο κέρματα περιττού πλήθους.Ο Βασίλης τώρα,με την σειρά του μπορεί να αδειάσει το κουτί με τα κέρματα περιττού πλήθους και να μοιράσει τα κέρματα άρτιου πλήθους ως εξής:

Ένα κέρμα στο ένα κουτί και τα εναπομείναντα περιττού πλήθους κέρματα στο άλλο. Ο Αντώνης τώρα δεν έχει επιλογή μπορεί μόνο να αδειάσει μόνο το κουτί με το ένα κέρμα και να μοιράσει τα κέρματα περιττού πλήθους.Η ίδια ακριβώς κατάσταση όταν ξεκίνησε το παιχνίδι.Ο Βασίλης συνεχώς θα ακολουθεί την ίδια τακτική: ένα κέρμα και περιττού πλήθους κέρματα μέχρι που μοιραία κάποια στιγμή θα καταλήξει να μοιράσει δυο κέρματα ένα σε κάθε κουτί.Κατάσταση από την όποια δεν θα μπορεί να συνεχίσει ο Αντώνης και θα χάσει.Οπότε,νικητής θα είναι πάντα ο δεύτερος παίκτης.Αν τα κουτιά αρχικά περιείχαν το ένα άρτιου πλήθους κέρματα και το άλλο περιττού τότε θα κέρδιζε πάντα ο πρώτος παίκτης. ■

Καμία φορά τα παίγνια είναι στημένα!

146.Ο Νίκος με τον Γιάννη έχουν πάνω σε ένα τραπέζι ένα σωρό από 97 σπίρτα και εναλλάξ παίρνουν από 1 έως 7 σπίρτα.Πρώτος παίζει ο Νίκος.Το παιχνίδι τελειώνει όταν ένας από τους δυο πάρει και το τελευταίο σπίρτο. Κατόπιν καταμετρά ο καθένας τα σπίρτα του αν το πλήθος των σπίρτων του Νίκου είναι σχετικά πρώτος με το πλήθος των σπίρτων του Γιάννη κερδίζει ο Νίκος.Σε αντίθετη περίπτωση κερδίζει ο Γιάννης.

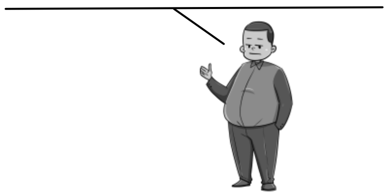
Υπάρχει νικητήρια στρατηγική για κάποιον από τους δυο παίκτες;

Λύση

Ο Νίκος είναι καταδικασμένος να κερδίσει όπως και αν παίξει. Αν α τα σπίρτα του Νίκου και β τα σπίρτα του Γιάννη και δεν είναι πρώτοι μεταξύ τους αυτό σημαίνει ότι υπάρχει κοινός διαιρέτης δηλαδή ένας θετικός ακέραιος κ διάφορος του 1 τέτοιος ώστε $α=κλ$, $β=κν$.Αλλά,$α+β=97$ ή $κλ+κν=97$ ή $κ(λ+ν)=97$

Όμως ο 97 είναι πρώτος άρα δεν μπορεί να γραφεί ως γινόμενο δυο ακέραιων διαφορετικών του 1 και του 97 .Άρα, ανεξάρτητα από το πως θα παίξουν οι δυο παίκτες πάντα νικητής θα είναι ο Νίκος. ■

«Αν στο τραπέζι πριν το παιχνιδι δεν βλέπεις κανένα κορόιδο, εσύ είσαι το κορόιδο!»



147.Δυο μαθητές Α και Β παίζουν το ακόλουθο παιχνίδι:Πάνω σε ένα κύκλο δίνονται 100 διαφορετικά σημεία και οι δυο μαθητές διαδοχικά,ο ένας μετά τον άλλον γράφουν μια χορδή, διαφορετική κάθε φορά, με άκρα δυο οποιανδήποτε από τα 100 δεδομένα σημεία. Το παιχνίδι τελειώνει όταν καθένα από τα 100 σημεία χρησιμοποιηθεί ως άκρο χορδής μια τουλάχιστον φορά.Νικητής είναι ο μαθητής ο οποίος θα γράψει την χορδή με την οποία τελειώνει το παιχνίδι.Αν ο μαθητής Α αρχίσει πρώτος, ποιος από τους δυο μαθητές έχει στρατηγική νίκης;*(δηλαδή ποιος από τους δυο μαθητές μπορεί να παίξει έτσι, ώστε να νικήσει, ανεξαρτήτως του πως θα παίξει ο άλλος;) (Διαγωνισμός Ε.Μ.Ε. Ευκλείδης 2001)*

Λύση

Ονομάζουμε Σ1 το σημείο που θα χρησιμοποιηθεί πρωτο,Σ2 αυτό που θα χρησιμοποιηθεί δεύτερο κ.λ.π. Παρατηρούμε ότι ο μαθητής που θα χρησιμοποιήσει πρώτος το σημείο $Σ_{98}$, αυτός θα χάσει το παιχνίδι ,αφού ο άλλος στην συνέχεια θα γράψει την χορδή $Σ_{99}Σ_{100}$ και θα τελειώσει το παιχνίδι.

Για την χρήση των σημείων $Σ_1,Σ_2,Σ_3,\ldots,Σ_{97}$ μπορούν να σχεδιαστούν το πολύ:

$\frac{97\cdot 96}{2}=4656$ χορδές.(Κάθε σημείο μπορεί να ενωθεί με όλα τα υπόλοιπα.)

Επειδή ο Α παίζει πρώτος ο Β παίζει τις ζυγές φορές ,και επειδή όλες οι δυνατές χορδές για τα 97 σημεία είναι αρτίου πλήθους είναι δυνατόν ο Β να χαράξει την 4656^{η} χορδή και να υποχρεώσει τον μαθητή Α να χρησιμοποιήσει πρώτος το σημείο Σ_{97},έτσι έχει στρατηγική νίκης. ■

148. Τοποθετούμε επτά κέρματα του ενός ευρώ σε ένα κύκλο.Μπορείτε να τα αναποδογυρίσετε,αν το μόνο που επιτρέπεται είναι να γυρίζετε κάθε φορά πέντε διαδοχικά κέρματα; Είναι δυνατόν να πετύχετε το ίδιο γυρίζοντας μόνο τέσσερα κέρματα κάθε φορά;

Λύση

● Ονομάζουμε τα κέρματα (κατά την δεξιόστροφη φορά) 1,2,3,4,5,6,7.Γυρίζουμε τα κέρματα 1,2,3,4,5 και μετά τα 2,3,4,5,6 και ούτω καθεξής επτά φορές αρχίζοντας κάθε πεντάδα από μια θέση δεξιότερα.Έτσι,τελευταία πεντάδα θα είναι η 7,1,2,3,4.Καθε φορά γυρίζουμε πέντε κέρματα και,επομένως,κάθε κέρμα αλλάζει πέντε φορές τελικά θα μείνει στην ανάποδη από την αρχική του πλευρά.

●Αν γυρίσουμε τέσσερα κέρματα κάθε φορά,δεν μπορούμε να αναποδογυρίσουμε και τα επτά.Για να επαληθεύσουμε ότι είναι πράγματι αδύνατο,γράφουμε τον αριθμό +1 στην πλευρά της κεφαλής και τον αριθμό -1 στην πλευρά των γραμμάτων.Έτσι,το γύρισμα ενός κέρματος ισοδυναμεί με την αλλαγή του πρόσημου του αριθμού στην πάνω του πλευρά.Όταν γυρίζουμε τέσσερα κέρματα αλλάζουν τέσσερα πρόσημα,οπότε το γινόμενο των +1 και -1 στις πάνω πλευρές των κερμάτων παραμένει σταθερό. Αντίθετα,αν γυρίσουμε επτά κέρματα,το γινόμενο αυτό θα αλλάξει πρόσημο. ■

149. Ο Γιώργος και η Μαρία παίζουν το ακόλουθο παιχνίδι.Αρχικά στον πίνακα είναι γραμμένοι δυο αριθμοί, οι 1/217 και 1/218 .Σε κάθε κίνηση, ο Γιώργος επιλέγει ένα θετικό αριθμό x και η Μαρία επιλέγει έναν από τους δυο αριθμούς και προσθέτει το x. Ο Γιώργος νικά, αν ένας από τους δυο αριθμούς στον πίνακα καταλήξει να γίνει 1.Υπάρχει στρατηγική νίκης για τον Γιώργο ανεξάρτητα από το πως θα παίξει η Μαρία; *(Tournament of towns)*

Λυση

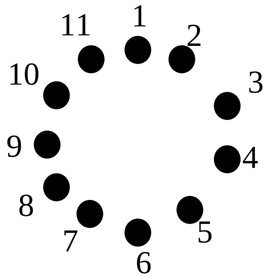
Ο Γιώργος επιλέγει τον $\frac{216}{217}$.Αν η Μαρία τον προσθέσει στον $\frac{1}{217}$ τότε κερδίζει ο Γιώργος. Προφανώς θα προτιμήσει να τον προσθέσει στο $\frac{1}{218}$ και θα ισχύει

$\frac{1}{218}+\frac{216}{217}=\frac{47305}{47306}$.Ο Γιώργος τώρα επιλέγει $\frac{1}{47306}$ η Μαρία μπορεί να τον προσθέσει μόνο στον αριθμό που δεν είναι $\frac{47305}{47306}$.Ο Γιώργος απλά επιλέγει το $\frac{1}{47306}$ στην σειρά 47088 φορές

Τότε, $\frac{47088}{47306}+\frac{1}{217}=\frac{47088}{47306}+\frac{218}{47306}=\frac{47306}{47306}=1$ ■

150.Τοποθετούμε 11 κέρματα στο τραπέζι, σε κυκλική διάταξη. Οι παίκτες εναλλάξ αφαιρούν από το σχήμα ένα ή δύο κέρματα. Ο μόνος περιορισμός είναι ότι όποτε αφαιρέσουν δύο κέρματα, τότε αυτά πρέπει να είναι σε γειτονικές θέσεις, χωρίς να παρεμβάλλονται άλλα κέρματα ή κενά μεταξύ των δύο. Ο παίκτης που θα πάρει το τελευταίο ή τα δύο τελευταία δύο κέρματα, κερδίζει.Υπάρχει στρατηγική νίκηγια τον δεύτερο παίκτη;

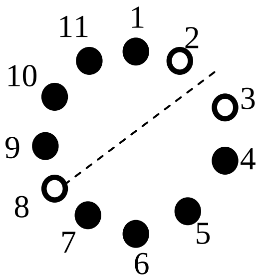




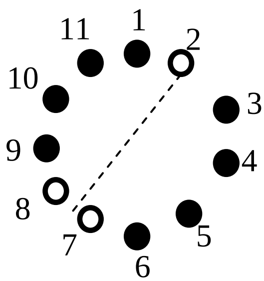
Λύση

Η διαδικασία που ακολουθούμε βασίζεται στην συμμετρία.

● Ας υποθέσουμε ότι ο αντίπαλος αφαιρέσει ένα κέρμα π.χ το 8.Τότε έχουμε στο νου μας μια νοερή ευθεία που διέρχεται από το 8 και χωρίζει τα υπόλοιπα κέρματα σε δυο ισοπληθείς ομάδες των 5 κερμάτων (στο σχήμα τα κέρματα 9,10,11,1,2 και 7,6,5,4,3) και αφαιρούμε τα κέρματα 2,3, από εκεί και μετά ότι κίνηση και να κάνει ο αντίπαλος (αφαιρει 1 ή 2 κέρματα) αφαιρούμε το ίδιο πλήθος κέρματα συμμετρικά ως προς την ευθεία στα δικά του. Για παράδειγμα αν αφαιρέσει το 11 εμείς αφαιρούμε το 5 ,κ.ο.κ.



● Ανάλογα θα λειτουργήσουμε αν στην πρώτη κίνηση του ο αντίπαλος αφαιρέσει δυο κέρματα. Π.χ τα 8,7 τότε εμείς θεωρούμε πάλι μια ευθεία που διέρχεται ανάμεσα από τα 8,7 και χωρίζει τα κέρματα σε δυο ισοπληθείς ομάδες κερμάτων , η ευθεία θα διέρχεται από το κέρμα 2 και αυτό αφαιρούμε. Από κει και πέρα εργαζόμαστε συμμετρικά. Για παράδειγμα, αν στο σχήμα ο αντίπαλος αφαιρέσει το 9, απαντάμε με το 6. Αν αφαιρέσει τα (συνεχόμενα) 11 και 1,απαντάμε με τα 3 και 4, και ούτω καθεξής. Πάντα θα έχουμε κέρμα ή κέρματα να αφαιρέσουμε (το συμμετρικό) μετά από κάθε κίνηση του αντιπάλου, οπότε έχουμε νικηφόρα στρατηγική για τον δεύτερο παίκτη. ■



151.Σε ένα τηλεπαιχνίδι με τον ευφάνταστο τίτλο *«Βρες τον αριθμό και κέρδισε»*,λαμβάνουν μέρος δυο παίκτες.Σε κάθε παίκτη έχει δοθεί μυστικά ένας ακέραιος αριθμός από το 1 μέχρι το 100,οι δυο παίκτες γνωρίζουν ότι οι αριθμοί που έχουν είναι διαδοχικοί.Ο σκοπός για κάθε παίκτη είναι να μαντέψει τον αριθμό του άλλου παίκτη.
Οι κανόνες του παιχνιδιού είναι οι εξής:
-Οι δυο παίκτες βρίσκονται σε ένα δωμάτιο όπου ένα ρολόι τοίχου κτυπάει κάθε λεπτό.
-Οι παίκτες απαγορεύεται να επικοινωνήσουν μεταξύ τους με οποιοδήποτε τρόπο.
-Οι παίκτες παραμένουν στο δωμάτιο μέχρι κάποιος από τους δυο να μαντέψει σωστά τον αριθμό του άλλου παίκτη.Μόλις οποιοσδήποτε από τους δυο μαντέψει τον αριθμό περιμένει τον χτύπο του ρολογιού να τον ανακοινώσει.
-Το παιχνίδι συνεχίζεται μέχρι κάποιος από τους δυο ανακοινώσει τον αριθμό που νομίζει ότι έχει ο άλλος.
-Οι διαγωνιζόμενοι κερδίζουν 10000 ευρώ αν μαντέψουν σωστά και τίποτα αν μαντέψουν λάθος.
Υπάρχει στρατηγική νίκης στο παραπάνω παιχνίδι;
(Θεωρούμε ότι οι δυο διαγωνιζόμενοι είναι εξίσου ικανοί να κάνουν απόλυτα λογικούς συλλογισμούς και το γνωρίζουν αυτό αμοιβαία)

Λύση

Η πρώτη σκέψη είναι ότι δεν υπάρχει σίγουρη τακτική νίκης,αν ένας από τους παίκτες έχει το 22 δεν μπορεί να γνωρίζει αν ο άλλος παίκτης έχει το 21 η το 23,οπότε εύλογα μπορεί να υποτεθεί ότι υπάρχει μια πιθανότητα νίκης 50%. Όμως υπάρχει στρατηγική νίκης και βασίζεται τόσο στο κανόνα του παιχνιδιού που θέλει να ανακοινώνεται ο αριθμός σε κάθε χτύπο του ρολογιού όσο και στο ότι γνωρίζουν αμοιβαία ότι είναι εξίσου ικανοί να κάνουν απόλυτα λογικούς συλλογισμούς.Οι δυο παίκτες μπορούν επαγωγικά σκεπτόμενοι να βρουν τον αριθμό.

Ας υποθέσουμε ότι στον πρώτο παίκτη δίνεται ο αριθμός 1 και στον άλλο ο αριθμός 2,τότε ο πρώτος παίκτης μόλις περάσει το $1^{ο}$ λεπτό και χτυπήσει το ρολόι θα ανακοινώσει τον αριθμό του άλλου παίκτη που θα είναι 2.(οι αριθμοί είναι διαδοχικοί και ο μικρότερος είναι ο 1).

Αν υποθέσουμε ότι οι δυο παίκτες έχουν τους αριθμούς 2 και 3.Τότε ο παίκτης με τον αριθμό 2 αν χτυπήσει στο πρώτο λεπτό το ρολόι και ο άλλος παίκτης δεν ανακοινώσει αριθμό συμπεραίνει ότι δεν έχει το 1 άρα ο άλλος παίκτης έχει τον αριθμό 3 συνεπώς περιμένει το δεύτερο λεπτό να περάσει και στον δεύτερο χτύπο ανακοινώνει ότι ο άλλος παίκτης έχει αριθμό 3.

Γενικεύοντας αν οι δυο παίκτες έχουν τους αριθμούς κ,κ+1 αντίστοιχα αν περάσουν κ-1 λεπτά και στον κ-1 χτύπο του ρολογιού δεν ανακοινωθεί αριθμός ο παίκτης με τον αριθμό κ καταλαβαίνει ότι ο άλλος παίκτης έχει τον αριθμό κ+1 όπου και τον ανακοινώνει. ■

Το πρόβλημα είναι παραλλαγή ενός προβλήματος του 1956 που δημοσιεύτηκε απο τους George Gamow και Marvin Stern στο κλασσικό βιβλιο τους Puzzle Math.

152.Η Άλικη και ο Βρασίδας σε ένα παιχνίδι με διαδοχικούς γύρους επιλέγουν ε-ναλλάξ ακεραίους αριθμούς από το 1 μέχρι το 9.Κάθε αριθμός μπορεί να επιλεγεί μια φορά.Ο πρώτος που οι αριθμοί του έχουν άθροισμα 15 κερδίζει.Υπάρχει στρατηγική νίκης για την Αλίκη;

Λυση

Οχτώ υποσύνολα του συνόλου {1,2,3,4,5,6,7,8,9} έχουν άθροισμα 15,τα εξής: {1,5,9},{2,5,8},{3,5,7},{4,5,6},{1,6,8},{2,4,9},{2,7,6} και {3,4,8}.Μπορούμε να διατάξουμε τα παραπάνω υποσύνολα σε ένα μαγικό τετράγωνο 3x3.

2	7	6
9	5	1
4	3	8

Οι τρεις γραμμές,οι τρεις στήλες και οι δυο διαγώνιοι του τετραγώνου έχουν άθροισμα 15.Αρα το παραπάνω παιχνίδι δεν είναι παρά μια τρίλιζα σε ένα μαγικό τετράγωνο.Στην τρίλιζα όμως δεν υπάρχει στρατηγική νίκης. ■

153. Η Άννα και ο Βασίλης έχουν γράψει σε ένα φύλλο χαρτί στη σειρά τους αριθμούς 1,2,3,4,5,6 και παίζουν σε διαδοχικούς γύρους το εξής παιχνίδι: Σε κάθε κίνηση το παιδί που είναι η σειρά του να παίξει επιλέγει δυο αριθμούς και ανάμεσα τους τοποθετεί το σύμβολο της πρόσθεσης + ή του πολλαπλασιασμού x.Έπειτα από 5 κινήσεις-όσα και τα κενά μεταξύ των 6 αριθμών-υπολογίζεται η τιμή της αριθμητικής παράστασης. Η Άννα κερδίζει αν το αποτέλεσμα είναι περιττός ενώ αν είναι άρτιος κερδίζει ο Βασίλης. Η Άννα παίζει πρώτη ,υπάρχει στρατηγική νίκης για κάποιο από τα δυο παιδιά;

Λύση

Η Άννα έχει στρατηγική νίκης! Τοποθετεί το σύμβολο της πρόσθεσης μεταξύ 5 και 6
1… 2… 3… 4… 5 + 6 άρα προκύπτει 1… 2… 3… 4… 11 η Άννα έχει δημιουργήσει μια σειρά 5 αριθμών που εναλλάσσονται περιττοί-άρτιοι και αρχίζει και τελειώνει με περιττό αριθμό .Αυτή την κατάσταση θα διατηρήσει όποια κίνηση και να επιχειρήσει ο Βασίλης.

Διακρίνουμε περιπτώσεις:

► Υποθέτουμε ότι ο Βασίλης εισάγει σε κάποιο από τα 4 κενά το σύμβολο του πολλαπλασιασμού x .Έχουμε τις περιπτώσεις:

1 x 2… 3… 4… 11 άρα 2… 3… 4… 11
1… 2 x 3… 4… 11 άρα 1… 6… 4… 11
1… 2… 3 x 4… 11 άρα 1… 2… 12… 11
1… 2… 3… 4 x 11 άρα 1… 2… 3… 44

Τότε η Άννα παίζει αντίστοιχα ώστε να δημιουργήσει μια σειρά 3 αριθμών που εναλλάσσονται περιττοί- άρτιοι και αρχίζει και τελειώνει με περιττό αριθμό.

2+ 3… 4… 11 άρα 5… 4… 11
1… 6+4… 11 άρα 1… 10… 11
1… 2+ 12… 11 άρα 1… 14… 11
1… 2… 3+ 44 άρα 1… 2… 47

Από αυτό το σημείο και μετά ο Βασίλης είναι χαμένος καθώς ότι και να βάλει + ή x η Άννα βάζει το αντίθετο σύμβολο πράξης προκύπτει περιττό αποτέλεσμα και κερδίζει.

► Υποθέτουμε ότι ο Βασίλης εισάγει σε κάποιο από τα 4 κενά το σύμβολο της πρόσθεσης + . Έχουμε τις περιπτώσεις:

1 + 2… 3… 4… 11 άρα 3… 3 … 4… 11
1… 2 + 3… 4… 11 άρα 1… 5… 4… 11
1… 2… 3 + 4… 11 άρα 1… 2… 7… 11
1… 2… 3… 4 + 11 άρα 1… 2… 3… 15

Πάλι η Άννα παίζει αντίστοιχα ώστε να δημιουργήσει μια σειρά 3 αριθμών που εναλλάσσονται περιττοί- άρτιοι και αρχίζει και τελειώνει με περιττό αριθμό.

3x 3 … 4… 11 άρα 9 … 4… 11
1x 5… 4… 11 άρα 5… 4… 11
1… 2… 7x 11 άρα 1… 7… 77
1… 2… 3x 15 άρα 1… 2… 45

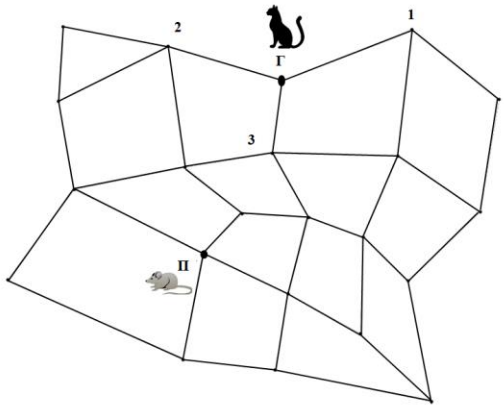
Από αυτό το σημείο και μετά ο Βασίλης είναι χαμένος καθώς ότι και να βάλει, + ή x η Άννα βάζει το αντίθετο σύμβολο πράξης προκύπτει περιττό αποτέλεσμα και κερδίζει. ■

Μια γενικευμένη εκδοχή του παραπάνω προβλήματος έχει τεθεί το 1984 ως διαγωνιστικό θέμα σε έναν από τους παλιότερους μαθηματικούς διαγωνισμούς, την Μαθηματική Ολυμπιάδα του Λένινγκραντ (Leningrad Mathematical Olympiad) στην πάλαι ποτέ κραταιά Σοβιετική Ένωση.Ο Διαγωνισμός έλαβε χώρα για πρώτη φορά την άνοιξη του 1934. Ο γραμμωτός κώδικας (Qr- Code) θα σας παραπέμψει στο κανάλι μου στο αντίστοιχο βίντεο με εκφώνηση-λύση.





154. Μια πολύ ευγενική γάτα κυνηγάει ένα εξίσου ευγενικό ποντίκι. Μετακινούνται πάνω στις ακμές του πλέγματος του σχήματος. Αρχικά, η γάτα βρίσκεται στο σημείο που φέρει την ένδειξη Γ και το ποντίκι είναι στο σημείο Π.Η γάτα κινείται πρώτη και μπορεί να μετακινηθεί σε οποιοδήποτε γειτονικό σημείο που είναι συνδεδεμένο με μια ακμή από το σημείο που βρίσκεται.Έτσι, η γάτα μπορεί να πάει στα σημεία 1, 2, ή 3, αλλά όχι σε άλλα, στην πρώτη της κίνηση. Η γάτα κερδίζει εάν μπορεί να φτάσει το ποντίκι σε 15 ή λιγότερες κινήσεις.Είναι δυνατόν η γάτα να κερδίσει;
(Κάθε κίνηση της γάτας ή του ποντικού είναι μόνο μια ακμή.)



Λύση
Αρχικά μοιάζει αδύνατο να απαντήσουμε.Το ποντίκι θα είναι πάντα ένα βήμα πιο μπροστά από την γάτα. Αλλά αν κοιτάξουμε το πλέγμα προσεκτικά θα διαπιστώσουμε ότι αποτελείται από τετράπλευρα πλην ενός τριγώνου πάνω αριστερά.Αγνοούμε το τρίγωνο και χρωματίζουμε τα σημεία του πλέγματος πράσινα- κόκκινα εναλλάξ έτσι ώστε δυο γειτονικά σημεία –κορυφές να έχουν διαφορετικό χρώμα, όπως καλή ώρα η σκακιέρα.Ας υποθέσουμε ότι η αφετηρία της γάτας το σημείο Γ είναι χρωματισμένο κόκκινο τότε το σημείο του ποντικιού το Π είναι επίσης κόκκινο.Για σκεφτείτε λίγο, με κάθε κίνηση της γάτας η θέση της θα αλλάζει χρώμα αλλά το ίδιο θα γίνεται με την ακόλουθη κίνηση του ποντικού αυτό σημαίνει ότι τα δυο ζώα θα έχουν πάντα το ίδιο χρώμα (θέσεις) δηλαδή ποτέ δεν θα βρίσκονται σε γειτονικές θέσεις άρα η γάτα είναι αδύνατο να πιάσει τον ποντικό.
Όλα αυτά συμβαίνουν αν αγνοήσουμε το τρίγωνο πάνω αριστερά,τώρα να χρωματίσουμε και την κορυφή του τριγώνου πάνω δεξιά είτε κόκκινο είτε πράσινο και εμφανίζονται στο πλέγμα δυο γειτονικές κορυφές με το ίδιο χρώμα. Άρα πως θα πρέπει να κινηθεί η γάτα; Σίγουρα θα πρέπει να περάσει από την πάνω κορυφή του τριγώνου θα αποκτήσει η θέση της διαφορετικό χρώμα από τον ποντικό και έτσι θα μπορέσει να στριμώξει το ποντικό! ■

Συναφή προβλήματα, συνήθως πιο απαιτητικά είναι αυτά που έχουν ζητούμενο όχι στρατηγική νίκης αλλά βέλτιστη στρατηγική.

155. Σε μία φυλακή βρίσκονται 100 φυλακισμένοι και οι δεσμοφύλακες αποφασίζουν να παίξουν ένα παιχνίδι μαζί τους,τους συγκεντρώνουν λοιπόν σε ένα δωμάτιο και τους ανακοινώνουν ότι την επόμενη μέρα,θα τους βάλουν σε μία ευθεία σειρά όπου ο καθένας βλέπει μόνο μπροστά,θα τους δέσουν τα μάτια με μαντήλια και θα τους φορέσουν ένα καπέλο είτε μαύρο είτε άσπρο.Θα τους βγάλουν τα μαντήλια και ένας δεσμοφύλακας θα ξεκινήσει από τον 1ο της σειράς (αυτόν που έχει όλους τους άλλους κρατούμενους μπροστά του) θα βάζει ένα πιστόλι στον κρόταφο του και θα ρωτάει τι χρώμα καπέλο φοράει.Ο κρατούμενος μπορεί να απαντήσει μονολεκτικά μαύρο ή άσπρο.Αν απαντήσει σωστά ελευθερώνεται αν απαντήσει λάθος εκτελείται.Όλοι οι κρατούμενοι το προηγούμενο βράδυ βρίσκονται στο ίδιο μεγάλο κελί και συζητούν.Υπάρχει βέλτιστη στρατηγική επιβίωσης;

Ο κάθε φυλακισμένος δεν μπορεί να δει τι χρώμα καπέλο φοράει ο ίδιος αλλά μπορεί να δει τι χρώμα έχουν τα καπέλα των μπροστινών του.Δεν μπορεί να κοιτάξει πίσω του όλοι κοιτάνε μπροστά.

Λυση

Πρώτη προσέγγιση: Αν ο κάθε φυλακισμένος πει στην τύχη ένα χρώμα για το καπέλο του τότε η πιθανότητα να ζήσει είναι 50%.Αρα αναμένουμε να σωθούν με αυτή την τακτική περίπου 50 φυλακισμένοι.

Δεύτερη προσέγγιση: Μια δεύτερη στρατηγική βελτιώνει τις πιθανότητες επιβίωσης.Οι φυλακισμένοι με άρτια αρίθμηση 2,4,6,8,10,..,100 να φωνάξουν το χρώμα του καπέλου του μπροστινού τους με περιττή αρίθμηση.Έτσι σίγουρα γνωρίζουν το χρώμα που φορούν οι μισοί φυλακισμένοι -αυτοί με την περιττή αρίθμηση- και θα σωθούν σίγουρα 50 από τους 100,για τους υπόλοιπους 50 θα υπάρχει 50% πιθανότητα να σωθούν αρα εκτιμούμε ότι θα σωθούν περίπου 25.Η στρατηγική αυτή έχει 75% επιτυχία.Μπορεί να βελτιωθεί;;

*Τρίτη προσέγγιση:*Οι φυλακισμένοι γνωρίζουν ότι αυτός που θα μπει πρώτος είναι αδύνατον να καταλάβει τι χρώμα καπέλο έχει και κατά συνέπεια οι πιθανότητα να επιβιώσει είναι 50%.Οπότε είναι προφανές ότι το χρώμα που θα πει ο πρώτος δεν θα έχει να κάνει με τον ίδιο αλλά πρέπει να δίνει την πληροφορία στους επόμενους για το τι καπέλο φορούν. Ο πρώτος θα μετρήσει τα καπέλα όλων των μπροστινών του και στη συνέχεια θα ακολουθήσει την εξής λογική:

Αν ο πρώτος δει 1 άσπρο καπέλο και 98 μαύρα,θα πει άσπρο.

Αν δει 2 άσπρα και 97 μαύρα θα πει μαύρο.

Αν δει 3 άσπρα και 96 μαύρα θα πει άσπρο.

Αν δει 4 άσπρα και 95 μαύρα θα πει μαύρο.

....

θα λέει άσπρο όταν ο αριθμός των άσπρων καπέλων είναι περιττός και μαύρο αν ο αριθμός των άσπρων καπέλων είναι άρτιος.

Αρχίζει η διαδικασία...Ας πούμε ότι ο αριθμός των άσπρων καπέλων είναι άρτιος,κατά συνέπεια ο πρώτος φωνάζει μαύρο.Ο δεσμοφύλακας είτε θα τον πυροβολήσει (αν φοράει άσπρο) είτε όχι (αν φοράει μαύρο) οπότε οι πιθανότητα να ζήσει είναι 50%.

Ο δεσμοφύλακας τώρα προχωρεί στον επόμενο.Αυτός έχει ακούσει το μαύρο που φώναξε ο πρώτος και έχει καταλάβει ότι ο αριθμός των άσπρων είναι άρτιος.Μετράει όλους τους μπροστινούς του.Αν ο αριθμός των άσπρων καπέλων που μετρήσει είναι

άρτιος που σημαίνει ότι αυτός φοράει μαύρο,ενώ αν είναι περιττός που σημαίνει ότι αυτός φοράει άσπρο.Καταλαβαίνει τι χρώμα καπέλο φοράει και το φωνάζει.

Ο δεσμοφύλακας δεν τον πυροβολεί και προχωράει στον επόμενο.Αυτός τώρα γνωρίζει από τον πρώτο ότι ο αριθμός των άσπρων καπέλων είναι άρτιος και επιπλέον έχει ακούσει τι χρώμα καπέλο φοράει ο προηγούμενος του.Μετράει όλα τα μπροστινά καπέλα αλλά υπολογίζει και αυτό που φόραγε ο προηγούμενος στα άσπρα ή στα μαύρα (ανάλογα με το τι φώναξε).Τώρα έχει ακριβώς την ίδια γνώση με τον προηγούμενο του σε ότι αφορά τον αριθμό των καπέλων οπότε μπορεί να δώσει με την ίδια λογική την σωστή απάντηση για το τι καπέλο φοράει.

Για παράδειγμα αν ένας κρατούμενος ακούσει από τον πρώτο κρατούμενο μαύρο (τα άσπρα καπέλα που βλέπει ο πρώτος είναι άρτιου πλήθους) και βλέπει μπροστά του 20 άσπρα καπέλα και έχει ακούσει προηγουμένως 13 φορές την λέξη άσπρο τότε προσθέτει 20+13=33 περιττός οπότε το καπέλο του είναι επίσης άσπρο.
Τη ίδια στρατηγική ακολουθούν διαδοχικά όλοι οι φυλακισμένοι και θα σωθούν τουλάχιστον 99 κρατούμενοι.Ανάλογα πράττει στην περίπτωση που αρχικά ο αριθμός των άσπρων καπέλων που βλέπει ο πρώτος είναι περιττός. ■

156.Ο παρουσιαστής του τηλεπαιχνιδιού «*ο Τρελοκάπελας*» εξηγεί τους κανόνες του τελικής δοκιμασίας στους έξι παίκτες της πρώτης ομάδας.
Έχω επτά καπέλα αριθμημένα από το 1 μέχρι το 7.Πριν ξεκινήσει η δοκιμασία θα σας δέσω τα μάτια, θα φορέσω στον καθένα από ένα καπέλο και ένα καπέλο θα το κρύψω. Έπειτα θα σας λύσω τα μάτια και θα μπορέσετε να δείτε τα καπέλα των άλλων, αλλά δε θα σας αφήσω να επικοινωνήσετε μεταξύ σας. Μετά από αυτό ο καθένας κρυφά από τους άλλους θα μου πει τον αριθμό του κρυμμένου καπέλου. Αν το μαντέψουν τουλάχιστον τρεις, θα κερδίσετε .Αν όχι χάσατε ».

Πως πρέπει εκ των προτέρων να συνεννοηθούν μεταξύ τους οι παίκτες της ομάδας,ώστε να κερδίσουν στον τελικό;

Λυση

Κάθε παίκτης βλέπει όλους τους αριθμούς εκτός από δύο, έστω τους x,y με $x<y$ με .
Αν $y-x\leq 3$, τότε ο παίκτης μαντεύει το x αλλιώς μαντεύει το y.
-Αν το κρυμμένο καπέλο είναι το 1,τότε όσοι φοράνε τα 2,3,4 μαντεύουν σωστά.
-Αν το κρυμμένο καπέλο είναι το 2,τότε όσοι φοράνε τα 3,4,5 μαντεύουν σωστά.
-Αν το κρυμμένο καπέλο είναι το 3,τότε όσοι φοράνε τα 4,5,6 μαντεύουν σωστά.
-Αν το κρυμμένο καπέλο είναι το 4 ,τότε όσοι φοράνε τα 5,6,7 μαντεύουν σωστά.
-Αν το κρυμμένο καπέλο είναι το 5 ,τότε όσοι φοράνε τα 1,6,7 μαντεύουν σωστά.
-Αν το κρυμμένο καπέλο είναι το 6, τότε όσοι φοράνε τα 1,2,7 μαντεύουν σωστά.
-Αν το κρυμμένο καπέλο είναι το 7,τότε όσοι φοράνε τα 1,2,3 μαντεύουν σωστά. ■

Η αλήθεια είναι ότι προβλήματα σαν το προηγούμενο μοιάζουν με σπαζοκεφαλιές.Μην υποτιμάτε τις σπαζοκεφαλιές,σε πολλές περιπτώσεις πρόκειται για έξυπνα προβλήματα που συνήθως δεν απαιτούν ιδιαίτερο μαθηματικό υπόβαθρο,πλην όμως σφυρηλατούν στρατηγική ευελιξία και την σκέψη έξω από το κουτί.Άσε που είναι εξόχως διασκεδαστικές σαν παιχνίδι.Ο Κάρλο Φραμπέτι,μαθηματικός-συγγραφέας εκλαϊκευμένων μαθηματικών,μεταξύ άλλων γράφει σχετικά:
«Όποιος δεν μάθει να παίζει σαν τα πιτσιρίκια,δεν θα μπει ποτέ στο βασίλειο της αληθινής ευφυΐας..»

157.Στον πίνακα είναι γραμμένοι όλοι οι ακέραιοι αριθμοί από τον 1 έως τον 50 . Δυο μαθητές παίζουν το εξής παιχνίδι: Με τη σειρά ο ένας μετά τον άλλον διαγράφουν από έναν αριθμό. Το παιχνίδι τελειώνει όταν στον πίνακα απομείνουν δυο αριθμοί. Νικητής είναι ο Β, αν το άθροισμα των αριθμών που απομένουν διαιρείται με το 3,διαφορετικά νικητής είναι ο Α. Αν ο Α αρχίζει πρώτος, έχει ο μαθητής Β στρατηγική νίκης;

Λύση

1η (Με τη συμμετρία των «άκρων»)

Χωρίζουμε τους αριθμούς 1,2,3,…,50 στα 25 ζεύγη (1,50),(2,49)….(25,26)

Όλα τους έχουν άθροισμα 51=3*17=πολ3 .

Ο Β έχει την εξής στρατηγική νίκης:

Όταν ο Α διαγράφει έναν αριθμό α,ο Β διαγράφει τον αριθμό 51-α, δηλαδή αυτόν που βρίσκεστε στο ίδιο ζεύγος με τον α.Οπότε στο τέλος θα μείνουν δυο αριθμοί που θα είναι στο ίδιο ζεύγος,με άθροισμα 51που διαιρείται με το 3 .

2η Λύση: με μπούσουλα το άθροισμα S

Εξετάζουμε τι υπόλοιπο αφήνει το αρχικό άθροισμα S, όταν διαιρείται με το 3:

Ισχυει: S=1+2+3+…+50=51*25=3*17*25 πολλαπλάσιο του 3

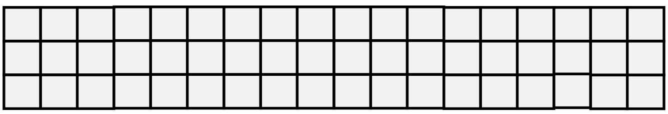
Άρα στην αρχή το άθροισμα είναι πολ3. Στο τέλος ο Β θέλει επίσης το S να είναι πολ3. Πώς μπορεί να το καταφέρει;

Επιλογες Α	**Επιλογες Β**
3κ+1	3λ+2
3κ+2	3λ+1
3κ	3λ

Αν ο Β κάνει τις επιλογές του σύμφωνα με τον πίνακα τότε θα κερδίσει.

Για να λειτουργήσει η παραπάνω στρατηγική θα πρέπει το πλήθος των αριθμών της μορφής 3κ+1 και 3κ+2 να είναι ίσα, καθώς και το πλήθος των αριθμών της μορφής 3κ να είναι άρτιος. ■

158.Δυο παιδιά κόβουν εναλλάξ μια πλάκα σοκολάτας ορθογώνιου σχήματος κατά μήκος μόνο των γραμμών που χωρίζουν τα ορθογώνια κομμάτια της πλάκας. Η πλάκα αποτελείται από 3x18 =54 μοναδιαία τετραγωνάκια κομμάτια σοκολάτας.



Χάνει το παιδί που δεν θα μπορεί να κάνει άλλη κίνηση, δηλαδή έχουν μείνει μόνο μοναδιαία τετραγωνάκια σοκολάτας.Υπάρχει στρατηγική νίκης για κάποιο από τα δυο παιδιά;

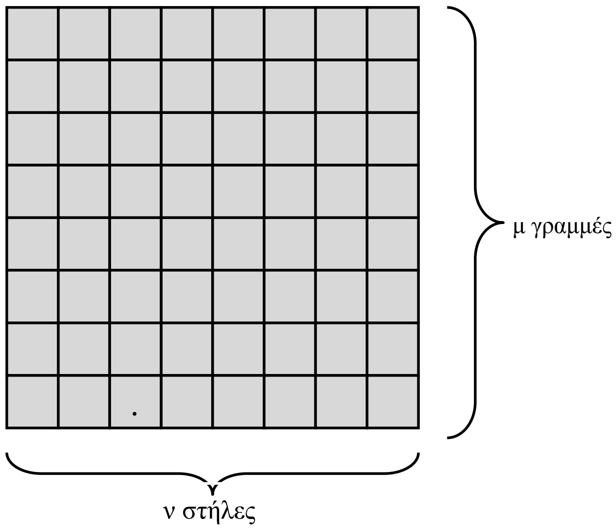
Αν η σοκολάτα ήταν 3x17 θα άλλαζε η απάντηση σας;

Λύση

Δεν απαιτείται στρατηγική το πρώτο παιδί θα κερδίζει πάντα! Στην αρχή έχουμε ένα κομμάτι σοκολάτας ,σε κάθε γύρο τα κομμάτια θα αυξάνονται κατά 1 άρα το παιχνίδι θα τελειώσει σε 54-1=53 κινήσεις.Το 53 είναι περιττός άρα την τελευταία κίνηση θα την κάνει ο πρώτος παίκτης όποτε ο πρώτος παίκτης είναι πάντα ο νικητής.

Στην δεύτερη περίπτωση 3x17-1=50 είναι άρτιος ο αριθμός κινήσεων άρα θα κερδίσει το παιδί που παίζει δεύτερο! ■

159.Το εθνικό σπορ στην Λοξολάνδη είναι οι σοκολατομπουκιές.Παιχνίδι μείζονος παχυσαρκίας που ενδείκνυται για φανατικούς γλυκατζήδες. Δυο παίκτες κάθονται στις απέναντι θέσεις ενός τραπεζιού και μπροστά τους βρίσκεται ένα ορθογώνιο κομμάτι σοκολάτας που αποτελείται από μxν τετραγωνικά πλακίδια.



Ρίχνουν ένα κέρμα ποιος θα παίξει πρώτος.Ο πρώτος παίκτης επιλέγει ένα από τα τετραγωνικά πλακίδια όποιο θέλει και τρώει αυτό καθώς και όλα τα τετραγωνικά πλακίδια που βρίσκονται πάνω και δεξιά από αυτό.Ο δεύτερος παίκτης επιλέγει και αυτός ένα τετραγωνικό πλακίδιο και τρώει αυτό καθώς και όλα τα τετραγωνικά πλακίδια που βρίσκονται πάνω και δεξιά.Νικητής είναι αυτός που θα αναγκάσει τον άλλο να φάει το τελευταίο κομμάτι σοκολάτας.*(Μίζερη εκδοχή)*

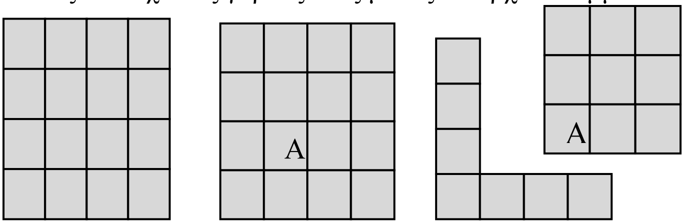
i.Τα πρώτα χρόνια που παιζόταν το παιχνίδι οι διοργανωτές επέλεγαν ένα τετράγωνο κομμάτι σοκολάτας νxν πλακιδίων αλλά κάποιος από τους ειδήμονες της θεωρίας σοκολατοπαιγνίων –φήμες λένε ότι εκανε δίαιτα και μισούσε το παιχνίδι-παρατήρησε ότι υπάρχει στρατηγική νίκης για ένα από τους δυο παίκτες. Ποια είναι αυτή και ποιος παίκτης θα κερδίζει συνέχεια και γιατί;

ii.Μετά το φιάσκο του τετραγώνου όπως ονομάστηκε στα χρονικά των σοκολοτο-μαχιών,οι διοργανωτές άλλαξαν το σχήμα του αρχικού κομματιού σοκολάτας και το έκαναν ορθογώνιο 2xν οπού ν τόσα πλακίδια όσα το μέγεθος του τραπεζιού που παιζόταν.Μάταια,ο μεγάλος-πάνω από 90 ετων-παιγνιοθεωρητικός Τιφκιάνεις Εκί απέδειξε ότι και εδώ υπήρχε στρατηγική νίκης για ένα από τους δυο παίκτες. Ποια ήταν αυτή; Ποιος παίκτης θα κερδίζει συνέχεια;

Λυση

i. Το κλειδί είναι συμμετρία.Ο πρώτος παίκτης επιλέγει το τετραγωνικό πλακίδιο σο-κολάτας που βρίσκεται στην δεύτερη γραμμή κοιτώντας από κάτω και την δεύτερη στήλη κοιτώντας από αριστερά.Όταν θα φάει όλα τα τετραγωνικά πλακίδια θα έχει μείνει σοκολάτα σχήματος L.Τώρα αρκεί να τρώει συμμετρικά ως προς τον δεύτερο παίκτη.Καταρχήν,παρατηρούμε ότι υπάρχει μια γραμμή και μια στήλη.

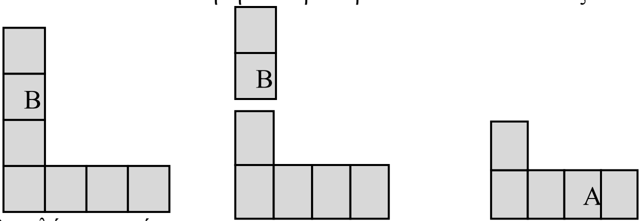
Αν ο παίκτης Β φάει το τρίτο μετρώντας από κάτω κομμάτι της στήλης ο παίκτης Α θα φάει το τρίτο μετρώντας από αριστερά της γραμμής.Αν ακολουθήσει αυτόν τον κανόνα ο παίκτης Β θα αναγκαστεί να φάει το τελευταίο κομμάτι σοκολάτας.Δείτε στο σχήμα τους διαδοχικούς γύρους παιξίματος σε αρχικό κομμάτι σοκολάτας 4x4.



Αρχική θέση παί-ζει πρώτος ο Α

Ο Α επιλέγει το κουτά-κι στην δεύτερη γραμ-μή από κάτω δεύτερη στήλη από αριστερα

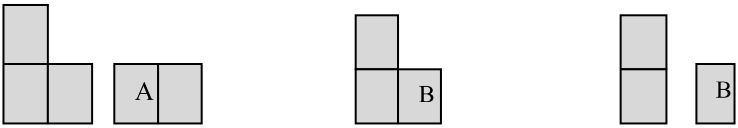
Ο Α τρώει όλα τα πλακίδια πάνω και δεξιά μαζί με αυτό που επέλεξε



Ο Β επιλέγει το τρίτο από κάτω κουτάκι στην στήλη

Ο Β τρώει όλα τα πλακίδια πάνω και δεξιά μαζί με αυτό που επέλεξε

Ο Α επιλέγει το τρίτο από αριστ (συμμετρικό) κουτάκι στην γραμμή



Ο Α τρώει όλα τα πλακί-δια πάνω και δεξιά μαζί με αυτό που επέλεξε

Ο Β επιλέγει το δεύτερο από αριστ κουτάκι στην γραμμη

Ο Β τρώει όλα τα πλακίδια πάνω και δεξιά μαζί με αυτό που επέλεξε . Βέβαια εδώ είναι μόνο αυτό που επέλεξε.

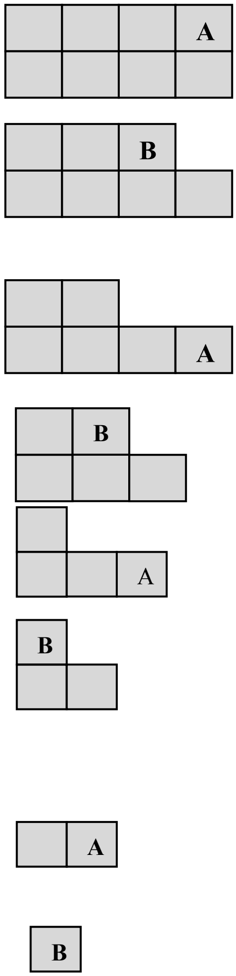


Ο Α επιλέγει το δεύτερο από κατω (συμμετρικό) κουτάκι στην στήλη.

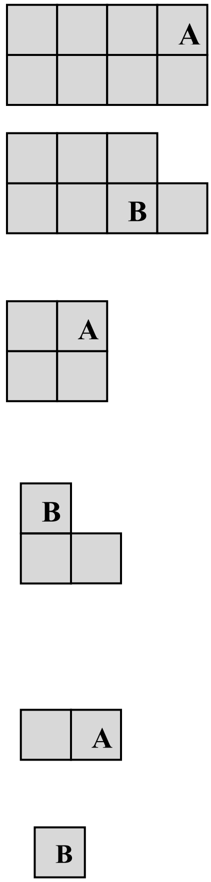
Ο Β είναι χαμένος έχει μόνο ένα κουτάκι και το ..τρώει. ■

Το συγκεκριμένο παιχνίδι ονομάζεται παιχνίδι Chomp και η δημιουργία του πιστώνεται στο μαθηματικό David Gale.

ii.Αν ο πρώτος παίκτης ο Α αφαιρέσει το πάνω δεξιά τετραγωνάκι σοκολάτας,αφήνοντας την πάνω γραμμή κατά 1 κοντύτερη από την κάτω,ότι και να κάνει ο δεύτερος παίκτης,ο πρώτος μπορεί πάντα να επαναφέρει μια τέτοια διάταξη (λεπτό ορθογώνιο) και να καταλήξει στο L της νίκης όπως είδαμε στο πρώτο παράδειγμα. Ειδικότερα,αν ο δεύτερος παίκτης διαλέξει ένα τετράγωνο στην κάτω γραμμή αυτό που απομένει με την «βορειανατολική» αφαίρεση είναι πάλι ένα λεπτό ορθογώνιο (σχήμα 2).Αν αντίθετα ο δεύτερος παίκτης επιλέξει κάποιο από τα υπόλοιπα τετράγωνα στη πάνω γραμμή,ο πρώτος παίκτης διαλέγει το τετραγωνάκι της κάτω γραμμής μια θέση δεξιά από την επιλογή του δευτέρου παίκτη, διατηρώντας την παράσταση **πλήθος κάτω τετραγώνων= πλήθος πάνω τετραγώνων συν ένα (L)**.(σχήμα 1).Η οριακή περίπτωση είναι ίδια με την αντίστοιχη στο προηγούμενο πρόβλημα ένα L με τρία τετραγωνάκια στο οποίο είναι η σειρά του Β να παίξει και είναι καταδικασμένος.



ΣΧΗΜΑ 1



ΣΧΗΜΑ 2

■

Η αρχή του αναλλοίωτου (Invariant Principle)

Άδειασε το μυαλό σου,γίνε χωρίς μορφή,χωρίς σχήμα,σαν το νερό.Εάν βάλεις νερό σε μία κούπα,εκείνο γίνεται η κούπα.Εάν βάλεις νερό σ'ένα μπουκάλι,γίνεται το μπουκάλι.Εάν το βάλεις στην τσαγιέρα,γίνεται η τσαγιέρα.Τώρα το νερό μπορεί να κυλήσει ή να συγκρουστεί.Να είσαι νερό,φίλε μου.

Bruce Lee



Cou Lee

Η αρχή του αναλλοίωτου (Invariant Principle)

Ο παππούς Ηράκλειτος έλεγε ότι δεν θα μπορούσε τα πόδια του,να πλύνει δυο φορές στο ίδιο νερό του ποταμιού,γεγονός που προφανώς χαροποίει τα ψάρια αλλά λέει και πολλά για το ευμετάβλητο του σύμπαντος.Αν δεν μπορούμε να προβλέψουμε τι θα συμβεί και αναγκαζόμαστε να διάγουμε βίο νεφελώδη και απρόσμενο,μπορούμε να έχουμε την μικρή ικανοποίηση να λύνουμε μια κατηγορία προβλημάτων που βασίζεται στο αμετάβλητο κάποιων καταστάσεων.Ο λόγος για μια ιδιαίτερη ευρετική τεχνική επίλυσης διαγωνιστικών μαθηματικών προβλημάτων με την ονομασία:Η αρχή του αναλλοίωτου!

Με τον όρο **αναλλοίωτο (invariant)** στα μαθηματικά προβλήματα εννοούμε ένα μέγεθος ή μια ιδιότητα που δεν μεταβάλλεται,συνήθως μετά από την εφαρμογή ενός πλήθους επαναληπτικών βηματων.Η λύση σε τέτοιου είδους προβλήματα δεν ακολουθεί συγκεκριμένο μοτίβο,η αναλλοίωτη ιδιότητα δεν είναι εύκολο να ανιχνευτεί, κινούμαστε πολύ γενικά και πολύ συχνά ο χειρισμός εμφανίζεται ως λαγός από το καπέλο.Ουσιαστικά αναζητούμε το είδος (pursue parity) του αριθμού (άρτιος,περιττός),το είδος μια αλγεβρικής παράστασης όταν εμπλέκονται μεταβλητές (πολλαπλάσιο, συγκεκριμένο άθροισμα,συγκεκριμένο γινόμενο ….) Άλλοτε σε μια διαδικασία που επαναλαμβάνεται ελέγχουμε τι δεν αλλάζει.Έιναι λίγο θολό ε;

Ο μοναδικός τρόπος να μάθει να λύνει κανείς μαθηματικα προβλήματα είναι να λύνει..προβλήματα.Αφοριστική φόρμα,διόλου εύχρηστη.Ας δούμε μερικά παραδείγματα.

160.Ο Γιαννάκης αγοράζει ζαχαρωτά από το περίπτερο της γειτονιάς που κοστίζουν είτε 3 είτε 6 ευρώ,(Μπον Βιβέρ ο Γιαννάκης).Στο τέλος του μήνα όταν ρωτήθηκε από το πατέρα του,πόσα χρήματα είχε ξοδέψει στο περίπτερο για ζαχαρωτά αυτός απάντησε 53 ευρώ.Ο πατέρας του είναι σίγουρος πως ο Γιαννάκης έκανε λάθος.Πως το ήξερε;

Λύση



Τι παρατηρούμε; Ο Γιαννάκης αγόραζε πάντα γλυκά που κόστιζαν χρηματικά ποσά που ήταν πολλαπλάσια του 3 κατά συνέπεια κάθε χρονική στιγμή το συνολικό ποσό που θα είχε ξοδέψει θα ήταν πολλαπλάσιο του 3.Αυτή ακριβώς είναι και η αναλλοίωτη ιδιότητα που χαρακτηρίζει τις αγορές του Γιαννάκη.Ο αριθμός 53 δεν είναι πολλαπλάσιο του 3 άρα ο πατέρας του Γιαννάκη ήταν βέβαιος ότι το καμάρι του ή δεν ήξερε πρόσθεση ή έλεγε ψέματα. ■

161. Σε ένα κουτί υπάρχουν επτά κόκκινες και έξι πράσινες μπάλες.Ο Γιαννάκης παίζει ένα παράξενο παιχνίδι.Αφαιρεί κάθε φορά δυο μπάλες από το κουτί,με τους εξής κανόνες:

-Αν οι μπάλες είναι και οι δυο πράσινες,ξαναβάζει στο κουτί μια πράσινη.

-Αν οι μπάλες έχουν διαφορετικό χρώμα,ξαναβάζει στο κουτί μια κόκκινη.

-Αν οι μπάλες είναι και οι δυο κόκκινες,ξαναβάζει στο κουτί μια πράσινη.

Στο τέλος,θα απομείνει μια μπάλα στο κουτί.Ποιο είναι το χρώμα της;

Λύση

Σε κάθε κίνηση το πλήθος των κόκκινων σφαιρών είτε ελαττώνεται κατά δυο είτε παραμένει σταθερό (αναλλοίωτο),το πλήθος των κόκκινων σφαιρών είναι 7 που δεν είναι πολλαπλάσιο του 2 άρα είναι βέβαιο ότι δεν μπορούν αφαιρεθούν όλες οι κόκκινες σφαίρες,όποια επιλογή κινήσεων και αν γίνει θα μείνει μια κόκκινη. ■

Ο Πινγκ Πονγκ υπενθυμίζει…
(άρτιος ± άρτιος) είναι άρτιος
(περιττός ± περιττός) είναι άρτιος
(άρτιος ± περιττός) είναι περιττός
Άθροισμα περιττού πλήθους περιττών δίνει περιττό
Άθροισμα αρτίου πλήθους περιττών δίνει άρτιο
(άρτιος · περιττός) είναι άρτιος
(περιττός · περιττός) είναι περιττός
(άρτιος · άρτιος) είναι άρτιος



162.Το βιβλίο ιστορίας της Άννας αποτελείται από 392 σελίδες με αντίστοιχη αρίθμηση 1-392.Ο Κώστας έσκισε τυχαία 35 φύλλα από το βιβλίο της Άννας και στην συνέχεια πρόσθεσε τους αριθμούς των 70 σχισμένων σελίδων. Να δείξετε ότι το άθροισμα δεν μπορεί να ισούται με 2020.

Λύση

Κάθε φύλλο του βιβλίου συνιστάται από δυο σελίδες με διαδοχικούς αριθμούς έναν άρτιο και έναν περιττό ,άρα το άθροισμα των αριθμών σε ένα φύλλο του βιβλίου είναι περιττός.Από την άλλη το άθροισμα περιττού πλήθους (35) περιττών αριθμών είναι επίσης περιττός συνεπώς δεν μπορεί να είναι 2020. ■

163. Μια ακρίδα κάνει άλματα σε ένα «μεγάλο» ευθύγραμμο σύρμα.Αρχικά είναι ακίνητη και κατόπιν κάνει ένα άλμα 1 cm,στη συνέχεια κάνει ένα άλμα 3 cm είτε μπρος είτε πίσω (στο σύρμα) συνεχίζει κάνοντας ένα άλμα 5 cm είτε μπροστά είτε πίσω κ.ο.κ. είναι δυνατόν να γυρίσει η ακρίδα στην αρχική της θέση στο $99^{ο}$ άλμα;



Λύση

Είναι αδύνατο! Η ακρίδα ξεκινά από το σημείο 0 και κάνει άλματα άρα η απόσταση που διανύει είναι ένα άθροισμα της μορφής: $1 \pm 3 \pm 5 \pm 7 \pm \ldots$ το οποίο επειδή είναι άθροισμα πλήθους περιττών (99) δεν θα έχει αποτέλεσμα άρτιο (0). ■

Από τα προηγούμενα παράδειγματα είναι προφανές ότι η ιδιότητα ενός αριθμού ότι είναι είτε άρτιος είτε περιττός είναι από τις απλούστερες αναλλοίωτες ιδιότητες που μπορεί να έχει μια αριθμητική ποσότητα αλλά δίνει διεξόδους-λύσεις σε αρκετά προβλήματα που πρέπει να δείξουμε ότι μια κατάσταση δεν είναι δυνατή.

164.Σε ένα τραπέζι υπάρχουν φρούτα,μήλα και πορτοκάλια.Διαθέτουμε 70 μήλα και 71 πορτοκάλια για να παίξουμε ένα παιχνίδι.Δυο παίκτες,ο Αντώνης και ο Βασίλης επιλέγουν 2 φρούτα σε κάθε εναλλάξ κίνηση, από τα 141 φρούτα.Σύμφωνα με τον κανόνα του παιχνιδιού, αυτά τα δυο φρούτα,που επιλέγονται αντικαθίστανται με ένα και μόνο φρούτο. Αν είναι ίδια τα φρούτα,την θέση τους παίρνει ένα μήλο, εάν είναι διαφορετικά, τότε ένα πορτοκάλι. Συνεπώς στο τέλος του παιχνιδιού θα μείνει ένα φρούτο μήλο ή πορτοκάλι.Τι φρούτο θα είναι αυτό;

Λύση

Οι πιθανές επιλογές σε κάθε κίνηση είναι: (μήλο, μήλο), (πορτοκαλί, μήλο), (πορτοκάλι, πορτοκάλι).Μετά το τέλος της κάθε κίνησης παρατηρούμε ότι το πλήθος των πορτοκαλιών μειώνεται κατά άρτιο αριθμό.Γνωρίζοντας λοιπόν, ότι ο αρχικός αριθμός των πορτοκαλιών είναι 71 είναι βέβαιο ότι το τελευταίο φρούτο θα είναι πορτοκάλι. ■

Επανερχόμαστε με «φορτωμένη» εκφώνηση.

165.Ο Γιάννης,ο Γιώργος και δυο φιλικά τους πρόσωπα πήγαν στην χασαποταβέρνα «Το χοιρομέρι» για φαγητό και κάθισαν ένα τραπέζι.Ο Γιάννης παρατήρησε ότι στην ταβέρνα βρίσκονταν 23 άνδρες και 32 γυναίκες πελάτες (συμπεριλαμβανόμενων και των τεσσάρων της παρέας).Ο Γιάννης καθόταν δίπλα στην είσοδο και μπορούσε να δει όλους όσους έμπαιναν ή έβγαιναν από το μαγαζί.Παρατήρησε λοιπόν τα έξης:

Για κάθε δυο πελάτες που έφευγαν από το μαγαζί ένας νέος πελάτης ερχόταν.Συγκεκριμένα αν οι δυο πελάτες που έφευγαν ήταν του ίδιου φύλου τότε ερχόταν μια γυναίκα πελάτισσα.Αντίθετα αν οι δυο πελάτες που έφευγαν ήταν διαφορετικού φύλου τότε ερχόταν ένας άντρας πελάτης.Ένα πρόσωπο από την παρέα του Γιάννη και του Γιώργου (μαζί με κάποιο άλλο πρόσωπο)έφυγε από το μαγαζί αλλά ξαναγύρισε μόνο του διότι θυμήθηκε ότι δεν είχε πληρώσει για τον λογαριασμό.Τότε,ο Γιώργος παρατήρησε ότι οι μοναδικοί πελάτες που είχαν μείνει στο μαγαζί ήταν αυτός,ο Γιάννης,και τα δυο άτομα της παρέας τους.Το ερώτημα είναι το εξής:Είναι του ίδιου φύλου τα δυο φιλικά πρόσωπα του Γιάννη και του Γιώργου;

Λύση

Από τις συνθήκες του προβλήματος βλέπουμε ότι ο αριθμός των ανδρών στο μαγαζί ελαττώνεται κατά 0 (αν δυο γυναίκες ή ένας άνδρας και μια γυναίκα φύγουν) ή κατά 2 (αν φύγουν δυο άνδρες).Όταν αρχικά μπήκε μέσα η παρέα των τεσσάρων,υπήρχε περιττός αριθμός από άνδρες στο μαγαζί και ακολούθως με κάθε μετακίνηση το πλήθος των ανδρών θα παρέμενε περιττός (αναλλοίωτη ιδιότητα).Τελικά,όταν μόνο η παρέα τους έμεινε στο μαγαζί επίσης πρέπει ο αριθμός των ανδρών να είναι περιττός. Εφόσον έχουν ήδη δυο άνδρες (Γιάννης και Γιώργος) μπορούμε να συμπεράνουμε ότι ένα από τα δυο πρόσωπα θα είναι άνδρας και το άλλο γυναίκα.

166. Στο τέλος του Β΄ Παγκοσμίου πολέμου σε ένα στρατόπεδο βρίσκονται 1997 αιχμάλωτοι:998 Ιταλοί και 999 Γερμανοί.Ο διοικητής του στρατοπέδου αποφασίζει να απελευθερώσει σταδιακά τους κρατούμενους,εκτός από έναν τον οποίο θα κρατήσει για λίγο καιρό ακόμα στο στρατόπεδο.Επιλέγονται τυχαία τρεις κρατούμενοι και φεύγουν οι δύο.Αν και οι τρεις είναι της ίδιας εθνικότητας,ο ένας από αυτούς επιστρέφει,ενώ αν είναι διαφορετικής εθνικότητας,επιστρέφει αυτός που έχει διαφορετική εθνικότητα από τους άλλους δύο.Ποιας εθνικότητας θα είναι ο *άτυχος* κρατούμενος; *(Διαγωνισμός ΕΜΕ,Θαλής 1997)*

Λύση

Αν είναι και 3 Ιταλοί,θα απολυθούν 2 Ιταλοί.Αν είναι και οι 2 Ιταλοί και ένας Γερμανός,πάλι θα απολυθούν 2 Ιταλοί.Αν είναι Ιταλός και 2 Γερμανοί,θα μείνει ο Ιταλός και θα απολυθούν δυο Γερμανοί.Παρατηρούμε ότι ο αριθμός των Ιταλών αιχμαλώτων είτε θα μειώνεται κατά 2 ή θα παραμείνει ίδιος.

Και στις δυο περιπτώσεις θα είναι πάντα άρτιος.Άρα,δεν μπορεί να παραμείνει ένας Ιταλός.Έτσι,ο άτυχος κρατούμενος θα είναι Γερμανός. ■

167. Μια φανταστική μπαμπούσκα,περιέχει οκτώ μικρότερες,κάποιες από αυτές περιέχουν οκτώ μικρότερες,κάποιες από αυτές περιέχουν οκτώ μικρότερες κ.ο.κ. Είναι δυνατόν το πλήθος των μπαμπούσκων που δεν περιέχουν άλλες,σε μια τέτοια διαμόρφωση (οποιουδήποτε μεγέθους) να είναι 2022;

Μπαμπούσκα:Παραδοσιακή ρώσικη ξύλινη κούκλα χρωματισμένη με την παραδοσιακή ενδυμασία της Ρωσίας, συνήθως χειροποίητη, η οποία κρύβει μέσα της πολλές μικρότερες κούκλες, η καθεμία από τις οποίες είναι λίγο μικρότερη από την προηγούμενή της.



Λύση

Στην αρχή έχουμε μια μπαμπούσκα,από εκει και πέρα σε κάθε χρονική στιγμή,δηλαδή σε κάθε βήμα της διαδικασίας που ανοίγουμε μια μπαμπούσκα και βγάζουμε οχτώ αυξάνουμε τις κενές μπαμπούσκες κατά επτά.Αυτο σημαινει ότι πάντα ο αριθμός των μπαμπούσκων είναι της μορφής 7κ+1 (κ θετικός ακέραιος) Όμως το 2022 σε διαίρεση με το 7 αφήνει υπόλοιπο 6,συνεπώς αυτό που ζητείται είναι αδύνατο. ■

Ο Πινγκ Πονγκ παρατηρεί…

Αν δοθεί κάποιο πρόβλημα που εφαρμόζεται μια επαναληπτική διαδικασία τότε ψάχνουμε να βρούμε τι δεν αλλάζει, ώστε να το εκμεταλλευτούμε για την λύση του προβλήματος.



168. Δίνεται μια 3x3 σκακιέρα, στα τετράγωνα της έχουν τοποθετηθεί τα πρόσημα + και – όπως φαίνεται στο σχήμα 1.Θεωρούμε ως μια κίνηση να επιλέξουμε μια οποιοδήποτε γραμμή ή στήλη και αλλάξουμε όλα τα πρόσημα της, το + να γίνει – και αντιστρόφως. Υπάρχει ακολουθία κινήσεων που θα μας επιτρέψει να μεταβούμε από το σχήμα 1 στο σχήμα 2;

+	+	-
+	+	-
-	-	+

Σχήμα 1

-	-	+
+	-	-
-	-	+

Σχήμα 2

Λύση
Είναι αδύνατο! Η αναλλοίωτη ιδιότητα παρά τις κινήσεις που εφαρμόζονται είναι ότι στο κάτω αριστερά 2x2 τετράγωνο το πλήθος των προσήμων + στο σχήμα 1 είναι άρτιος ,ενώ στο σχήμα 2 είναι περιττός. ■

Αναλλοίωτος ιδιότητα στην διαιρετότητα από τον Πινγκ Πονγκ
Αν συμβολίζουμε με S(ν) το άθροισμα των ψηφίων ενός θετικού ακέραιου αριθμού ν (στο δεκαδικό σύστημα) τότε ισχύει:

ν-S(ν) είναι πολλαπλάσιο του 9

Για παράδειγμα, αν ν=257,

257-(2+5+7)=257-14=243=9*27 πολλαπλάσιο του 9

Εδώ,η αναλλοίωτος ιδιότητα είναι ότι η διαφορά ν-S(ν) είναι πολλαπλάσιο του 9.



Και στο επόμενο παράδειγμα η αναλλοίωτη ιδιότητα εμφανίζεται στην διαιρετότητα.

169. Ένα δωμάτιο-ένα μεγάλο δωμάτιο-είναι άδειο. Κάθε λεπτό, είτε μπαίνει ένα άτομο ,είτε δυο άτομα βγαίνουν. Υστέρα από ακριβώς 3^{2020} λεπτά θα μπορούσε το δωμάτιο να περιέχει $3^{2150}+1$ άτομα; (Είπαμε το δωμάτιο είναι μεγάλο ☺)

Λύση
Αν υπάρχουν ν άτομα στο δωμάτιο τότε κάθε λεπτό που περνά είτε γίνονται ν+1 είτε ν-2.
Η διαφορά ανάμεσα στα δυο πιθανά γεγονότα είναι 3 άτομα ((ν+1)-(ν-2)=3).Τι καταλαβαίνουμε; Καθώς περνούν τα λεπτά κάθε χρονική στιγμή t όλες οι διαφορετικές τιμές του πλήθους ν των ατόμων στο δωμάτιο διαφέρουν κατά πολλαπλάσιο του 3.(αναλλοίωτη ιδιότητα).
Για παράδειγμα,σε 3^{2020} λεπτά ένας πιθανός πληθυσμός των ατόμων στο δωμάτιο είναι 3^{2020} (αν ας πούμε έμπαιναν μόνο ένας κάθε λεπτό). Όμως 3^{2020} είναι πολλαπλάσιο του 3 άρα κάθε πιθανός πληθυσμός στο δωμάτιο πρέπει να είναι πολλαπλάσιο του 3 συνεπώς είναι αδύνατο κάποια χρονική στιγμή τα άτομα να γίνουν $3^{2150}+1$. ■

170. Στον πίνακα έχουμε γράψει τους αριθμούς 1,2,3,…..,100. Διαγράφουμε τυχαία δυο από αυτούς, έστω τους α,β και συμπληρώνουμε στον πίνακα την θετική διαφορά τους, $|\alpha-\beta|$ **. Να εξετάσετε αν, μετά από διαδοχικές εφαρμογές της παραπάνω διαδικασίας ,μπορεί να προκύψει ο αριθμός 1.**

Λύση

Παρατηρούμε ότι το άθροισμα 1+2+3+…+99+100 είναι :

$$1+2+3+...+100=\frac{100\cdot 101}{2}=5050$$

Αν από τους υπάρχοντες αριθμούς διαγράφουμε τους α,β με $\alpha\leq\beta$ (μόνο μετά το πρώτο βήμα μπορεί να εμφανιστεί το =) ο νέος αριθμός είναι ο $\beta-\alpha$ τώρα οι γραμμένοι αριθμοί στον πίνακα έχουν άθροισμα $5050-a-\beta+(\beta-\alpha)=5050-2\alpha$

Ο 2α είναι άρτιος αριθμός, ο 5050-2α είναι άρτιος,ως διαφορά αρτίου – αρτίου.Άρα το άθροισμα των ανά πάσα στιγμή γραμμένων στον πίνακα αριθμών είναι άρτιος αριθμός. Επομένως ποτέ δεν θα προκύψει ο αριθμός 1 που είναι περιττός. ■

171.Σε ένα νησί ζούνε 13 πράσινοι χαμαιλέοντες,15 κίτρινοι χαμαιλέοντες και 17 κόκκινοι χαμαιλέοντες.

Όταν δύο διαφορετικού χρώματος συναντιούνται,αλλάζουν και οι δύο στο τρίτο χρώμα (π.χ. αν συναντηθούν ένας πράσινος με έναν κίτρινο θα αλλάξουν και οι δύο το χρώμα τους σε κόκκινο).

Υπάρχει ακολουθία με την οποία αν συναντηθούν ζευγάρια μεταξύ τους,θα έχουν όλοι οι χαμαιλέοντες του νησιού το ίδιο χρώμα*; (1984 Tournament of Towns)*

Λύση

Αν α,β,γ τα πλήθη των πράσινων, κίτρινων ,κόκκινων χαμαιλεόντων αντίστοιχα.Άρα (α,β,γ) είναι η αρχική κατάσταση όταν τίθεται το πρόβλημα. Κάθε φορά που θα συναντιούνται δυο χαμαιλέοντες διαφορετικού χρώματος θα έχουμε μια από τις παρακάτω καταστάσεις (α-1,β-1,γ+2) ή (α-1,β+2,γ-1) ή (α+2,β-1,γ-1).Παρατηρούμε ότι οι διαφορά **Πράσινοι-κίτρινοι** σε κάθε περίπτωση γίνεται:

- Πρασινοι-Κίτρινοι=α-1-(β-1)=α-β
- Πρασινοι-Κίτρινοι=α-1-(β+2)=α-β-3
- Πρασινοι-Κίτρινοι=α+2-(β-1)=α-β+3

Ομοίως και οι άλλες δυο διαφορές **Πράσινοι-Κόκκινοι, Κίτρινοι-Κόκκινοι**

- Πρασινοι-Κόκκινοι=α-1-(γ+2)=α-γ-3
- Πράσινοι- Κόκκινοι=α-1-(γ-1)=α-γ
- Πράσινοι- Κόκκινοι =α+2-(γ-1)=α-γ+3

Και

- Κίτρινοι-Κόκκινοι=β-1-(γ+2)=β-γ-3
- Κίτρινοι - Κόκκινοι=β-1-(γ-1)=β-γ
- Κίτρινοι - Κόκκινοι =β+2-(γ-1)=β-γ+3

Τι παρατηρούμε; Οι διαφορές είτε δεν θα αλλάζουν είτε θα μεταβάλλονται κατά 3,αυτό σημαίνει τα υπόλοιπα των διαιρέσεων των α-β,β-γ,α-γ με το 3 δεν θα μεταβάλλονται (αναλλοίωτο). Τα υπόλοιπα των διαιρέσεων των διαφορών με το 3 είναι:
(β-α) mod3=2,(γ-β)mod3=2,(γ-α)mod3=1,

Όμως, στην επιθυμητή τελική κατάσταση που όλοι οι χαμαιλέοντες θα έχουν πάρει το ίδιο χρώμα π.χ πράσινο, οι διαφορές θα είναι α-β=45,β-γ=0,α-γ=45 στην διαίρεση με το 3 όμως το υπόλοιπο είναι 0 και όχι 2 ή 1.Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι, ποτέ οι χαμαιλέοντες δεν θα πάρουν το ίδιο χρώμα. ■

(Θυμίζω ότι ως amodβ θεωρούμε το υπόλοιπο της ευκλείδειας διαίρεσης του θετικού ακεραίου α με τον μη μηδενικό ακέραιο β,για παράδειγμα 23mod 5=4 ή 8mod12=8 ή 7mod3=1)

Γίνατε σοφότεροι; Αμφιβάλλω,το κυνήγι της αναλλοίωτης ιδιότητας είναι ευρετική τεχνική σαν ξόρκι,μπορεί να πάρει πολλές μορφές,για μένα είναι συνώνυμο με την τελευταία επιλογή,μια εικόνα που εμφανίζεται ξανά και ξανά χωρίς να μεταβάλλεται.Σου προτείνουν συνήθως μια επαναληπτική διαδικασία, με κάποια βήματα,αρχικά προσπαθείς να δεις να υπάρχει τελική κατάσταση, ποιες είναι όλες οι δυνατές καταστάσεις,αυτή που προτείνουν συμβαίνει ποτέ;



Πινγκ Πονγκ σε ρόλο μαθηματικής καφετζούς στην τοποθεσία αναλλοίωτο

172.Δίνονται 2020 σημεία σε ένα κύκλο.Ένα από αυτά το χαρακτηρίζουμε με τον αριθμό 1,και τα υπόλοιπα με τον αριθμό 0.Στην συνέχεια κάνουμε επαναληπτικά το εξής:επιλέγουμε ένα σημείο με χαρακτηρισμο 1,και μετατρέπουμε τα 2 σημεία που γειτονεύουν με αυτό σε 1-α,1-β όπου α,β είναι οι προηγούμενοι χαρακτηρισμοί.Να εξετάσετε,αν μετά από διαδοχικές εφαρμογές της παραπάνω διαδικασίας,μπορεί και τα 2020 σημεία του κύκλου να χαρακτηριστούν με τον αριθμο 1.

Λύση

Σε καθένα από τα βήματα,αν δυο γειτονικά σημεία του σημείου που επιλέγουμε έχουν χαρακτηριστεί 1,τοτε θα γίνουν 0.Αν έχουν χαρακτηριστεί και τα δυο 0 θα γίνουν 1.Αν το 1 χαρακτηριστεί 0 και το άλλο 1,τοτε θα γίνουν 1 και 0 αντίστοιχα. Παρατηρούμε ότι το άθροισμα όλων των αριθμών που χαρακτηρίζουν τα 2020 σημεία μεταβάλλεται κάθε φορά κατά +2,0,-2, δηλαδή κατά άρτιο αριθμό.Επειδή το άθροισμα όλων των αριθμών που χαρακτηρίζουν τα 2020 σημεία στην αρχή είναι 1, καθώς μεταβάλλεται κατά άρτιο αριθμό θα παραμένει πάντα περιττός αριθμός. Επειδή και τα 2020 σημεία ,αν όλα γίνουν 1 ,έχουν άθροισμα άρτιο αριθμό, συμπεράνουμε ότι και τα 2020 σημεία ποτέ δεν θα χαρακτηριστούν συγχρόνως 1. ■

173.Στην αυλή του βασιλιά Πατάτα της Λοξολάνδης,κάθε ευγενής έχει το πολύ τρεις εχθρούς. Να δείξετε το σύνολο των ευγενών της βασιλικής άυλης μπορεί να χωριστεί σε δυο ομάδες ,έτσι ώστε κάθε ευγενής να έχει το πολύ ένα εχθρό στην ομάδα του.

Λύση

Έστω οι ευγενείς είναι πλήθους ν. Αρχικά χωρίζουμε το σώμα (sic) των ευγενών σε δυο αυθαίρετες ομάδες .Αν x_1 οι εχθροί του ευγενή A_1 στην ομάδα του,x_2 οι εχθροί του ευγενή A_2 στην ομάδα του,….,$x_ν$ οι εχθροί του ευγενή $A_ν$ στην ομάδα του, τότε συμβολίζουμε: $Σ= x_1+ x_2+….+ x_ν$

Έστω τώρα ένας από τους ευγενείς ο Α που έχει τουλάχιστον δυο εχθρούς στην ομάδα του. Αυτό σημαίνει ότι έχει ένα το πολύ εχθρό στην άλλη ομάδα.Αν ο Α αλλάξει ομάδα,τότε ο αριθμός Σ ελαττώνεται .Μπορούμε να επαναλάβουμε την διαδικασία,όμως αυτή η μείωση δεν θα μπορεί να συνεχιστεί για πάντα , το Σ φτάνει στην ελάχιστη τιμή του, και αυτή είναι η επιθυμητή κατάσταση. ■



Στο πρόβλημα δημιουργήσαμε μια αλγοριθμική διαδικασία που ελαττώνει μια ποσότητα (πάντα ακέραια σε κάθε βήμα) μέχρι μια τελική τιμή και γίνεται σταθερά. Δεν πρόκειται ακριβώς για αναλλοίωτο μέγεθος παρά μόνο στην τελική τιμή του.

Η «συνταγή» της ιδιοφυΐας



Ο Ινδός Σνιριβάσα Ραμανουτζάν (1887-1920) υπήρξε ένας από τους ιδιοφυέστερους αυτοδίδακτους μαθηματικούς όλων των εποχών καθώς επίσης και ένας από τους παραγωγικότερους. «Οποιοσδήποτε θετικός ακέραιος αριθμός υπήρξε προσωπικός του φίλος.» έγραφε για αυτόν ο Τζ.Ε. Λιτλγουντ συνεργάτης του, όταν εγκατέλειψε την Ινδία για να έρθει στην Αγγλία στο πανεπιστήμιο του Κέμπριτζ. Στα σημειωματάρια που χρησιμοποιούσε για να γράφει τις εξισώσεις του, βρεθήκαν 3000- 4000 θεωρήματα, τα δυο τρίτα εξ αυτών ήταν νέα στα μαθηματικά και τα υπόλοιπα είναι ανεξάρτητες ανακαλύψεις που έκανε, θεωρημάτων που είχαν ήδη βρει μεταγενέστεροι μαθηματικοί.Ένα ανέκδοτο από την ζωή του Ραμανουτζάν μας δίνει την «συνταγή» της ιδιοφυΐας.
Ο Κ.Σ. Σνιριβασαν, φοιτητής που είχε γνωρίσει τον Ραμανουτζάν στο Κουμπακοναμ της Ινδίας, πόλη που έζησε όταν ήταν μικρός, του είπε μια μέρα:
-*«Ραμανουτζάν, λένε πως είσαι ιδιοφυΐα.»*
Και εκείνος απάντησε:
-*«Καθόλου ιδιοφυΐα δεν είμαι. κοίτα τον αγκώνα μου. Αυτός θα σου πει την ιστορία μου.»*

Ο αγκώνας του ήταν βρώμικος, διότι εκείνη την εποχή ο Ραμανουτζάν, που ήταν πάμφτωχος , χρησιμοποιούσε ένα μικρό φορητό μαυροπίνακα για να δουλεύει και τον έσβηνε με τον αγκώνα του, που ήταν πιο γρήγορα από το να χρησιμοποιήσει ένα κουρέλι. Και πρόσθεσε:
-*«Ο αγκώνας μου με μετατρέπει σιγά σιγά σε ιδιοφυΐα.»*

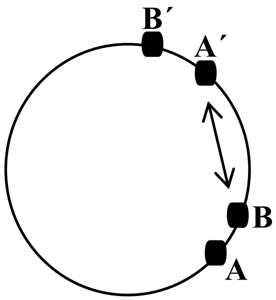
Ακόμα και αν δεν είναι αλήθεια-τέτοιες ιστορίες πάντα ελέγχονται -στην βάση του πρεσβεύει την αναντίρρητη αλήθεια της δύναμης της μεθόδου, της εργατικότητας και της επιμονής.

Να το κάνουμε λίγο πιο δύσκολο.

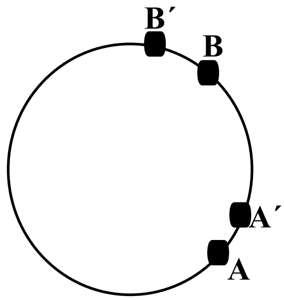
174. Οι 2ν ευγενείς της αυλής του βασιλιά Πατάτα προσκλήθηκαν σε μια δεξίωση.Κάθε ευγενής έχει το πολύ ν-1 εχθρούς.Να δείξετε ότι όλοι οι ευγενείς μπορούν να καθίσουν σε ένα στρογγυλό τραπέζι,έτσι ώστε, κανένας ευγενής να μην κάθεται δίπλα σε έναν εχθρό του.

Λύση

Αρχικά βάζουμε τους ευγενείς να καθίσουν τυχαία. Έστω Σ το σύνολο των γειτονικών ζευγών που είναι εχθροί.Πρέπει όπως και στο προηγούμενο πρόβλημα να βρούμε μια αλγοριθμική διαδικασία που θα ελαττώνει τον αριθμό Σ όταν Σ>0 άρα στην τελική φάση θα μηδενιστεί.Έστω (Α,Β) ένα ζευγάρι γειτονικών ευγενών που είναι εχθροί. Με το Β να κάθεται δεξιά από τον Α (σχήμα 1).Πρέπει να τους χωρίσουμε.
Αυτό θα γίνει αν ανταλλάξει θέσεις ο Α΄ με τον Β για ένα άλλο ζεύγος (Α΄,Β΄) (σχήμα 2),το Σ θα ελαττωθεί αν (Α,Α΄) και (Β,Β΄) είναι ζεύγη φιλών ευγενών.



Σχήμα 1



Σχήμα 2

Αυτό που μένει είναι να δείξουμε ότι υπάρχει πάντα ένα τέτοιο ζευγάρι (Α΄,Β΄) με τον Β΄ δεξιά του Α΄.Αν αρχίσουμε από το Α και κινούμαστε γύρω από το τραπέζι κατά την φορά των δεικτών του ρολογιού θα μετρήσουμε τουλάχιστον ν φίλους του Α. Δεξιά από τον καθένα υπάρχουν τουλάχιστον ν θέσεις .Δεν μπορούν όλες να καταλαμβάνονται από εχθρούς του Β εφόσον ο Β έχει το πολύ ν-1 εχθρούς. Άρα υπάρχει ένας φίλος Α΄ του Α με δεξιό γείτονα τον Β΄, φίλο του Β. ■

175.Δίνονται 17 φυσικοί αριθμοί με μεγαλύτερο πρώτο διαιρέτη το 7 .Να δείξετε ότι τουλάχιστον δυο από αυτούς έχουν γινόμενο τέλειο τετράγωνο.

Λύση

Ο καθένας από αυτούς γράφεται:

$$2^{\alpha}3^{\beta}5^{\gamma}7^{\delta} \quad \alpha,\beta,\gamma,\delta \text{ είναι φυσικοί αριθμοί.}$$

Παρατηρούμε ότι οι αριθμοί $2^{\alpha}3^{\beta}5^{\gamma}7^{\delta}$ και $2^{\alpha'}3^{\beta'}5^{\gamma'}7^{\delta'}$ έχουν γινόμενο τέλειο τετράγωνο όταν οι αντίστοιχοι εκθέτες είναι του ιδίου είδους (άρτιοι ή περιττοί). Τις σημαίνει αυτό; Το γινόμενο $\left(2^{\alpha}\cdot 3^{\beta}\cdot 5^{\gamma}\cdot 7^{\delta}\right)\cdot\left(2^{\alpha'}\cdot 3^{\beta'}\cdot 5^{\gamma'}\cdot 7^{\delta'}\right)$ είναι τέλειο τετράγωνο αν και μόνο αν οι α,α’ είναι του ίδιου είδους (άρτιοι ή περιττοί) ,οι β,β’ είναι του ίδιου είδους κ.ο.κ.

Για παράδειγμα, οι αριθμοί $2^4\cdot 3^3\cdot 5^1\cdot 7^7$, $2^2\cdot 3^5\cdot 5^5\cdot 7^1$ έχουν γινόμενο

$2^6 3^8 5^6 7^8 = \left(2^3 3^4 5^3 7^4\right)^2$ που είναι τέλειο τετράγωνο.

Κάθε αριθμός αντιστοιχίζεται σε μια τετράδα ως προς το είδος των φυσικών δηλ,ο αριθμός $2^4 3^3 5^1 7^7$ αντιστοιχίζεται στην διατεταγμένη τετράδα (άρτιος ,περιττός ,περιττός, περιττός).Υπάρχουν $2^4 = 16$ διαφορετικές τετράδες και μας έχουν δοθεί 17 αριθμοί, άρα από την αρχή της περιστεροφωλιάς υπάρχουν τουλάχιστον δυο αριθμοί με την ίδια τετράδα.
Το γινόμενο τους είναι τέλειο τετράγωνο και αποτελεί την απάντηση στο πρόβλημα. ■
Το παραπάνω πρόβλημα σε μια πιο δύσκολη μορφή του είχε τεθεί στην 26η Διεθνή μαθηματική ολυμπιάδα που πραγματοποιήθηκε το 1985 στην Φινλανδία.
Η διατύπωση ήταν:
Δίνεται ένα σύνολο Μ από 1985 διακεκριμένους ακεραίους θετικούς αριθμούς κανένας από τους οποίους δεν έχει πρώτο διαιρέτη μεγαλύτερο του 23.Να αποδείξετε ότι το Μ περιέχει ένα υποσύνολο 4 στοιχείων των οποίων το γινόμενο να είναι η τέταρτη δύναμη ενός ακέραιου αριθμού.



176.Στα βουνά της Πρατσάνης δυτικά του Στρογγυλού ακούγεται συχνά το παρακάτω δημώδες ποίημα:

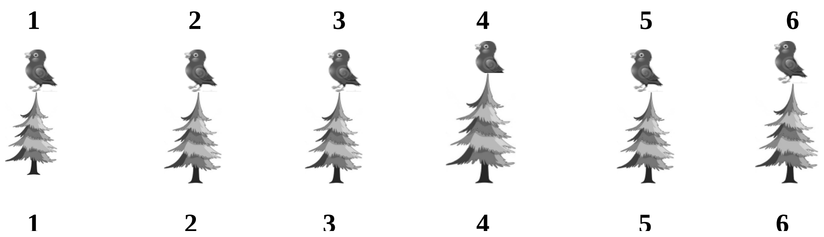
Στα έξι δέντρα….

Έξι σπουργίτες κάθονται ο καθένας σε ένα δέντρο / όλα τα δέντρα έχουν φυτευτεί στην ίδια την ευθεία γραμμή /δέντρο από δέντρο βρίσκεται ακριβώς στα έξι μέτρα /από παλιά,πάππο προς πάππο έλεγαν,ότι οι σπουργίτες θα πετούν μόνο στα έξι δέντρα /αν ένας σπουργίτης πέταγε από ένα δέντρο σε ένα άλλο τότε ένας άλλος πέταγε από άλλο δέντρο προς την αντίθετη κατεύθυνση και τι παράξενο την ίδια την απόσταση θα διανύει /κάποτε στο ίδιο δέντρο είδα μαζί όλους τους σπουργίτες και τότε ήξερα ότι γυαλιά έπρεπε να βάλω.

Γιατί ο καλλιτέχνης πρέπει να αγοράσει γυαλιά οράσεως;

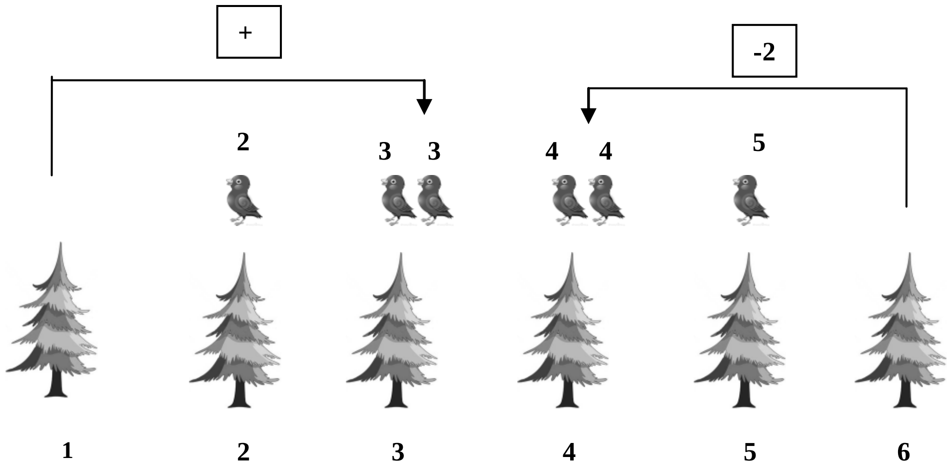
Λύση

Ποιο είναι το μέγεθος στο παραπάνω πρόβλημα που δεν μεταβάλλεται.Κάθε σπουργίτης συμβολίζεται με τον αύξοντα αριθμό του δέντρου που βρίσκεται αρχικά.
Αριθμίζουμε τα δέντρα από αριστερά προς τα δεξιά 1,2,3,4,5,6.Παρατηρουμε ότι το άθροισμα των δεικτών είναι: Σ=1+2+3+4+5+6=21.
Για να δούμε,ενδεικτικά κάποιες κινήσεις σύμφωνα με τους κανόνες του προβλήματος.

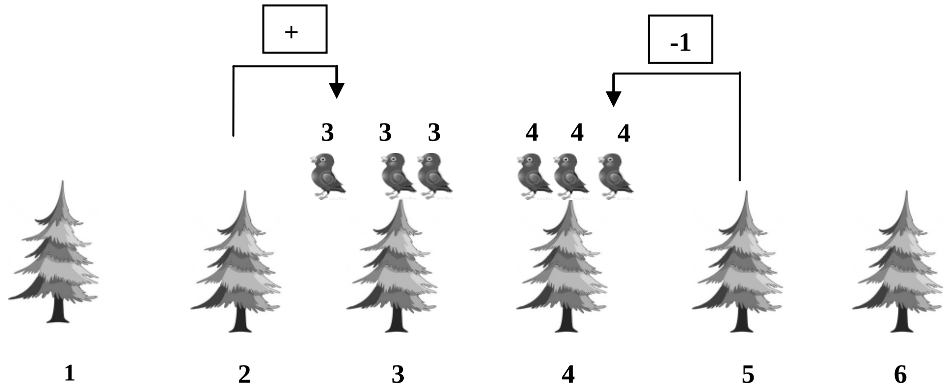


Σ=1+2+3+4+5+6=21

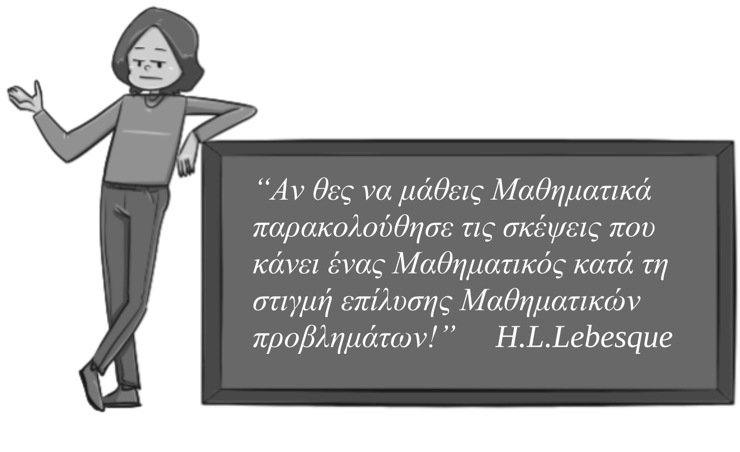
Ο σπουργίτης στο 1^{ο} δέντρο πετά δυο δέντρα δεξιά και ο δείκτης του αυξάνεται κατά 2,ταυτόχρονα ο σπουργίτης από στο 6^{ο} δέντρο πετά αντίθετα δυο δέντρα και ο δείκτης ελαττώνεται κατά 2.Τώρα το άθροισμα των δεικτών των σπουργιτών είναι Σ=2+3+3+4+4+5=21.**Παρέμεινε το ίδιο.**



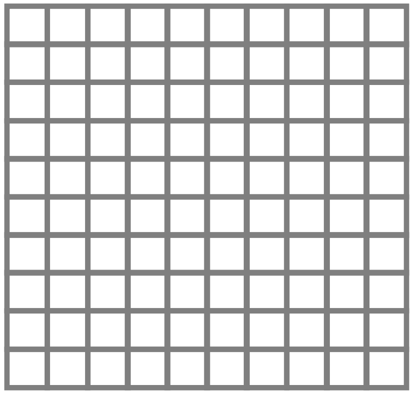
Ο σπουργίτης στο $2^{ο}$ δέντρο πετά ένα δέντρο δεξιά και ο δείκτης του αυξάνεται κατά 1,ταυτόχρονα ο σπουργίτης από στο $5^{ο}$ δέντρο πετά αντίθετα ένα δέντρο και ο δείκτης ελαττώνεται κατά 1.Έτσι,τώρα το άθροισμα των δεικτών των σπουργιτών είναι Σ=3+3+3+4+4+4=21.Παρέμεινε το ίδιο.



Παρατηρούμε,ότι,ανεξάρτητα από τις κινήσεις των σπουργιτών το Σ παραμένει αμετάβλητο.Όταν ένας σπουργίτης πετάξει προς κάποια κατεύθυνση και ένας άλλος πετάξει από αντίθετη κατεύθυνση από κάποιο άλλο δέντρο και διανύσει την ίδια απόσταση τότε ο δείκτης του πρώτου ελαττώνεται κατά τον ίδιο αριθμό που αυξάνεται ο δείκτης του δευτέρου άρα το άθροισμα των δεικτών παραμένει σταθερό.Το άθροισμα Σ είναι αναλλοίωτο.Το άθροισμα ισούται μες 21,αν όλοι οι σπουργίτες έχουν συγκεντρωθεί μετά από κάποιες κινήσεις στο ίδιο δέντρο με δείκτη μ θα ισχύει 6μ=21.Άτοπο,καθώς το 21 δεν είναι πολλαπλάσιο του 6.Άρα,σίγουρα δεν είναι δυνατόν να συγκεντρωθούν όλοι οι σπουργίτες στο ίδιο δέντρο. ■

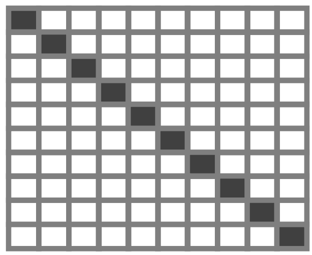


177.Σε μια πόλη του μακρινού Τετραγωνιστάν που έχει το σχήμα μιας 10x10 σκακιέρας,κάποια οικοδομικά τετράγωνα είναι μολυσμένα με ένα ιό .Κάθε μολυσμένο οικοδομικό τετράγωνο παραμένει πάντα μολυσμένο. Επίσης, κάθε μη μολυσμένο οικοδομικό τετράγωνο που έχει τουλάχιστον δυο γειτονικά μολυσμένα οικοδομικά τετράγωνα μολύνεται και αυτό. Ποιος είναι ο ελάχιστος αριθμός οικοδομικών τετραγώνων που πρέπει να μολυνθεί έτσι ώστε να μολυνθεί ολόκληρη η πόλη;



Λύση

Έστω Σ το πλήθος όλων των πλευρών (δρόμων) οι οποίες ανήκουν σε ακριβώς ένα μολυσμένο οικοδομικό τετράγωνο. Τότε ο Σ δεν αυξάνεται. Στο τέλος το Σ ισούται με 4*10=40 (η περίμετρος της τετραγωνικής πόλης). Άρα αρχικά πρέπει να έχουμε τουλάχιστον 10 μολυσμένα οικοδομικά τετράγωνα. Αν μολυνθούν αρχικά τα 10 οικοδομικά τετράγωνα της κυρίας διαγωνίου (πάνω αριστερά μέχρι κάτω δεξιά) τότε θα μολυνθεί ολόκληρη η πόλη!



■

Ποιες είναι οι τρεις φάσεις της μαθηματικής ανακάλυψης;



Ανρί Πουανκαρέ (1854-1912)

Ο Γάλλος Ανρί Πουανκαρέ (1854-1912) υπήρξε ένας από τους τελευταίους καθολικούς μαθηματικούς καθώς διέπρεψε τόσο στα καθαρά όσο και τα εφαρμοσμένα μαθηματικά. Διακρίθηκε εκτός από τα μαθηματικά, στην Φυσική και την Αστρονομία.Υπήρξε καθηγητής στην έδρα της Φυσικής, της Πειραματικής Φυσικής, της Μαθηματικής Φυσικής,του λογισμού των Πιθανοτήτων και της Ουράνιας Μηχανικής στη Σορβόννη.Από το 1887,ήταν μέλος της Ακαδημίας των Επιστημών, από το 1893 μέλοςτου γραφείου Μέτρων και Σταθμών και από το 1908 μέλος της Γαλλικής Ακαδημίας. Ασχολήθηκε με την φιλοσοφία των μαθηματικών και θεωρούσε την αισθητική ως το απόλυτο κριτήριο για την επιλογή των μαθηματικών θεμάτων που ασχολήθηκε.Ο Πουανκαρέ υπήρξε μοναδικός στην μαθηματική εκλαϊκευση καθώς διέθετε σε εξαιρετικό βαθμό το χάρισμα της σαφούς έκθεσης δύστροπων μαθηματικών εννοιών.Πολυγραφότατος, με μεταφράσεις των έργων του σε πολλές γλώσσες παρότι,το χαρακτηριστικό προσωπικό του ύφος δεν μπορούσε να αποδοθεί εύκολα στις μεταφράσεις.Σε ένα μοναδικό κείμενο,σύνοψη μιας ομιλίας που παρέθεσε στο σύλλογο ψυχολόγων του Παρισιού στην αρχές του προηγουμένου αιώνα,περιγράφει την λειτουργία του νου ενός μαθηματικού και αυτή καθ΄αυτη την μαθηματική δημιουργία.

Ο Πουανκαρέ γράφει ότι η μαθηματική εργασία αναπτύσσεται σε τρεις φάσεις:

● *Η πρώτη συνίσταται σε μια καθαρή ανάλυση που αναδεικνύει τις δυσκολίες του προβλήματος και των διάφορων αναγκαίων προσεγγίσεων για την επίλυση του,των εργαλείων που διαθέτει, κάτι που προϋποθέτει μια σε βάθος αναθεώρηση των γνώσεων του.*

● *Η επομένη φάση καθορίζεται ως φάση εγγενούς εγκατάλειψης.Ο νους παύει να σκέπτεται το πρόβλημα ή τουλάχιστον,σταματάει να σκέπτεται με ένα καθορισμένο τρόπο προκειμένου να διεισδύσει στο μυστηριώδες σύμπαν του ασυνειδήτου,στο οποίο η δημιουργική δραστηριότητα ακολουθεί τους δικούς της κανόνες.Είναι το σύμπαν της αοριστίας,της ανακρίβειας και της πνευματικής περιπλάνησης.Το αποτέλεσμα αυτής της ασυνείδητης διαδικασίας μπορεί να εμφανιστεί οποιαδήποτε στιγμή, αιφνιδιαστικά,και να συνδέεται με συμβάντα που φαινομενικά δεν έχουν καμιά σχέση με το αντικείμενο της έρευνας.Είναι η μαγική στιγμή κατά την οποία ο ερευνητής έχει την αίσθηση ότι ξαφνικά άναψε ένα φως σε ένα δωμάτιο στο οποίο ποτέ προηγουμένως δεν είχε βρεθεί.*

● *Η τρίτη φάση είναι αυτή της πλήρους συνείδησης κατά την οποία ο μαθηματικός υποβάλλει της ιδέες σε αυστηρό έλεγχο, δεχόμενος κάποιες και απορρίπτοντας άλλες. Μπορεί να υπάρχουν μια ή περισσότερες επιστροφές στην δεύτερη φάση μέχρι που τελικά,αν το πρόβλημα έχει επιλυθεί,υποκύπτει στους κανόνες του παιχνιδιού που επιβάλλει ο μαθηματικός φορμαλισμός και του δίνει την οριστική μορφή της λύσης.*

Τι κρατάμε από τον Πουανκαρέ;Όλοι όσοι ασχολούνται με επίλυση προβλημάτων όχι κατ΄ανάγκη μαθηματικών έχουν να διηγηθούν μια παρόμοια εμπειρία.Συμβαίνει πολύ συχνά να εργαστείτε σκληρά και να μην σημειώσετε καμία πρόοδο.Αφήστε το ,ασχοληθείτε με κάτι άλλο,αναπαυτείτε ή ξεχάστε το για κάποιες μέρες, το υποσυνείδητο το δουλεύει.Είναι πολύ πιθανό μια έμπνευση ή μια φαεινή ιδέα να εμφανιστεί όταν επανέλθετε στην επίλυση ή και..πάλι όχι!

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΠΡΟΣ ΛΥΣΗ (Παίγνια-Αναλλοίωτο)

Α134.Στο τραπέζι υπάρχουν 26 σπίρτα.Δυο μαθητές (ο Α και ο Β) ο ένας μετά τον άλλον παίρνουν 1 ή 2 ή 3 ή 4 σπίρτα. Όποιος πάρει τελευταίος σπίρτα κερδίζει. Πρώτος παίζει ο Α. Τι πρέπει να κάνει για να κερδίσει;

Α135. Δυο παίκτες Α και Β παίζουν εναλλάξ και από ένα σωρό με 19 φασόλια μπορούν να πάρουν είτε ένα είτε δυο φασόλια. Ο παίκτης Α παίζει πρώτος. Το παιχνίδι τελειώνει όταν ένας από τους δυο παίκτες πάρει και το τελευταίο φασόλι και νικητής είναι αυτός που έχει άρτιο αριθμό φασολιών. Υπάρχει στρατηγικής νίκης για κάποιον από τους δυο παίκτες;

Α136.Ο Γιάννης έγραψε ένα θετικό ακέραιο Ν στον πίνακα (Ν >1).Ο Δημήτρης με πρώτο αριθμό τον Ν γράφει μια σειρά από αριθμούς στον πίνακα ακολουθώντας το μοτίβο:Λαμβάνει ένα διαιρέτη μεγαλύτερο του 1 του προηγούμενου αριθμού και είτε τον προσθέτει είτε τον αφαιρει από τον αριθμό.Είναι δυνατό για τον Δημήτρη ανεξάρτητα από τον αριθμό που θα επιλέξει ο Γιάννης να καταλήξει στον αριθμό 2018;

Α137. Οι μαθητές Χ και Υ παίζουν ένα παιχνίδι ως εξής:
Επιλέγουν εναλλάξ ο ένας μετά τον άλλο , έναν από τους αριθμούς 1 και 2.Αρχιζει ο Χ επιλέγοντας τον αριθμό $x_1 \in \{1,2\}$ και συνεχίζει ο Υ επιλέγοντας τον αριθμό $y_1 \in \{1,2\}$ και καταγράφοντας τον άθροισμα $\Sigma_1 = x_1 + y_1$.Στην συνέχεια ο Χ επιλέγει τον αριθμό $x_2 \in \{1,2\}$ και καταγράφει το άθροισμα $\Sigma_2 = \Sigma_1 + x_2$,ενώ ο Υ συνεχίζοντας επιλέγει τον αριθμό $y_2 \in \{1,2\}$ και καταγράφει το άθροισμα $\Sigma_3 = \Sigma_2 + y_2$ κ.λ.π.Νικητής αναδεικνύεται ο μαθητής που θα καταγράψει σε μια επιλογή του ως άθροισμα τον αριθμό 200.Να αιτιολογήσετε γιατί ο μαθητής Χ έχει στρατηγική νίκης;Ισχύει το ίδιο,αν ο νικητής αναδεικνύεται όταν το άθροισμα γίνει 300;
(Θαλής 2001)

Α138.Ο Γιώργος παίζει το παιχνίδι 102 στον υπολογιστή. Στην αρχική οθόνη φαίνεται ο αριθμός 123,ο παίκτης έχει στην διάθεση του ένα λεπτό και την δυνατότητα να αλλάξει όπως θέλει την θέση των ψηφίων του αριθμού.Μόλις περάσει το λεπτό,το πρόγραμμα προσθέτει στον αριθμό της οθόνης τον αριθμό 102.Στον επόμενο γύρο το ίδιο,πάλι χρονικό διάστημα ένα λεπτού,ο παίκτης μπορεί να αλλάξει τα ψηφία όπωςνα θέλει και στην συνέχεια προστίθεται ο αριθμός102.Σκοπος του παίκτη είναι να μην προκύψει άθροισμα τετραψήφιος αριθμός. Υπάρχει στρατηγική νίκης ενάντια στο πρόγραμμα; *(Tournament of towns)*



Α139.Έστω ένας σωρός από 100 πέτρες, ανά δυο έχουν διαφορετικό βάρος. Σε κάθε πέτρα κολλάμε ένα αυτοκόλλητο με το βάρος της .Είναι δυνατό να «αλλάξουμε» ένα ή περισσότερα αυτοκόλλητα στις πέτρες έτσι ώστε, αν επιλέξουμε οποιαδήποτε ομάδα από 1 έως 99 πέτρες από τον σωρό το άθροισμα των βαρών στα αυτοκόλλητα τους να είναι πάντα λανθασμένο; *(Tournament of towns)*

Α140.Δυο παίκτες σε διαδοχικούς γύρους παίζουν εναλλάξ χρωματίζοντας τα μοναδιαία τετράγωνα ενός 4x4 τετραγωνικού πλέγματος, ένα την κάθε φορά. Όταν μετά την κίνηση ενός παίκτη ένα τετράγωνο 2x2 έχει πλήρως χρωματιστεί τότε αυτός ο παίκτης χάνει. Ποιο από τους δυο παίκτες έχει στρατηγική νίκης; Ο πρώτος ή ο δεύτερος;

Α141.Δυο φίλοι παίζουν το παρακάτω παιχνίδι.Γράφουν στον πίνακα την εξίσωση $*x^2+*x+*=0$.Αυτος που παίζει πρώτος, πρέπει να αντικαταστήσει τους αστερίσκους με τρεις μη μηδενικούς πραγματικούς αριθμούς.Το ίδιο κάνει και ο δεύτερος παίκτης.Θα κερδίσει αυτός,που η εξίσωση που θα σχηματίζει θα έχει δυο ρίζες πραγματικές και άνισες.Να δείξετε ότι υπάρχει ένας απλός τρόπος επιλογής των συντελεστών,ώστε ο παίκτης να κερδίζει πάντα. *(Ευκλείδης Β)*

Α142.Έστω ότι έχουμε τρεις σωρούς από βώλους. Στον πρώτο σωρό έχουμε 12 βώλους ,στον δεύτερο σωρό έχουμε 123 βώλους και στον τρίτο σωρό έχουμε 1234 βώλους. Θεωρούμε ως μια κίνηση:

- Είτε να αφαιρέσουμε τον ίδιο αριθμό βώλων από κάθε ένα από τους τρεις σωρούς.
- Είτε να χωρίσουμε έναν από τους σωρούς (με άρτιο πλήθος βώλων) σε δυο υποσωρούς με ίδιο πλήθος βώλων ,να αφαιρέσουμε τον ένα υποσωρό και να προσθέσουμε τους βώλους του άλλου υποσωρού σε ένα από τους δυο άλλους σωρούς.

Είναι δυνατό να βρεθεί κατάλληλη ακολουθία
κινήσεων η οποία να οδηγεί στις καταστάσεις:
i.Να μην μείνει κανένας βώλος στον 1° και στον 2° σωρό.
ii.Να μην μείνει κανένας βώλος στον 1° και στον 3° σωρό.
iii.Να μην μείνει κανένας βώλος στον 2° και στον 3° σωρό.
iv.Να μην μείνει κανένας βώλος στους τρεις σωρούς

Α143.Ο Αντώνης και ο Βασίλης παίζουν το ακόλουθο παιχνίδι.Ο Αντώνης αρχίζει γράφοντας σε ένα χαρτί το 0 ή το 1.Σε κάθε κίνηση ο Αντώνης επιλέγει να γράψει το 0 ή το 1.Απο την άλλη ο Βασίλης μετά από κάθε κίνηση του Αντώνη κάνει την δική του κίνηση,επιλέγει δυο ψηφία της ακολουθίας όποια θέλει και τα αντιμεταθέτει.Το παιχνίδι τελειώνει όταν συμπληρωθούν 1999 ψηφία.Νικητής είναι ο Βασίλης όταν η ακολουθία είναι συμμετρική ως προς το μεσαίο (1000° ψηφίο) ενώ αν δεν είναι κερδίζει ο Αντώνης.Υπάρχει στρατηγική νίκης για κάποιον από τους δυο;

Α144.Δυο παίκτες ξεκινούν από τον αριθμό 60 και σε διαδοχικούς γύρους αφαιρούν εναλλάξ από τον εκάστοτε αριθμό, έναν από τους θετικούς διαιρέτες του. Χάνει ο παίκτης που θα γράψει ως αποτέλεσμα της αφαίρεσης τον αριθμό 0.Υπάρχει νικηφόρα στρατηγική για κάποιον από τους δυο παίκτες;

Α145.Σχεδιάζουμε στο χαρτί ένα 4× 4 τετράγωνο. Δύο παίκτες Α,Β τοποθετούν εναλλάξ στα τετράγωνα τους αριθμούς 1 έως 16, από μία φορά τον καθένα, μέχρι να γεμίσουν όλα τα τετράγωνα. Κατόπιν ο πρώτος παίκτης Α προσθέτει τους αριθμούς σε κάθε στήλη και μετά βρίσκει την διαφορά μεταξύ του μεγαλύτερου και του μικρότερου από αυτά τα τέσσερα αθροίσματα. Ο αριθμός που θα προκύψει είναι το σκορ του.Ο δεύτερος παίκτης Β κάνει το ίδιο, αλλά με τις γραμμές. Ο παίκτης που θα έχει το μεγαλύτερο σκορ είναι ο νικητής.

3	7	4	16	30
5	6	9	12	32
11	15	10	14	50
8	1	13	2	24
27	29	36	44	

ΣΚΟΡ ΠΑΙΚΤΗ Β 50-24=26

ΣΚΟΡ ΠΑΙΚΤΗ Α 44-27=17

Για παράδειγμα,αν η 4x4 διάταξη γεμίσει όπως το σχήμα, τότε ο παίκτης Α έχει αθροίσματα στηλών τα 27,29,36, 44 οπότε το σκορ του είναι 44-27=17. Ο δεύτερος παίκτης Β έχει αθροίσματα γραμμών 30,32,50,24,οπότε το σκορ του είναι 50-24=26Αφού το 26 είναι μεγαλύτερο από το 17, κερδίζει ο δεύτερος παίκτης Β.Έχει ο δεύτερος παίκτης Β στρατηγική νίκης ή τουλάχιστον ισοπαλίας;

Α146.Ένας ταξιδιώτης κατά την διάρκεια του ταξιδιού του στην χώρα των κανίβαλων βρέθηκε περικυκλωμένος από 10 κανίβαλους.Καθένας από τους κανίβαλους θέλει να φάει τον ταξιδιώτη αλλά,όπως όλοι στην χώρα των κανίβαλων γνωρίζουν υπάρχει ένα ρίσκο.Όταν κάποιος από τους κανίβαλους επιτεθεί στον ταξιδιώτη και τον φάει τότε θα κουραστεί και θα είναι ανυπεράσπιστος στην όρεξη οποιουδήποτε άλλου κανιβάλου (ο οποίος παρεμπιπτόντως αν φάει τον πρώτο κανίβαλο θα βρεθεί στην ίδια θέση). Οι κανίβαλοι είναι όλοι πεινασμένοι αλλά δεν υπάρχει περίπτωση να συνεργαστούν.Όλοι οι κανίβαλοι είναι εξίσου νοήμονες,εξίσου ικανοί στην λήψη αποφάσεων και είναι σε θέση να κάνουν το καλύτερο δυνατό λογικό συλλογισμό (πολύ γνωστό και αυτό!).Άρα θα σκεφτούν προτού κάνουν οποιαδήποτε κίνηση.
Το ερώτημα είναι:*θα γλυτώσει ο ταξιδιώτης;*

Α147.Ο Αυτοκράτορας Μήτσος κάλεσε τους 50 συμβούλους του στην μεγάλη αίθουσα του θρόνου.Κάποιοι από τους 50 σύμβουλους είναι διεφθαρμένοι και πότε λένε αλήθεια,πότε λένε ψέματα,οι υπόλοιποι είναι ευσυνείδητοι,λένε πάντα αλήθεια.Ο κάθε σύμβουλος γνωρίζει την κατάσταση όλων των άλλων συμβούλων (διεφθαρμένοι ή ευσυνείδητοι). Ωστόσο,ο αυτοκράτορας δεν γνωρίζει το ποιον ούτε ενός σύμβουλου.Φυσικά,θέλει να βρει και να τιμωρήσει όλους τους διεφθαρμένους.Δίνει στον κάθε σύμβουλο μια κάρτα με μια ερώτηση δικής του επιλογής που επιδέχεται απάντηση «Ναι» ή «Όχι». Οι ερωτήσεις δεν είναι κατά ανάγκη ίδιες από σύμβουλο σε σύμβουλο.Στην συνέχεια ακούει την απάντηση καθενός.

Μόλις απαντήσουν όλοι,ο αυτοκράτορας επιλέγει κατά την κρίση του ένα σύμβουλο και τον πετάει σε ένα μαγικό πηγάδι όπου και σκοτώνεται,μόλις σκοτωθεί από το πηγάδι–μαγικό γαρ-ακούγεται φωνή που λέει αν ο θανών ήταν ευσυνείδητος ή διεφθαρμένος.

Ακολούθως, ο αυτοκράτορας Μήτσος ετοιμάζει νέες κάρτες με ερωτήσεις όποιες θέλει αυτός και τις ξαναδίνει στους εναπομείναντες συμβούλους κ.ο.κ. Η διαδικασία σταματά αν ο αυτοκράτορας κατορθώσει να εξαλείψει όλους τους διεφθαρμένους συμβούλους. Αν σε κάποια φάση της διαδικασίας αντιληφθεί ποιοι ακριβώς είναι οι διεφθαρμένοι σύμβουλοι μπορεί να τους σκοτώσει μονομιάς και φυσικά να επαληθευτεί από το πηγάδι.

Υπάρχει στρατηγική να εξαλειφθούν από τον αυτοκράτορα Μήτσο όλοι οι διεφθαρμένοι σύμβουλοι με περιθώριο μιας μόνο λάθους επιλογής;Δηλαδή ο μέγιστος αριθμός από ευσυνείδητους συμβούλους που μπορεί να σκοτώσει να είναι μόνο ένας;

Α148.Στην Λοξολάνδη κάθε χρόνο διοργανώνεται το ετήσιο τουρνουά Μπιζελιών. Ένα τουρνουά στο οποίο συμμετέχουν παίκτες από όλη την επικράτεια,με έπαθλο το κολοσσιαίο ποσό των 1000 λιρών Λοξολάνδης που το προσφέρει ο επιχειρηματίας Μήτσος,τσιφούτης επίσης κολοσσιαίων διαστάσεων.Το παιχνίδι έχει πολύ απλούς κανόνες.

Παίζεται από δυο αντίπαλους παίκτες.Αρχικά, κάθονται ενώπιος ενωπίω σε ένα τραπέζι με μια στοίβα 39 μπιζελιών,ο πρώτος παίκτης χωρίζει όπως θέλει την αρχική

στοίβα σε δυο νέες στοίβες με πλήθη μπιζελιών α,β.Ο κριτής τότε καταγράφει το γινόμενο α*β. Έρχεται η σειρά του άλλου παίκτη επιλέγει όποια στοίβα θέλει και την χωρίζει επίσης όπως θέλει-όσο αφορά το πλήθος μπιζελιών-σε δυο νέες στοίβες με πλήθη α΄,β΄.Ο κριτής τότε καταγράφει το γινόμενο α΄*β΄.

Η διαδικασία συνεχίζεται μέχρι να προκύψουν 39 στοίβες του ενός μπιζελιού.Ο κριτής που έχει καταγράψει τα γινόμενα,τα αθροίζει,αν το αποτέλεσμα είναι περιττός κερδίζει ο πρώτος παίκτης αν το αποτέλεσμα είναι άρτιος κερδίζει ο δεύτερος παίκτης.Κάθε χρόνο το χρηματικό έπαθλο κερδίζει ο Μήτσος τζούνιορ,ο όποιος μεταξύ μας δεν μπορεί να μοιράσει δυο γαϊδουριών άχυρα αλλά επειδή είναι ο γιος του διοργανωτή παίζει πάντα πρώτος.Εξηγήστε γιατί κερδίζει πάντα;

Α149.Στην μια όψη 2002 καρτών είναι τυπωμένος ένας θετικός ακέραιος από το 1 μέχρι το 2002.Καθε ζεύγος καρτών έχει διαφορετικό αριθμό.Οι κάρτες είναι τοποθετημένες σε μια σειρά σε ένα τραπέζι με ορατή την όψη του αριθμού. Δυο παίκτες Α,Β παίρνουν εναλλάξ σε διαδοχικούς γύρους ο καθένας μια κάρτα μέχρι να μην μείνει κάρτα στο τραπέζι.Στο τέλος ο καθένας αθροίζει τους αριθμούς των καρτών του και ανακοινώνει το τελευταίο ψηφίο του αθροίσματος. Νικητής είναι ο παίκτης που έχει μεγαλύτερο τελευταίο ψηφίο. Υπάρχει στρατηγική νίκης για κάποιον από του δυο παίκτες Α ή Β; *(Πρώτος παίζει ο Α.)*

Α150.Στο μακρινό βασίλειο της Ρεμούλας,δυο απατεώνες συλλαμβάνονται να κλέβουν.Η ετυμηγορία των δικαστών είναι ισόβια φυλάκιση.Όμως η μέρα που γινόταν η δίκη ήταν εθνική εορτή για αυτό οι δικαστές αποφάσισαν να τους υποβάλλουν σε ένα τεστ που θα τους επέτρεπε να γλυτώσουν την φυλάκιση.Τους έδειξαν μια κάλπη της οποίας το περιεχόμενο δεν φαινόταν και τους είπαν ότι περιείχε άσπρες και μαύρες σφαίρες.Θα τους έκλειναν σε δυο κελιά όπου δεν θα είχαν καμία επικοινωνία,θα τους έφερναν την κάλπη και θα διάλεγαν μια σφαίρα στην τύχη.Στην συνέχεια ο καθένας θα έκανε μια πρόβλεψη για το χρώμα της σφαίρας που θα τύχαινε στον άλλο.Αν έκαναν λάθος στην πρόβλεψη είτε ο ένας τους,είτε και οι δυο θα γλύτωναν την φυλακή,αν έκαναν και οι δυο σωστές προβλέψεις θα φυλακίζονταν ισόβια.Οι δικαστές πριν τους κλείσουν στα κελιά τους επέτρεψαν να συζητήσουν για μερικά λεπτά.Υπάρχει στρατηγική να γλυτώσουν;

Α151.Ένας δράκος έχει 200 κεφάλια.Ένας Ιππότης,ο Σερ Μήτσος μπορεί με κάθε χτύπημα του σπαθιού του να κόψει 18,19,25 ή 5 κεφάλια.Σε καθεμία από αυτές τις περιπτώσεις, φυτρώνουν στους ώμους του δράκου αντίστοιχα 24,7,22 ή 11 νέα κεφάλια.Ο δράκος σκοτώνεται αν του κοπούν όλα τα κεφάλια.Μπορεί ο Σερ Μήτσος να σκοτώσει τον δράκο;

Α152.Έστω ότι έχουμε τρεις σωρούς 5,49 και 51 βόλων.Είναι δυνατό να γίνουν μόνο δυο κινήσεις:

1.Μπορουμε να συνενώσουμε δυο σωρούς και να προκύψει ένας νέος.

2.Μπορουμε να χωρίσουμε ένα σωρό σε δυο ισοπληθείς σωρούς.

Είναι δυνατό με κατάλληλη ακολουθία των παραπάνω κινήσεων να προκύψουν 105 μονομελείς σωροί. (να έχουν ένα μόνο βόλο έκαστος) *(Tournament of towns)*

Α153.Σε ένα τουρνουά αγώνων τένις συμμετέχουν 151 αθλητές από διάφορες χώρες.Να αποδείξετε ότι ο αριθμός των αθλητών που αγωνιστήκαν σε περιττό αριθμό αγώνων, είναι αριθμός άρτιος.

Α154.Ο παρακάτω πίνακας με τους αριθμούς έχει μια περίεργη ιδιότητα.Επιλέξετε τυχαία ένα αριθμό,κατόπιν διαγράψτε κάθε αριθμό που βρίσκεται στην ίδια γραμμή και στην ίδια στήλη.Επαναλάβετε μέχρι να μην μείνει άλλος αριθμός στον πίνακα.Θα το κάνετε 6 φορές.

28	26	30	27	29	25
34	32	36	33	35	31
16	14	18	15	1	13
4	2	6	3	5	1
10	8	12	9	11	7
22	20	24	21	23	19

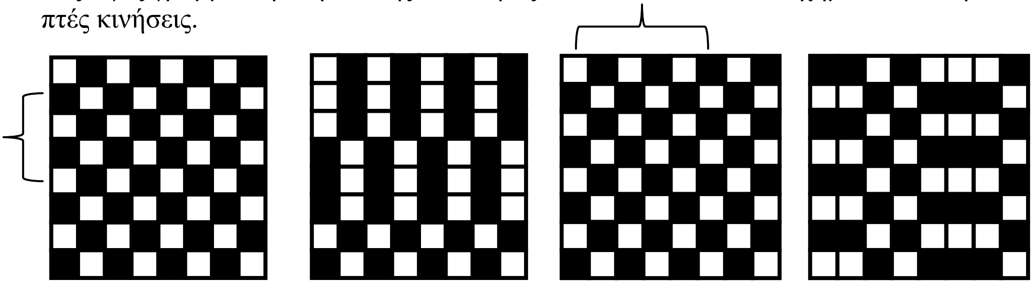
~~28~~	**26**	~~30~~	~~27~~	~~29~~	~~25~~
~~34~~	~~32~~	~~36~~	~~3~~	**35**	~~31~~
~~16~~	~~14~~	~~18~~	**15**	~~17~~	~~13~~
4	~~2~~	~~6~~	~~3~~	~~5~~	~~1~~
~~10~~	~~8~~	**12**	~~9~~	~~11~~	~~7~~
~~22~~	~~20~~	~~24~~	~~21~~	~~23~~	**19**

Όποιους αριθμούς και να επιλέξετε πάντα το άθροισμα των έξι αριθμών θα είναι το ίδιο (111).(στο σχήμα έχουν επιλεγει 26,35,15,4,12,19) Γιατί συμβαίνει αυτό;

(Martin Gardner,Scientific American 1957)

Α155.Σε μια ευθεία λαμβάνουμε δυο σημεία Α,Β στην συνέχεια παίρνουμε τυχαία στην ευθεία 45 σημεία τα οποία δεν ανήκουν στο ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ. Να αποδείξετε ότι το άθροισμα των αποστάσεων των σημείων αυτών από το σημείο Α δεν είναι ίσο με το άθροισμα των αποστάσεων των σημείων αυτών από το Β.

Α156.Ο Νίκος έχει μια ιδιαίτερη 8 x8 σκακιέρα. Μπορεί να αντιμεταθέσει οποιοδήποτε ζεύγος γραμμών ή στηλών της σκακιέρας. Δείτε στο ακόλουθο σχήμα δυο επιτρεπτές κινήσεις.

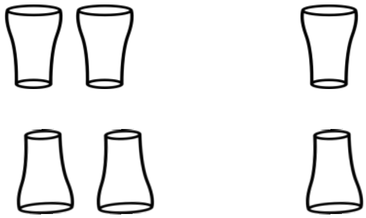


Ο Νίκος πραγματοποίησε ένα πλήθος τέτοιων κινήσεων και κατέληξε σε μια διάταξη της σκακιέρας όπου το πάνω αριστερά 4x4 τετράγωνο της σκακιέρας αποτελούνταν από μαύρα μοναδιαία τετραγωνάκια. Μπορείτε να προσδιορίσετε το χρώμα των υπολοίπων μοναδιαίων τετραγώνων της σκακιέρας;

Α157.Τριανταπέντε πλαστικά ποτήρια έχουν τοποθετηθεί σε ένα τραπέζι με το στόμιο προς τα πάνω.Θεωρούμε ως μια κίνηση το ταυτόχρονο αναποδογύρισμα ακριβώς έξι

ποτηριών.Υπάρχει ακολουθία κινήσεων που να έχει ως τελικό αποτέλεσμα να έχουμε και τα τριανταπέντε ποτήρια με το στόμιο προς τα κάτω. (σχήμα 2)

Αρχική κατάσταση



σχήμα 2

Τελική κατάσταση

Α158.Εικοσιέξι πλαστικά ποτήρια έχουν τοποθετηθεί σε ένα τραπέζι με το στόμιο προς τα πάνω. Ο Γιάννης αναποδογυρίζει τα ποτήρια από το πρώτο μέχρι το τελευταίο. Κατόπιν αναποδογυρίζει κάθε δεύτερο ποτήρι. Στην συνέχεια αναποδογυρίζει κάθε τρίτο ποτήρι κ.ο.κ μέχρι το εικοστό έκτο .Όταν τελειώσει ο Γιάννης ποια ποτήρια (αύξοντας αριθμός 1°,2°,…) θα έχουν το στόμιο προς τα κάτω;



Α159.Σε ένα κυρτό πολύγωνο με 2020 κορυφές είναι σχεδιασμένες μερικές από τις διαγωνίους του. Καλούμε μια κορυφή του πολυγώνου «άρτια» αν το πλήθος των διαγωνίων που διέρχονται από αυτήν είναι άρτιο και «περιττή» αν το πλήθος των διαγωνίων που διέρχονται από αυτή είναι περιττό. Είναι δυνατό το πλήθος των περιττών κορυφών να ισούται με 153;

Α160.Στο δάσος της Λοξολάνδης υπάρχουν οχτώ τρύπες σε μια σειρά.Σε μια τρύπα από τις οχτώ έχει λουφάξει μια αλεπού.Κάθε νύχτα,η αλεπού μετακινείται και λουφάζει στην επομένη ή στην προηγούμενη τρύπα,κάθε πρωί ένας κυνηγός έχει την δυνατότητα να ελέγξει μόνο μια από τις οχτώ τρύπες για να βρει την αλεπού.Υπάρχει στρατηγική που πρέπει να ακολουθήσει για να βρει σίγουρα την αλεπού.

Α161. Έστω το κλάσμα 6/7.Μια κίνηση θεωρείται είτε η αύξηση του αριθμητή κατά 7 είτε η αύξηση του παρονομαστή κατά 6,αλλά όχι και τα δυο μαζί. Ποιος είναι ο ελάχιστος αριθμός κινήσεων που απαιτείται για να επανέλθει το κλάσμα στην αρχική του τιμή,το 6/7.



Η επίλυση προβλημάτων στα μαθηματικά είναι θέμα ευφυΐας αλλά κυρίως επιμονής και ευελιξίας.Ο G. Polya γράφει στο βιβλίο του, *Η μαθηματική ανακάλυψη*:



« Η οικοδέσποινα έσπευσε στο κατώφλι, έβαλε την ποντικοπαγίδα στο έδαφος (ήταν μια παλιομοδίτικη παγίδα,ένα κλουβί με καταπακτή) και είπε στην κόρη της να φέρει τη γάτα. Το ποντίκι εγκλωβισμένο στην παγίδα παραδόξως,φαινόταν να κατανοεί το μηχανισμό της,αγωνιζόταν μανιωδώς στο κλουβί,τίναζε το σώμα του δυνατά ,ποτέ μια από την μια ποτέ από την άλλη πλευρά των τοιχωμάτων της παγίδας μέχρι που κατόρθωσε να βρει ένα άνοιγμα και να το χαλαρώσει ,να στριμωχτεί, να βγει έξω και να εξαφανιστεί στο χωράφι του γείτονα. Πρέπει να υπήρχε από την μια πλευρά της παγίδας ένα μικρό άνοιγμα στα μεταλλικά κάγκελα, το βρήκε, το εκμεταλλεύτηκε και απέδρασε…Από μέσα μου έδωσα συγχαρητήρια στο ποντίκι.

Έλυσε ένα μεγάλο πρόβλημα, και μου έδωσε ένα σημαντικό παράδειγμα. Αυτός είναι ο τρόπος επίλυσης των προβλημάτων.Πρέπει να δοκιμάζουμε και να δοκιμάζουμε ξανά και ξανά μέχρι τελικά να αναγνωρίσουμε την μικρή διαφορά μεταξύ των «ανοιγμάτων» από τα οποία εξαρτάται το παν.Πρέπει να δοκιμάζουμε κάθε φορά με διαφορετικό τρόπο ώστε να μπορέσουμε να διερευνήσουμε όλες τις πλευρές του προβλήματος. Πραγματικά, δεν μπορούμε γνωρίζουμε εκ των προτέρων σε ποια πλευρά είναι το άνοιγμα όπου μπορούμε διά μέσου αυτού να συμπιεστούμε και να οδηγηθούμε στην λύση.

Η θεμελιώδης μέθοδος τόσο των ποντικιών όσο και των ανθρώπων είναι η ίδια: να προσπαθούμε ξανά και ξανά, και ξανά, δοκιμάζοντας κάθε φορά λίγο διαφορετικά για να μην χάσουμε την ευνοϊκή εικόνα. Είναι αλήθεια ότι οι άνθρωποι είναι συνήθως καλύτεροι στην επίλυση προβλημάτων από τα ποντίκια. Ένας άνθρωπος δεν χρειάζεται να χρησιμοποιήσει το σώμα του για να ξεπεράσει το εμπόδιο,συνήθως το κάνει διανοητικά. Φυσικά ακόμα περισσότερο ένας άνθρωπος μπορεί να άλλαζει με μεγαλύτερο ρυθμό τις προσεγγίσεις του και να μάθει περισσότερα από την αποτυχία των δοκιμών του από ένα ποντίκι.»

George Polya,*Η μαθηματική ανακάλυψη*

Το ηθικό δίδαγμα είναι ότι δεν θα πρέπει ποτέ να τα παρατάμε καθώς και ότι πρέπει να δοκιμάζουμε διαφορετικές προσεγγίσεις μέχρι να βρούμε την σωστή. Φανταστείτε ένα ποντίκι που θα χτυπούσε το κεφάλι του στα κάγκελα της παγίδας ξανά και ξανά μέχρι να πέσει αναίσθητο. Όμως από την άλλη, η πεισματώδης επιμονή σίγουρα δεν αποτελεί κανόνα καθώς ακόμα και οι καλύτεροι λύτες αφήνουν κάποια προβλήματα έστω και προσωρινά για να επανέρθουν ή και όχι.

Διαγωνιστικά θέματα (Συνδυαστική,Παίγνια,Χρωματισμοί,Αναλλοίωτο)
Συντομογραφίες μαθηματικών διαγωνισμών
The American High School Mathematics Examination (AHSME)
The International Mathematical Olympiad (IMO)
Tournament of Towns
Balkan Mathematical Olympiad (BMO)
The American Regions Mathematics *League (*ARML*)*
Soviet Union Math Competitions(ASU)
Ελληνική εθνική Μαθηματική Ολυμπιάδα,Ε.Μ.Ε,(Αρχιμήδης)
Wisconsin Mathematics, Engineering and Science Talent Search (W.M.E.S.T.S)
American Invitational Mathematics Examination (AIME)
USA Mathematical Talent Search (USASMT)

Α162. Έξι μαθητές με διαφορετικά ύψη μπαίνουν σε ένα κατάστημα να αγοράσουν παγωτό. Με πόσους τρόπους μπορούν να μπουν σε μια σειρά για το ταμείο έτσι ώστε να μην υπάρχουν τρία διαδοχικά παιδιά στην ουρά με αύξουσα σειρά ύψους προς το ταμείο.*(2015 ARML)*
Α163.Να βρείτε το πλήθος των θετικών επταψήφιων ακεραίων αριθμών που τα ψηφία τους δεν είναι κατά ανάγκη διαφορετικά και είναι διατεταγμένα κατά αύξουσα σειρά. *(AIME 2005)*
Α164. Πόσοι τριψήφιοι θετικοί ακέραιοι αριθμοί ικανοποιούν την συνθήκη ότι οποιαδήποτε δυο διαδοχικά ψηφία τους διαφέρουν κατά μια μονάδα.
Για παράδειγμα, οι αριθμοί 126,541,567,651 ικανοποιούν την προϋπόθεση του προβλήματος. *(W.M.E.S.T.S)*
Α165. Να αποδείξετε ότι ο αριθμός των ατόμων που χόρεψαν σε χορό με περιττό αριθμό ατόμων, είναι αριθμός άρτιος. *(1965 ARML)*
Α166.Σε ένα ποδοσφαιρικό αγώνα 18 ομάδες έπαιξαν μεταξύ τους 8 γύρους, όπου κάθε ομάδα έπαιξε με 8 διαφορετικές ομάδες. Να αποδείξετε ότι μπορούμε να βρούμε 3 ομάδες οι οποίες δεν έπαιξαν μεταξύ τους ούτε ένα παιχνίδι. *(ASU 1981)*
Α167. Μια παρέα που αποτελείται από ν άτομα παίζει ένα επιτραπέζιο παιχνίδι με τους εξής κανόνες:
Ι. Σε κάθε γύρο του παιχνιδιού παίζουν ακριβώς 3 άτομα.
ΙΙ. Το παιχνίδι ολοκληρώνεται μετά από ν γύρους.
ΙΙΙ. Κάθε δυάδα παικτών έχει παίξει μαζί σε έναν τουλάχιστον γύρο.
Να προσδιορίσετε την μεγαλύτερη δυνατή τιμή του ν.*(Αρχιμήδης 2017)*
Α168. Ο καθένας από 2001 μαθητές σε ένα σχολείο γνωρίζει είτε Ισπανικά είτε Γαλλικά είτε και τις δυο γλώσσες .Ο αριθμός των μαθητών που γνωρίζει Ισπανικά είναι μεταξύ του 80% και του 85% του συνόλου των μαθητών του σχολείου ,και ο αριθμός των μαθητών που γνωρίζει Γαλλικά είναι μεταξύ του 30% και του 40% του συνόλου των μαθητών του σχολείου. Έστω min ο μικρότερος αριθμός από μαθητές που γνωρίζουν και τις δυο γλώσσες και Max ο μεγαλύτερος αριθμός των μαθητών που γνωρίζουν και τις δυο γλώσσες. Να υπολογίσετε την διαφορά Max-min. *(AIME 2001)*

Α169. Μπορούμε να μεταθέσουμε τις γραμμές και τις στήλες του πινάκα 7x7.

1	2	3	4	5	6	7
7	1	2	3	4	5	6
6	7	1	2	3	4	5
5	6	7	1	2	3	4
4	5	6	7	1	2	3
3	4	5	6	7	1	2
2	3	4	5	6	7	1

Πόσοι διαφορετικοί πίνακες μπορούν να προκύψουν; *(Tournament of towns)*

Α170.Δίνεται τετράγωνο S με πλευρά μήκους 20.Εστω Μ το σύνολο των τεσσάρων κορυφών του S με 1999 τυχαία σημεία στο εσωτερικό του. Να αποδείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα τρίγωνο με κορυφές σημεία του Μ με εμβαδό μικρότερη ή ίσο του 1/10.*(Βαλκανική μαθηματική ολυμπιάδα νέων 1999)*

Α171. Τα παιδιά από μια τάξη 20 μαθητών βρίσκονται σε διακοπές .Καθένα από αυτά έστειλε μια ταχυδρομική κάρτα σε δέκα συμμαθητές του. Να αποδείξετε ότι τουλάχιστον δυο συμμαθητές αλληλογραφήσαν. (Διαγωνισμός επιλογής Σλοβενίας)

Α172.Ο Μήτσος και η σύζυγός του καλούν σε δείπνο 4 παντρεμένα ζευγάρια. Στη διάρκεια του δείπνου, ο Μήτσος ρωτά τους 9 συνδαιτυμόνες του, πόσους πρωτογνώρισαν στο δείπνο και παίρνει 9 διαφορετικές απαντήσεις. Πόσους ανθρώπους γνώρισε η σύζυγός του; *(P.Halmos)*

Α173.Δεκαεπτά άτομα επικοινωνούν μεταξύ τους με μηνύματα στο Fakebbook,ο καθένας με όλους τους άλλους.Στα μηνύματα συζητούνται μόνο τρία θέματα: Ποδόσφαιρο,Τέχνη,Μαγειρική. Κάθε ζεύγος ατόμων που ανταλλάσει μηνύματα ασχολείται μόνο με ένα από τα τρία αυτά θέματα.Να αποδείξετε ότι υπάρχουν τουλάχιστον 3 άτομα που ανταλλάσουν μηνύματα ανά δυο ασχολούμενα με το ίδιο θέμα. (IMO 1964)

Α174. Δυο παίκτες παίζουν σε διαδοχικούς γύρους τοποθετώντας στα τετράγωνα του 2x4 ορθογωνίου του σχήματος τους αριθμούς {1,2,3,45,6,7,8}.καθε αριθμός μπορεί να χρησιμοποιηθεί μόνο μια φόρα. Το παιχνίδι τελειώνει όταν συμπληρωθούν όλα τα τετράγωνα.Ο πρώτος παίκτης κερδίζει αν το γινόμενο των αριθμών στην πάνω γραμμή είναι μεγαλύτερο από το γινόμενο των αριθμών της κάτω γραμμής. Σε αντίθετη περίπτωση κερδίζει ο δεύτερος παίκτης. Υπάρχει στρατηγική νίκης για κάποιον από τους δυο παίκτες; (USAMTS 2017)

Α175. Κάθε σημείο στο επίπεδο χρωματίζεται με κόκκινο ή πράσινο ή μπλε χρώμα. Να αποδείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο με τις τέσσερεις κορυφές του να έχουν το ίδιο χρώμα. *(2006 USAMTS)*

Α176. Ένας φοιτητής του Ε.Μ.Π διάβαζε ανώτερα μαθηματικά το προηγούμενο καλοκαίρι για 37 ημέρες σύμφωνα με τους εξής κανόνες:

i.Διάβαζε τουλάχιστον μια ώρα κάθε μέρα.

ii.Διάβαζε ακέραιο αριθμό ωρών,αλλά όχι πάνω από 12 ώρες κάθε μέρα.

iii.Έπρεπε να διαβάσει το πολύ 60 ώρες συνολικά.

Να αποδειχθεί ότι υπήρχαν κάποιες διαδοχικές ημέρες κατά τις οποίες ο μαθητής διάβαζε ακριβώς 13 ώρες. *(Αρχιμήδης 2002)*

Α177. Χρωματίζουμε τους ακεραίους από το 1 μέχρι το 999 με κόκκινο ή με μπλε χρώμα, έτσι ώστε κάθε ακέραιος να έχει ένα από τα δυο χρώματα. Πόσους διαφορετικούς χρωματισμούς μπορούμε να κατασκευάσουμε με την ιδιότητα να υπάρχουν περισσότεροι κόκκινοι αριθμοί μεταξύ των αριθμών 1,…,500 από ότι μεταξύ των αριθμών 501,…999; *(W.M.E.S.T.S 2018)*

Α178.Δημιουργούμε λέξεις χρησιμοποιώντας μόνο το γράμματα Α,Β,Γ, σε μια λέξη δεν πρέπει κατά ανάγκη να βρίσκονται τα τρία γράμματα. Ορίζουμε μια λέξη «**καλή**» αν,

- το επόμενο γράμμα από το Α δεν είναι το γράμμα Β ,
- το επόμενο γράμμα από το Β δεν είναι το γράμμα Γ ,
- το επόμενο γράμμα από το Γ δεν είναι το γράμμα Α ,

Πόσες καλές λέξεις με 7 γράμματα υπάρχουν; *(AIME 2003)*

Α179. Σε ένα διεθνές συνέδριο λαμβάνουν μέρος 1985 άτομα. Σε κάθε ομάδα τριών ατόμων υπάρχουν τουλάχιστον δυο άτομα που μιλούν την ίδια γλώσσα. Γνωρίζοντας ότι κάθε άτομο μιλάει το πολύ πέντε γλώσσες, να αποδείξετε ότι υπάρχουν τουλάχιστον 200 άτομα που μιλούν την ίδια γλώσσα.
(Βαλκανική μαθηματική ολυμπιάδα 1985)

Α180. Ο καθένας από ν δημοσιογράφους κατέχει μια σημαντική πληροφορία ,και οι ν πληροφορίες είναι όλες διαφορετικές μεταξύ τους. Κάθε φορά που ο δημοσιογράφος Α τηλεφωνεί στον δημοσιογράφο Β του αποκαλύπτει όλες τις πληροφορίες που γνωρίζει την ίδια στιγμή που ο δημοσιογράφος Β δεν αποκαλύπτει τίποτα από ότι γνωρίζει στον δημοσιογράφο Α.

Ποιος είναι ο ελάχιστος αριθμό τηλεφωνημάτων- μεταξύ των ν δημοσιογράφων- που απαιτούνται έτσι ώστε, και οι ν δημοσιογράφοι να γνωρίζουν όλες στις πληροφορίες; (SMO 2006)

Α181.Να αποδείξετε ότι από ένα σύνολο δέκα διαφορετικών διψήφιων αριθμών,είναι δυνατόν να επιλέξουμε δυο υποσύνολα ξένα μεταξύ τους, των οποίων τα στοιχεία να έχουν το ίδιο άθροισμα. *(IMO 1972)*

Α182. Για πόσα ζεύγη διαδοχικών αριθμών από το σύνολο

$$\{1000,1001,1002,\ldots,1999,2000\}$$

Δεν υπάρχει κρατούμενο στην πρόσθεση μεταξύ τους. *(AIME 1992)*

Α183.Ν ποδοσφαιρικές ομάδες έπαιξαν σε ένα τουρνουά όπου κάθε ομάδα έχει παίξει με όλες τις άλλες ακριβώς μια φορά. Κάθε ομάδα κέρδισε 10 παιχνίδια και έχασε 10 παιχνίδια, δεν υπήρξαν ισοπαλίες.

i.Πόσες ομάδες έλαβαν μέρος στο τουρνουά;

ii.Πόσες τριάδες ομάδων έχουμε στο συγκεκριμένο τουρνουά όπου μια ομάδα κέρδισε τις άλλες δυο.

iii.Πόσες τριάδες ομάδων {Α,Β,Γ} έχουμε στο συγκεκριμένο τουρνουά όπου η Α κέρδισε την Β ,η Β κέρδισε την Γ και η Γ κέρδισε την Α;

(AMC Αμερικανικός διαγωνισμός επιλογής)

Α184. Θεωρούμε το σύνολο Μ={1,2,3,…,2003}.Ποσα υποσύνολα του Μ με άρτιο αριθμό στοιχειών υπάρχουν*; (Προκριματικός διαγωνισμός νέων 2003)*

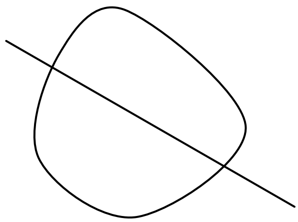
Α185. Πάνω σε καθεμία πλευρά τετράγωνου ΑΒΓΔ θεωρούμε 3 σημεία διαφορετικά μεταξύ τους.

i. Να προσδιορίσετε τον αριθμό των ευθύγραμμων τμημάτων που ορίζονται με άκρα τα σημεία αυτά και δεν βρίσκονται πάνω στις πλευρές του τετράγωνου.

ii. Δεν υπάρχει τριάδα από τα προηγούμενα ευθύγραμμα τμήματα που να διέρχονται από το ίδιο σημείο. Να βρείτε πόσα σημεία τομής των τμημάτων αυτών υπάρχουν μέσα στο τετράγωνο; *(Προκριματικός Διαγωνισμός Νέων 2011)*

Α186. Μπορείτε να κατασκευάσετε ένα οκτάπλευρο και μια ευθεία που να τέμνει όλες τις πλευρές του; Ακολούθως να αποδείξετε ότι δεν υπάρχει ευθεία που να τέμνει όλες τις πλευρές ενός επιπέδου πολυγώνου με 2021 πλευρές; *(Tournament of towns Junior)*

Α187. Στο εσωτερικό της κλειστής καμπύλης του σχήματος βρίσκονται άπειρα διακριτά σημεία. Ας υποθέσουμε ότι επιλέγουμε τυχαία ένα εκατομμύριο από αυτά.Είναι δυνατό να τοποθετήσουμε μια ευθεία γραμμή στο εσωτερικό της καμπύλης με τροπή ώστε:



Α.Να τέμνει την καμπύλη

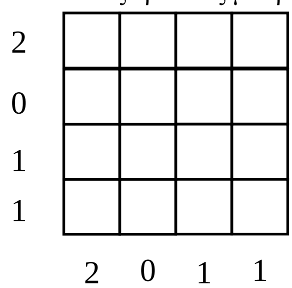
Β.Να μην αγγίζει κανένα από τα σημεία που διαλέξαμε.

Γ.Να χωρίζει το σύνολο των σημείων σε δυο υποσύνολα,το καθένα από τα οποία θα περιέχει 500000 σημεία και θα βρίσκεται από το ένα και από το άλλο σημείο της ευθείας;

Αν η απάντηση σας είναι θετική πρέπει να την αποδείξετε.

Α188. Το τετράγωνο του σχήματος αποτελείται από 16 τετράγωνα , ορισμένα από τα όποια θέλουμε να χρωματίσουμε μαύρα. Οι αριθμοί αριστερά κάθε γραμμής και κάτω από κάθε στήλη δείχνουν πόσα τετραγωνάκια κάθε γραμμής και στήλης μπορούμε να χρωματίσουμε μαύρα. Με πόσους τρόπους μπορεί να γίνει αυτό;

(Tournament of Towns Jr)



Α189.Έστω σκακιέρα 8x8 με τα τετράγωνα της να έχουν βαφεί λεύκα ή μαύρα με τυχαίο τρόπο.Θεωρούμε ως κίνηση να επιλέξουμε ένα 3x3 ή ένα 4x4 τετράγωνο της σκακιέρας και να αντιστρέψουμε τα χρώματα του (*λευκό σε μαύρο και μαύρο σε λευκό)*.Τα τετράγωνα ορίζονται από τις οριζόντιες και τις καθετές γραμμές της σκακιέρας. Αν δοθεί τυχαίος χρωματισμός στη σκακιέρας υπάρχει πάντα ακολουθία κινήσεων που θα μας επιτρέψει να χρωματίσουμε όλα τα τετράγωνα τη σκακιέρας μαύρα;*(Singapore mathematical Olympiad .J.)*

Α190. Θεωρούμε ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ με πλευρά α. Έστω Δ,Ε και Ζ τα μέσα των πλευρών του ΑΒ,ΒΓ και ΓΑ αντίστοιχα. Έστω Η το συμμετρικό του Δ ως προς την ευθεία ΒΓ. Χρωματίζουμε όλα τα σημεία Α,Β,Γ,Δ,Ε,Ζ,Η με ένα από τα δυο χρώματα Κ (κόκκινο), Μ (μπλε)

i.Να βρείτε πόσα ισόπλευρα τρίγωνα ορίζονται με κορυφές από τα επτά σημεία Α,Β,Γ,Δ,Ε,Ζ,Η.

ii.Να αποδείξετε ότι ,αν τα σημεία Β και Ε χρωματιστούν με το ίδιο χρώμα, τότε για οποιαδήποτε χρωματισμό των υπολοίπων σημείων υπάρχει ισόπλευρο τρίγωνο με κορυφές από τα επτά σημεία Α,Β,Γ,Δ,Ε,Ζ,Η του οποίου και οι τρεις κορυφές έχουν το ίδιο χρώμα.

iii.Ισχύει το ίδιο συμπέρασμα με αυτό του προηγούμενου ερωτήματος, αν τα σημεία Β και Ε χρωματιστούν με διαφορετικό χρώμα; *(Προκριματικός νέων 2017)*

Α191.Ένας επταψήφιος αριθμός $\overline{x_1x_2x_3x_4x_5x_6x_7}$ ονομάζεται ευκολομνημόνευτος αν η ακολουθία των ψηφίων $x_1x_2x_3$ είναι ακριβώς ίδια με την ακολουθία $x_4x_5x_6$ ή με την $x_5x_6x_7$ ή και τα δυο. Οι αριθμοί x_i μπορεί να είναι κάποιοι από τα 10 ψηφία.Να βρείτε το πλήθος των ευκολομνημόνευτων αριθμών. (AHSME 1998)

Α192. Σε μια χώρα, οι πόλεις Α,Β,Γ συνδέονται μεταξύ τους με το οδικό δίκτυο της χώρας. Γνωρίζουμε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένας δρόμος (μπορεί να είναι και περισσότεροι) που να συνδέει άμεσα κάθε ζεύγος των τριών πόλεων. Για παράδειγμα, αν κάποιος ταξιδιώτης θέλει να μεταβεί από την πόλη Α στην πόλη Β μπορεί να πάρει κάποιο δρόμο που συνδέει άμεσα τις δυο πόλεις ή να χρησιμοποιήσει σαν ενδιάμεσο σταθμό την πόλη Γ. Ανάλογη διαδικασία προβλέπεται για την μετάβαση από οποιαδήποτε από τις τρεις πόλεις με προορισμό τις άλλες δυο πόλεις.Το υπουργείο μεταφορών της Λοξολάνδης υπολόγισε ότι ο αριθμός των συνολικών διαδρομών από την πόλη Α στην πόλη Β είναι 33.Συμπεριλαμβανομενων και των διαδρομών με ενδιάμεσο σταθμό την πόλη Γ. Ανάλογα, ο αριθμός των συνολικών διαδρομών από την πόλη Β στην πόλη Γ είναι 23,επισης συμπεριλαμβανόμενων των διαδρομών με ενδιάμεσο σταθμό την πόλη Α.Να υπολογίσετε το συνολικό αριθμό των διαδρομών από την πόλη Α στην πόλη Γ.(συμπεριλαμβανόμενων και των διαδρομών με ενδιάμεσο σταθμό την πόλη Β). (*Tournament of Towns)*

Α193.Βάφουμε τους αριθμούς 1,2,3,….,20 με δυο χρώματα, άσπρο και μαύρο, έτσι ώστε να χρησιμοποιούνται και τα δυο χρώματα. Με πόσους τρόπους μπορεί να γίνει ο χρωματισμός ώστε το γινόμενο των άσπρων αριθμών και το γινόμενο των μαύρων αριθμών να έχουν μέγιστο κοινό διαιρέτη ίσο με 1. *(Αρχιμήδης 2014)*

Α194.Να υπολογίσετε το πλήθος των διατεταγμένων εξαδων$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5,\alpha_6)$ που μπορούν να δημιουργηθούν ,αν οι αριθμοί $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5,\alpha_6$ μπορούν να πάρουν τις τιμές 0,1 και 2 και το άθροισμα $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4+\alpha_5+\alpha_6$ είναι άρτιος . *(Αρχιμήδης 2016)*

Α195.Πόσοι είναι οι δεκαψήφιοι φυσικοί αριθμοί που έχουν ψηφία είτε 1 είτε 2 και έχουν στην δεκαδική μορφή τους τουλάχιστον δυο συνεχόμενους άσσους. (AIME 2006)

Α196.Με πόσους τρόπους μπορούμε να διατάξουμε τους αριθμούς 21,31,41,51,61,71 και 81 έτσι ώστε το άθροισμα κάθε τετράδας διαδοχικών αριθμών να είναι πολλαπλάσιο του 3; *(ARML1999)*

Α197.Την Κυριακή το καθένα από μια ομάδα επτά παιδιών πήγε στο περίπτερο τρεις φόρες.Είναι γνωστό για κάθε ζεύγος παιδιών –από τα επτά-ότι έχουν συναντηθεί στο περίπτερο την Κυριακή. Να αποδείξετε ότι κάποια χρονική στιγμή την Κυριακή τρία παιδιά συναντήθηκαν στο περίπτερο. *(Tournament of towns)*

Α198. Έστω ότι έχουμε ένα τετράγωνο το οποίο αποτελείται από τελείες χρώματος μπλε ή κόκκινου.Το τετράγωνο έχει 20 γραμμές και 20 στήλες.Για κάθε δυο γειτονικές τελείες είτε σε γραμμή είτε σε στήλη γνωρίζουμε ότι ενώνονται με ένα ευθύγραμμο τμήμα του κοινού τους χρώματος,για παράδειγμα αν βρίσκονται δίπλα - δίπλα δυο κόκκινες τελείες τότε είναι ενωμένες με ένα ευθύγραμμο τμήμα κόκκινου χρώματος.Αλλά,κάθε δυο τελείες με διαφορετικό χρώμα είναι συνδεμένες με ένα ευθύγραμμο τμήμα μαύρου χρώματος.Γνωρίζουμε ότι στο σχήμα έχουμε 219 κόκκινες τελείες,39 από αυτές στα «σύνορα» του πινάκα(με τον όρο σύνορα εννοούμε την $1^{η}$ και την $20^{η}$ γραμμή καθώς την $1^{η}$ και την $20^{η}$ στήλη) αλλά καμία από αυτές δεν βρίσκεται στις 4 «γωνίες» του πίνακα.Στο σχήμα υπάρχουν 237 μαύρα ευθύγραμμα τμήματα.Πόσα είναι τα ευθύγραμμα τμήματα μπλε χρώματος; *(American Mathematical Monthly* 1972)

Α199. Στην κορυφή A_1 του κανονικού δωδεκαμήνου $A_1A_2A_3\ldots A_{12}$ βάζουμε το πρόσημο «-» ενώ σε όλες τις άλλες κορυφές βάζουμε το πρόσημο «+».Επιτρέπεται να αλλάζουμε το πρόσημο κ διαδοχικών κορυφών. Να εξεταστεί αν μπορούμε να κάνουμε όλα τα πρόσημα «+» εκτός από αυτό της κορυφής A_2 στις εξής περιπτώσεις:
i.κ=3 , ii.κ=4 iii.κ=6 *(ASU 1971)*

Α200. Να αποδειχτεί ότι κάθε σύνολο δέκα διψήφιων ακεραίων έχει δυο ξένα μεταξύ τους υποσύνολα με το ίδιο άθροισμα στοιχείων. (IMO 1972)

Α201.Χρωματίζουμε μαύρα ή λευκά ,όπως στην σκακιέρα ,τα μοναδιαία τετράγωνα ενός τετραγώνου 2009x2009 έτσι, ώστε το κάτω αριστερό τετράγωνο να είναι μαύρο. Ένα πιόνι μπορεί να μετακινείται πάνω στο 2009x2009 τετράγωνο ,σύμφωνα με τους ακόλουθους κανόνες:

● Αρχικά το πιόνι βρίσκεται στο κάτω αριστερά τετραγωνάκι.

● Μπορεί να κινηθεί μόνο σε τετραγωνάκι που έχει κοινή πλευρά με το τετραγωνάκι στο οποίο βρίσκεται.

Όταν το πιόνι μετακινείται σε ένα τετραγωνάκι ,τότε,το τετραγωνάκι αυτό αλλάζει χρώμα.

Είναι δυνατόν, χρησιμοποιώντας ένα κινούμενο πιόνι, να χρωματίσουμε όλα τα τετραγωνάκια μαύρα;

Ισχύει το ίδιο,αν το πιόνι δεν μπορεί ,μετά από μια κίνηση ,να γυρίζει άμεσα στην προηγουμένη θέση του; *(Ουκρανία ,2008)*

Α202.Έστω ν τριψήφιοι αριθμοί που ικανοποιούν τις ακόλουθες συνθήκες:

(1) Δεν περιέχουν ως ψηφίο το 0.

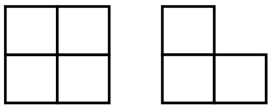
(2) Το άθροισμα των ψηφίων καθενός ισούται με 9.

(3) Το ψηφίο των μονάδων δυο οποιουσδήποτε από αυτούς είναι διαφορετικό.

(4) Το ψηφίο των δεκάδων δυο οποιουσδήποτε από αυτούς είναι διαφορετικό.
(5) Το ψηφίο των εκατοντάδων δυο οποιωνδήποτε από αυτούς είναι διαφορετικό.
Ποιος είναι ο μεγαλύτερη δυνατή τιμή του ν;
(Junior Balkan mathematical Olympiad 2018)

Α203. Μια διεθνής εταιρεία έχει τα μέλη της από έξι διαφορετικές χώρες .Ο κατάλογος των μελών έχει 1978 ονόματα, αριθμημένα 1,2,3,4…,1978.Να αποδείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα μέλος του οποίου ο αριθμός να είναι το άθροισμα των αριθμών δυο μελών της δικής του χώρας, ή δυο φορές ο αριθμός ενός μέλους από την ίδια του την χώρα.*(I.M.O.1978)*

Α204. Ένα ορθογώνιο 9Χ7 καλύπτεται από πλακίδια δυο τύπων που φαίνονται στην διπλανή εικόνα (οι δυο τύποι πλακιδίων αποτελούνται από τρία και τέσσερα μοναδιαία τετράγωνα, αντίστοιχα, και τα πλακίδια τύπου L μπορούν να περιστραφούν όσες φόρες θέλουμε κατά 90° .Έστω $ν \geq 0$ ο αριθμός των 2x2 πλακιδίων που μπορούν να χρησιμοποιηθούν σε μια τέτοια κάλυψη. Να βρεθούν όλες οι δυνατές τιμές του ν.
(Βαλκανική ολυμπιάδα νέων)



Α205.Θεωρούμε τετράγωνο ΑΒΓΔ πλευράς 8 cm το οποίο υποδιαιρούμε με ευθείες παράλληλες προς τις πλευρές του σε 64 μικρά τετραγωνάκια πλευράς 1 cm. Χρωματίζουμε 7 μικρά τετράγωνα μαύρα,ενώ όλα τα υπόλοιπα 57 μικρά τετραγωνάκια είναι λευκά. Υποθέτουμε ότι υπάρχει θετικός ακέραιος κ τέτοιες ώστε ανεξάρτητα από την θέση των 7 μαύρων μικρών τετραγώνων, υπάρχει ορθογώνιο εμβαδού κ cm^2 με πλευρές παράλληλες στις πλευρές του ΑΒΓΔ και με όλα τα μικρά τετράγωνα από τα οποία αποτελείται να είναι λευκά, που μπορεί να αποκοπεί από το τετράγωνο ΑΒΓΔ.
Να βρεθεί η μεγίστη δυνατή τιμή του κ. *(Αρχιμήδης)*

Α206. Στον πίνακα έχουμε γράψει τα τετράγωνα των πρώτων 101 θετικών ακεραίων. Σε κάθε κίνηση,μπορούμε να αντικαταστήσουμε δυο από αυτούς με την απόλυτη τιμή της διαφοράς τους.Ύστερα από 100 κινήσεις, μένει μόνο ένας αριθμός.
Ποια είναι η ελάχιστη τιμή αυτού του αριθμού; (*Tournament of Towns*)

«Οξυδέρκεια είναι να μαντέψουμε δια μιας,σε μια στιγμή, ουσιαστικές σχέσεις που διέπουν ένα φαινόμενο.Για παράδειγμα,δείτε έναν άνθρωπο να συνομιλεί με έναν συγκεκριμένο τρόπο με έναν πλούσιο,μπορείτε στην στιγμή να μαντέψετε ότι αυτός ο άνθρωπος προσπαθεί να δανειστεί χρήματα.Η παρατηρώντας ότι η φωτεινή πλευρά της σελήνης βρίσκεται πάντα προς το μέρος του Ήλιου ,μπορεί ξαφνικά να αντιληφθείτε γιατί συμβαίνει αυτό:δηλαδή ,επειδή η σελήνη λάμπει μέσω του φωτός του Ήλιου.»

G.Polya,«Πώς να το λύσω»



ΛΥΣΕΙΣ ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΩΝ ΑΣΚΗΣΕΩΝ-ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ

Ασκήσεις *(Αντιστοιχία 1-1, αρχή εγκλεισμού- αποκλεισμού,βασική αρχή απαρίθμησης)*

Α1.Σε μια βιβλιοθήκη υπάρχουν 10 βιβλία με περιεχόμενο στην μαγειρική,8 βιβλία με περιεχόμενο στην ζαχαροπλαστική και 6 βιβλία με περιεχόμενο και στην μαγειρική και στην ζαχαροπλαστική.Πόσα βιβλία υπάρχουν με περιεχόμενο τουλάχιστον ένα από τα δύο θέματα;

Λύση

Έστω Α το σύνολο των βιβλίων με περιεχόμενο στην μαγειρική.Τότε, Ν(Α)=10.
Έστω Β το σύνολο των βιβλίων με περιεχόμενο στην ζαχαροπλαστική.Τότε, Ν(Β)=8.
Έστω $A \cap B$ το σύνολο των βιβλίων με περιεχόμενο και στις μαγειρική και στην ζαχαροπλαστική.Τότε, $N(A \cap B) = 6$.Το πλήθος των βιβλίων με περιεχόμενο τουλάχιστον σε ένα από τα δύο θέματα είναι το πληθος των στοιχείων του συνόλου $N(A \cup B)$ Με χρήση της σχέσης του εγκλεισμού αποκλεισμού, έχουμε:

$$N(A \cup B) = N(A) + N(B) - N(A \cap B) = 10 + 8 - 6 = 12$$

Α2.Διαθέτουμε 4 κέρματα του 1 ευρώ, 2 κέρματα των 50 λεπτών και 5 κέρματα των 10 λεπτών. Με πόσους τρόπους μπορούμε να πληρώσουμε το ποσό των 1,7 ευρώ; *(θεωρούμε ότι τα κέρματα είναι διακεκριμένα)*

Λύση 1x1 ,1x50,1x10 δηλαδή $4 \cdot 2 \cdot 5 = 40$ τρόποι.

Α3.Εξι άνθρωποι παίρνουν το ασανσέρ μια οκταόροφης πολυκατοικίας και κατεβαίνουν σε διαφορετικούς ορόφους (1° ,2° ,3° ,…,8°).Με πόσους τρόπους γίνεται αυτό; (θεωρούμε ότι τα κέρματα είναι διακεκριμένα)

Λύση $8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 20160$ τρόποι.

Α4. Πόσοι ακέραιοι υπάρχουν μεταξύ των αριθμών 123 και 321 που έχουν ως ψηφίο τον αριθμό 2 ακριβώς δύο φορές.

Λύση

Οι ζητούμενοι ακέραιοι έχουν την μορφή $\overline{22X}$ ή $\overline{2X2}$ όπου $X \neq 2$.Για το Χ έχουμε 9 επιλογές σε κάθε περίπτωση άρα από την προσθετική αρχή έχουμε: 9+9=18

Α5. Η ακόλουθη παράγραφος αφορά μια ενημερωτική αναφορά του σχολείου Χ και δόθηκε στον Παπαδόπουλο.

Στο σχολείο Χ φοιτούν 45 παιδιά, εκ των όποιων 30 είναι αγόρια.

- *30 παιδιά έχουν άριστους βαθμούς και μεταξύ αυτών τα 16 είναι αγόρια.*
- *28 παιδιά παρακολουθούν μαθήματα σε φροντιστήριο το απόγευμα εκ των οποίων τα 18 είναι αγόρια και τα 17 έχουν άριστους βαθμούς.*
- *15 αγόρια παρακολουθούν μαθήματα σε φροντιστήριο το απόγευμα και έχουν άριστους βαθμούς.*

Ο Παπαδόπουλος δίχως να έχει καμία πρότερη γνώση για το σχολείο Χ ισχυρίστηκε ότι υπάρχει λάθος. Αιτιολογήστε.

(Υπόδειξη: Να βρείτε πόσα είναι τα κορίτσια που φοιτούν στο σχολείο δεν έχουν άριστους βαθμούς και δεν παρακολουθούν μαθήματα σε φροντιστήριο.)

Λύση

Έστω Α το σύνολο των παιδιών, Β το σύνολο των αγοριών ,Γ το σύνολο των παιδιών που πήραν άριστους βαθμούς ,Δ το σύνολο των παιδιών που παρακολουθήσαν μαθήματα σε φροντιστήριο. Τότε το σύνολο Ε των κοριτσιών που φοιτούν στο σχολείο δεν

έχουν άριστους βαθμούς και δεν παρακολουθούν μαθήματα σε φροντιστήριο.
Ν(Α)=45,Ν(Β)=30,Ν(Γ)=30,Ν(Δ)=28.Ισχύει από την αρχή εγκλεισμού- αποκλεισμού

$$N(E) = N(A) - N(\Gamma \cup B \cup \Delta) =$$

$$N(A) - (N(\Gamma) + N(B) + N(\Delta) - N(\Gamma \cap B) - N(\Delta \cap B) - N(\Delta \cap \Gamma) + N(B \cap \Delta \cap \Gamma) =$$

$$45 - (30 + 30 + 28 - 16 - 18 - 17 + 15) = -7$$

Αποτέλεσμα που αποδεικνύει ότι τα στοιχεία που δοθήκαν είναι λανθασμένα.

Α6.Να βρείτε τους τρόπους με τους οποίους μπορούμε να σχηματίσουμε πενταψήφιους αριθμούς από τα ψηφία 0,3,4,5,6 όταν:
i. τα ψηφία είναι ανά δυο διαφορετικά.
ii. τα ψηφία μπορούν να επαναλαμβάνονται.
Λύση i.Το πρώτο ψηφίο δεν μπορεί να είναι 0.Αρα μπορούμε να σχηματίσουμε:
$4\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1 = 96$ αριθμούς.
ii. $4\cdot 5\cdot 5\cdot 5\cdot 5 = 2500$ αριθμοί

Α7.Ο Μήτσος ξέρει ότι το PIN –ο κωδικός εισόδου – στο κινητό του τηλέφωνο αποτελείται από τα ψηφία 8,9,6,5,χωρις όμως να θυμάται την σειρά των ψηφίων. Να βρείτε πόσες το πολύ δόκιμες απαιτούνται για να βρει ο Μήτσος τον κωδικό.
Λύση Οι διαφορετικοί αριθμοί που μπορούμε να σχηματίσουμε τα 4 διαφορετικά ψηφία είναι $4\cdot 3\cdot 2\cdot 1 = 24$.Ας υποθέσουμε ότι ο Μήτσος- γκαντέμης ολκής - δοκιμάσει προηγουμένως όλους τους άλλους κωδικούς και τελευταία τον σωστό κωδικό, τότε θα χρειαστούν 24 δοκιμές.

Α8. Ο Τοτός έχει στο συρτάρι του 5 τετράδια και 4 μολύβια. Πηγαίνει στο δωμάτιο του και παίρνει ένα τετράδιο ή ένα μολύβι.Με πόσους τρόπους μπορεί να το κάνει αυτό; Με πόσους τρόπους θα το έκανε αν έπαιρνε ένα τετράδιο και ένα μολύβι;
Λύση Στην πρώτη περίπτωση έχουμε 5+4=9 επιλογές.Εφαρμόσαμε την προσθετική αρχή. Ο Τοτός παίρνει **μόνο ένα** από τα δυο είδη αντικείμενων.
Στην δεύτερη περίπτωση έχουμε $5\cdot 4 = 20$ επιλογές. Εφαρμόσαμε την βασική αρχή απαρίθμησης διότι ο Τοτός παίρνει το τετράδιο με 5 τρόπους και για καθεμία από τις 5 επιλογές τετραδίου έχει 4 επιλογές για το μολύβι.

Α9.Ριχνουμε ένα κέρμα 5 φορές.Πόσες πεντάδες διαφορετικών αποτελεσμάτων μπορούμε να έχουμε;
Λύση Για κάθε ρίψη έχουμε δυο αποτελέσματα Κ,Γ(Κορώνα,Γράμματα) άρα αν «σπάσουμε» την διαδικασία σε 5 φάσεις από την βασική αρχή απαρίθμησης προκύπτει: $2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2 = 32$ αποτελέσματα ρίψεων.

Α10.Ενα τεστ μαθηματικών αποτελείται 3 ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής και κάθε ερώτηση έχει 4 πιθανές απαντήσεις .Ο κάθε διαγωνιζόμενος συμπλήρωσε μια απάντηση σε κάθε ερώτηση. Στο τεστ έλαβαν μέρος 65 μαθητές. Είναι δυνατόν πάντα να υπάρχουν τουλάχιστον δυο διαγωνιζόμενοι που έχουν δώσει ίδιες απαντήσεις;
Λύση Έχουμε για κάθε μια από τις 3 ερωτήσεις 4 επιλογές άρα από την πολλαπλασιαστική αρχή 4^3=64 διαφορετικές επιλογές .Οι διαγωνιζόμενοι όμως είναι 65 άρα τουλάχιστον δυο έχουν δώσει ακριβώς τις ίδιες απαντήσεις.

Α11. Δυο ξεναγοί συνοδεύουν έξι τουρίστες. Οι ξεναγοί αποφασίζουν να χωρίσουν τους τουρίστες σε δυο ομάδες με την προϋπόθεση σε κάθε ομάδα να υπάρχει τουλάχιστον ένας τουρίστας. Με πόσους τρόπους μπορεί να γίνει η διαμέριση σε δυο ομάδες;
Λύση

Καθένας από τους 6 τουρίστες μπορεί να συμμετέχει σε μια από τις δυο ομάδες, άρα έχουμε 2^6 περιπτώσεις, σε αυτές όμως συγκαταλέγονται και οι δυο περιπτώσεις όπου και οι 6 τουρίστες συμμετέχουν στην ομάδα του πρώτου ξεναγού ή και οι 6 τουρίστες συμμετέχουν στην ομάδα άλλου ξεναγού.Αφαιρούμε από το σύνολο και έχουμε τελικά 2^6-2=62 τρόπους.

Α12.Ενα πουκάμισο μάρκας GIGI κατασκευάζεται σε τέσσερα μεγέθη: S,M,L,XL και σε άσπρο, μαύρο, κόκκινο και μπλε χρώμα. Πόσα τουλάχιστον πουκάμισα GIGI πρέπει να διαθέτει ένα κατάστημα για να εξυπηρετήσει ένα πελάτη που θα ζητήσει να αγοράσει ένα πουκάμισο της συγκεκριμένης μάρκας.

Λύση Η διαδικασία επιλογής μπορεί να χωριστεί σε δυο διαδοχικές φάσεις:

Φάση $1^η$:επιλογή μεγέθους με 4 τρόπους.

Φάση $2^η$:επιλογή χρώματος με 4 τρόπους.

Επιλογές:	4 τρόποι	4 τρόποι
	μέγεθος	χρώμα

Σύμφωνα με την πολλαπλασιαστική αρχή η παραπάνω διαδικασία μπορεί να πραγματοποιηθεί με $4\cdot4=16$ τρόπους.

Α13. Μια κάλπη περιέχει 5 σφαιρίδια αριθμημένα από το 1 έως το 5.Παιρνουμε ένα σφαιρίδιο, καταγράφουμε τον αριθμό και το επανατοποθετούμε στην κάλπη. Επαναλαμβάνουμε την διαδικασία άλλες τέσσερεις φορές.

i.Να βρείτε πόσους πενταψήφιους αριθμούς μπορούμε να σχηματίσουμε.

ii.Αν δεν γίνει επανατοποθέτηση πόσοι είναι οι πενταψήφιοι αριθμοί

Λύσηi. $5^5=3125$ αριθμοί ii. $5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1=120$ αριθμοί

Α14. i.Πόσοι είναι οι πενταψήφιοι αριθμοί που το πρώτο ψηφίο τους (των δεκάδων χιλιάδων) είναι το 7;

ii.Πόσοι πενταψήφιοι αριθμοί έχουν το πρώτο ψηφίο (των δεκάδων χιλιάδων) άρτιο;

Λύσηi. $1\cdot10\cdot10\cdot10\cdot10=10^4$ αριθμοί

ii.Οι επιλογές για το πρώτο ψηφίο είναι 2,4,6,8 άρα $4\cdot10\cdot10\cdot10\cdot10=40000$ αριθμοί

Α15. Η ορθογώνια επιφάνεια ενός τραπεζιού αποτελείται από 16 τετράγωνα. Χρωματίζουμε τα τετράγωνα με μαύρο ή λευκό χρώμα.Πόσοι διαφορετικοί χρωματισμοί της επιφάνειας του τραπεζιού είναι δυνατό να προκύψουν;

Λύση 2^{16} διαφορετικοί χρωματισμοί

Α16.Στο μακρινό Αβγατηγανιστάν χρησιμοποιούν ένα αλφάβητο που αποτελείται μόνο από τα τρία γράμματα €, ¥ και ® .Επίσης είναι γνωστό σε όλους ότι οι λέξεις που χρησιμοποιούν οι Αβγατηγανιστανοί έχουν ένα έως τέσσερα γράμματα. Πόσες το πολύ λέξεις είναι δυνατό να έχει το αλφάβητο στο Αβγατηγανιστάν.

Λύση

Διακρίνουμε περιπτώσεις:

Οι λέξεις με 1 γράμμα είναι 3

Οι λέξεις με 2 γράμματα είναι 3^2 (πολλαπλασιαστική αρχή)

Οι λέξεις με 3 γράμματα είναι 3^3

Οι λέξεις με 4 γράμματα είναι 3^4

Άρα έχουμε το πολύ $3+3^2+3^3+3^4=120$ λέξεις

Α17. Στον Γιαννάκη-κολοσσό στα μαθηματικά-έχει τεθεί το εξής πρόβλημα: «Πόσοι τριψήφιοι αριθμοί υπάρχουν με διαφορετικά μεταξύ τους ψηφία, που λαμβάνονται από τα ψηφία 3,4,5,6,7 ;»

Ο Γιαννάκης έδωσε την εξής λύση:

«Θα βρούμε με πόσους τρόπους ορίζεται τριψήφιος αριθμός. Έτσι θεωρούμε την επόμενη διαδικασία την οποία σπάμε σε δυο φάσεις:

*Φάση 1η :Σχηματίζουμε ένα τετραψήφιο αριθμό με τα ψηφία 3,4,5,6,7.Το πρώτο ψηφίο το επιλέγουμε με 5 τρόπους , το δεύτερο με 4 κ.ο.κ άρα λοιπόν από την πολλαπλασιαστική αρχή υπάρχουν 5*4*3*2=120 τρόποι για να σχηματίζουμε έναν τετραψήφιο με τα δεδομένα ψηφία.*

*Φάση 2η:Από τον τετραψήφιο μπορούμε να φτάσουμε στον τριψήφιο παραλείποντας ένα ψηφίο του. Η δεύτερη επιλογή γίνεται με 4 τρόπους,άρα έχουμε 4 τρόπους παράλειψης των ψηφίων.Από την πολλαπλασιαστική αρχή υπάρχουν 4*120=480 τρόποι πραγματοποίηση της διαδικασίας,οπότε υπάρχουν 480 τριψήφιοι που σχηματίζονται από τα ψηφία 3,4,5,6,7.»*

Είναι σωστή η λύση του Γιαννάκη;

Λύση Είναι λάθος, είναι μόνο 60 τρόποι(5*4*3) ,δεν υπάρχει 1-1 αντιστοιχία μεταξύ του συνόλου που ζητήθηκε και του συνόλου που απαριθμήθηκαν τελικά! Για παραδειγμα, με τον τρόπο του Γιαννάκη ο αριθμός 543 μπορει να προκύψει σβήνοντας το 7 και το 6 από τους τετραψηφίους με 8 τρόπους :

7543,5**7**43,54**7**3,543**7**, **6**543,5**6**43,54**6**3,543**6** ενώ είναι μόνο ένας, αυτός είναι και ο λόγος που καταλήγουμε σε οκταπλάσιο νούμερο από το πραγματικό.

Α18.Με πόσους τρόπους μπορούν να δοθούν 2 βραβεία σε 10 υποψηφίους, αν τα δυο βραβεία:

i.Μπορούν να δοθούν στο ίδιο άτομο;

ii.Δεν μπορούν να δοθούν στο ίδιο άτομο;

Λύση

i.10^2 ,ii.9*10=90

Α19. Με πόσους τρόπους μπορούμε να επιλέξουμε δυο αριθμούς Α,Β από τους αριθμούς 1,2,3,…..,2020 ώστε να είναι Α+Β περιττός.

Λύση Ο ένας αριθμός πρέπει να είναι άρτιος και ο άλλος περιττός άρα έχουμε 1010^2 τρόπους

Α20.*Παλινδρομικός* ή *καρκινικός* αριθμός είναι ένας θετικός ακέραιος αριθμός που διαβάζεται το ίδιο από τα αριστερά προς τα δεξιά και από τα δεξιά προς τα αριστερά. Για παράδειγμα, ο αριθμός 121.Ποσοι επταψήφιοι παλινδρομικοί αριθμοί υπάρχουν;

Λύση

Ο αριθμός 1328321 είναι παλινδρομικός και καθορίζεται μονοσήμαντα μόνο από τα 4 πρώτα ψηφία του, έτσι το πλήθος επταψήφιων παλινδρομικών αριθμών είναι το ίδιο με πλήθος των τετραψήφιων αριθμών ,από την βασική αρχή απαρίθμησης το ζητούμενο πλήθος είναι: 9*10*10*10=9000 αριθμούς.

Α21.Να βρείτε το πλήθος των διατεταγμένων ζευγών (α,β), όπου α, β θετικοί ακέραιοι και ισχύει ότι το ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο των α, β είναι ο αριθμός $2^3 5^7 11^{13}$.(Andreescu)

Λύση Οι α και β είναι διαιρέτες του αριθμού $2^3 5^7 11^{13}$ άρα $α=2^x 5^y 11^z$ $β=2^s 5^t 11^u$ όπου x,y,z,s,t,u μη αρνητικοί ακέραιοι. Όμως από υπόθεση ο αριθμός $2^3 5^7 11^{13}$ είναι το ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο των α,β άρα max{x,s}=3,max{y,t}=7,max{z,u}=13. Έτσι (x,s) είναι δυνατό να ισούται με (0,3),(1,3),(2,3),(3,3),(3,2),(3,1),(3,0) άρα έχουμε 7 επιλογές για το ζεύγος (x,s). Παρομοίως, υπάρχουν 15 και 27 επιλογές για τα (y,t) και (z,u) αντίστοιχα. Από την πολλαπλασιαστική αρχή έχουμε συνολικά 7*15*27=2835 διατεταγμένα ζεύγη θετικών ακεραίων (α,β) που έχουν τον αριθμό $2^3 5^7 11^{13}$ ως ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο.

(max{κ,λ} συμβολίζουμε τον μέγιστο των κ,λ)

Α22. Ποιοι είναι περισσότεροι; Οι επταψήφιοι που περιέχουν ένα τουλάχιστον άσσο ή οι επταψήφιοι αριθμοί που δεν περιέχουν κανένα άσσο ;

Λύση Δεν χρησιμοποιούμε το 0 ως πρώτο ψηφίο άρα από την πολλαπλασιαστική αρχή έχουμε, ότι επταψήφιοι αριθμοί έχουν πλήθος: $9*10*10*10*10*10*10=9*10^6$

Οι αριθμοί που δεν περιέχουν κανένα άσσο είναι: $8*9*9*9*9*9*9=8*9^6$

Οι επταψήφιοι που περιέχουν ένα τουλάχιστον άσσο είναι : $9*10^6-8*9^6$

Έστω ότι: $9*10^6-8*9^6>8*9^6$ ή $9*10^6>2*8*9^6$ ή $9*10^6>16*9^6$ ή $(3*10^3)^2>(4*9^3)^2$ ή $3*10^3>4*9^3$ ή $10^3>4*9^3/3$ ή 1000 >972 που ισχύει, άρα οι επταψήφιοι που περιέχουν ένα τουλάχιστον άσσο είναι περισσότεροι από τους επταψήφιους αριθμούς που δεν περιέχουν κανένα άσσο.

Α23. Κάθε αυτοκίνητο της εταιρείας Mitsoscorporation έχει ως κωδικό ένα μοναδικό θετικό ακέραιο με διαφορετικά ψηφία τέτοιο ώστε η απόλυτη τιμή της διαφοράς του $1^{ου}$ και του $4^{ου}$ ψηφίου να ισούται με 4.Πόσα το πολύ αυτοκίνητα διαθέτει η εταιρεία;

Λύση Αναζητούμε το πλήθος των θετικών τετραψήφιων με διαφορετικά ψηφία που η απόλυτη διαφορά του $1^{ου}$ και του $4^{ου}$ ψηφίου ισούται με 4. Εφόσον η απόλυτη τιμή της διαφοράς του πρώτου και του τελευταίου ψηφίου ισούται με 4, τα ψηφια($1^ο$,$4^ο$) μπορούν να είναι:

(1,5),(2,6),(3,7),(4,8),(5,9), (5,1),(6,2),(7,3),(8,4),(9,5), (4,0)

Δηλαδή έχουμε 11 δυνατότητες επιλογής για τα δυο ακραία ψηφία του αριθμού. Για τα 2 μεσαία ψηφία εχουμε:$8\cdot 7=56$.

Άρα το πλήθος των αριθμών και κατ' επέκταση των αυτοκίνητων είναι $11\cdot 56=616$

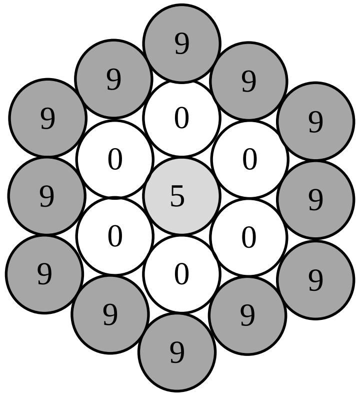
Α24. Να βρείτε το πλήθος των ακέραιων λύσεων της εξίσωσης $|x|+|y|=40$.

Λύση Ο x μπορεί να πάρει τις ακέραιες τιμές από -40 μέχρι 40 ,για $x=40$ και $x=-40$ έχουμε ως y=0,δηλαδή δυο ζευγη λύσεων (-40,0),(40,0).

Για όλες τις άλλες ακέραιες τιμές του x από -39 μέχρι 39 έχουμε ως ζεύγη λύσεων δυο τιμές του y .(-39,1),(-39,-1),(39,1),(39,-1),…

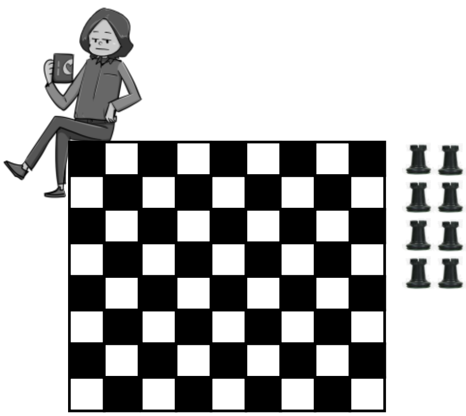
Συνολικά έχουμε: $2\cdot 79+1+1=160$ ζεύγη λύσεων.

Α.25. i.Έστω μια ηλεκτρονική κλειδαριά με την διάταξη πλήκτρων του σχήματος. Με πόσους τρόπους μπορούμε να πληκτρολογήσουμε τον αριθμό 509 με μοναδικό περιορισμό τα διαδοχικά πλήκτρα που θα πληκτρολογήσουμε να εφάπτονται και κάθε πλήκτρο να πατηθεί ακριβώς μια φορά;
ii. Πόσοι είναι οι τρόποι, αν πρέπει να πληκτρολογήσουμε τους αριθμούς 5099,5009; (Πάλι πρέπει τα διαδοχικά πλήκτρα που θα πληκτρολογήσουμε να εφάπτονται.)



Λύση
i.Επιλέγουμε το 5 με ένα τρόπο, κατόπιν το 0 με 6 τρόπους (όσα και τα μηδενικά που εφάπτονται στο κεντρικό 5),
το δεύτερο 0 που επιλέξαμε εφάπτεται με 3 εννιάρια συνεπώς έχουμε: 6*3=18 τρόπους.
ii.Πληκτρολογούμε το 509 με 18 διαφορετικούς τρόπους, για το τέταρτο ψηφίο 9 έχουμε μόνο δυο κουμπιά που εφάπτονται άρα για το 5099 οπότε έχουμε 2*18=36 τρόπους.
Για το 5009, επιλέγουμε το 50 με 6 τρόπους, με 2 τρόπους επιλέγουμε το επόμενο 0 και τέλος το 9 το επιλέγουμε με 3 τρόπους ,έτσι,έχουμε συνολικά 6*2*3=36 τρόπους.

Α.26.Με πόσους τρόπους μπορούμε να τοποθετήσουμε 8 πύργους πάνω σε μια σκακιέρα 8x8,αν δεν επιτρέπεται να υπάρχουν δυο πύργοι στην ίδια γραμμή ή στήλη και επιπλέον δεν επιτρέπεται η τοποθέτηση πύργου στα τέσσερα γωνιακά τετράγωνα.



Λύση

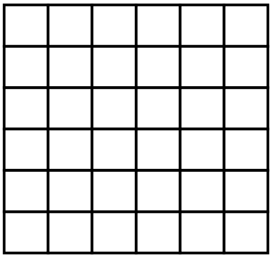
Από τις υποθέσεις του προβλήματος συμπεραίνουμε ότι σε κάθε γραμμή ή στήλη πρέπει να τοποθετηθεί **μόνο ένας πύργος** και επιπλέον ότι σε καμιά γωνία δεν μπορεί να τοποθετηθεί πύργος. Έχουμε:

-Στην πρώτη στήλη υπάρχουν 6 δυνατές τοποθετήσεις πύργου.

-Στην ογδόη και τελευταία στήλη θα υπάρχουν 5 δυνατές τοποθετήσεις πύργου.

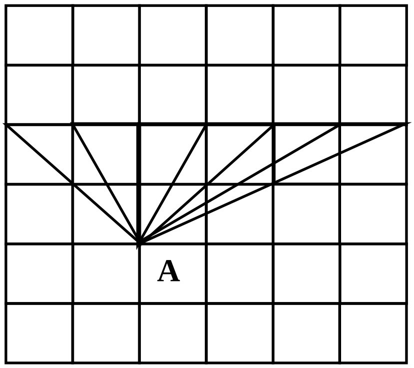
-Στις έξι ενδιάμεσες στήλες , επειδή δεν υπάρχει περιορισμός για τα ακραία τετράγωνα, πρέπει να τοποθετηθούν 6 πύργοι, από ένας σε καθεμία το πλήθος των δυνατών τοποθετήσεων τους θα είναι 6!=720.Σύμφωνα με την βασική αρχή απαρίθμησης , οι συνολικές δυνατές τοποθετήσεις θα είναι: 6*5*720=21600

Α27. Ένα τετράγωνο 6x6 διαιρείται σε 36 1x1 τετράγωνα .Οι κορυφές όλων αυτών των τετραγώνων σχηματίζουν ένα πλέγμα 49 σημείων. Να βρείτε τον αριθμό των ορθογωνίων τριγώνων με κορυφές σημεία του πλέγματος και κάθετες πλευρές παράλληλες προς τις πλευρές των τετραγώνων.



Λύση

Έστω ένα Α τυχαίο σημείο του πλέγματος, το Α μπορεί να αποτελέσει την κορυφή της ορθής γωνίας ενός ορθογώνιου τρίγωνου με δεύτερη κορυφή ένα από τα υπόλοιπα 6 σημεία της οριζόντιας γραμμής που ανήκει το Α και τρίτη κορυφή ένα από τα 6 σημεία της κατακόρυφης γραμμής που ανήκει το Α. Έτσι από την πολλαπλασιαστική αρχή σε κάθε σημείο του πλέγματος 6*6=36 διαφορετικά ορθογώνια τρίγωνα. Επομένως ,συνολικά σχηματίζονται 36*49= 1764 ορθογώνια τρίγωνα.



Α28. Σε ένα υπαίθριο χώρο έχουμε τοποθετήσει σε μια σειρά 120 καθίσματα. Ποιος είναι ο ελάχιστος αριθμός καθισμάτων που πρέπει να είναι κατειλημμένα έτσι ώστε το επόμενο πρόσωπο που θα έρθει σε όποιο κάθισμα και αν καθίσει να βρίσκεται δίπλα σε κατειλημμένη θέση.

Λύση

Συμβολίζουμε με Α το ελεύθερο κάθισμα και Κ το κατειλημμένο. Πρέπει τα καθίσματα να είναι κατειλημμένα, ελεύθερα σε μια γραμμή ακολουθώντας το εξής μοτίβο: ΑΚΑΑΚΑΑΚΑΑ….ΚΑ άρα μπορούμε να ομαδοποιήσουμε τα καθίσματα σε 40 τριάδες ως εξής:
ΑΚΑ ,ΑΚΑ, ΑΚΑ ,ΑΚΑ,….ΑΚΑ, συνεπώς 40 καθίσματα ο ελάχιστος αριθμός κατειλημμένων.

Α29. Έστω ότι 100 φοιτητές εξετάζονται σε 3 θέματα. Είναι γνωστό ότι,100 απάντησαν σωστά σε τουλάχιστον ένα θέμα,70 απάντησαν σωστά σε τουλάχιστον δυο θεματα,10 απάντησαν σωστά σε τουλάχιστον τρία θέματα. Κάθε θέμα το απάντησε ο ίδιος αριθμός φοιτητών. Ποιος είναι ο αριθμός των φοιτητών που δεν απάντησε στο πρώτο θέμα;

Λύση

Έστω N(A) ο αριθμός των φοιτητών που γνώριζαν το πρώτο θέμα, N(B) ο αριθμός των φοιτητών που γνώριζαν το δεύτερο θέμα, N(Γ) ο αριθμός των φοιτητών που γνώριζαν το τρίτο θέμα.

Τότε, από υπόθεση

- $N(A)= N(B)= N(\Gamma)$
- $N(A\cup B\cup \Gamma)=100$, $N((A\cap B)\cup(B\cap\Gamma)\cup(A\cap\Gamma))=70$
- $N(A\cap B\cap\Gamma)=10$

Από την αρχή εγκλεισμού-αποκλεισμού έχουμε:

$$N(A\cup B\cup\Gamma)=100\Leftrightarrow N(A)+N(B)+N(\Gamma)-N(A\cap B)-N(A\cap\Gamma)-$$
$$-N(\Gamma\cap B)+N(A\cap B\cap\Gamma)=100$$
$$3N(A)-N(A\cap B)-N(A\cap\Gamma)-N(\Gamma\cap B)+N(A\cap B\cap\Gamma)=100 \quad (1)$$

Έχουμε:

$$N((A\cap B)\cup(B\cap\Gamma)\cup(A\cap\Gamma))=70\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow N(A\cap B)+N(B\cap\Gamma)+N(A\cap\Gamma)-3N(A\cap B\cap\Gamma)+N(A\cap B\cap\Gamma)=70$$
$$\Leftrightarrow N(A\cap B)+N(B\cap\Gamma)+N(A\cap\Gamma)-2N(A\cap B\cap\Gamma)=70$$
$$\Leftrightarrow N(A\cap B)+N(B\cap\Gamma)+N(A\cap\Gamma)-20=70$$
$$\Leftrightarrow N(A\cap B)+N(B\cap\Gamma)+N(A\cap\Gamma)=90 \quad (2)$$

Από (1),(2):

$$3N(A)-(N(A\cap B)+N(A\cap\Gamma)+N(\Gamma\cap B))+N(A\cap B\cap\Gamma)=100$$
$$\Leftrightarrow 3N(A)-90+10=100\Leftrightarrow 3N(A)=180\Leftrightarrow N(A)=60$$

Εφόσον 60 άτομα απάντησαν το 1° θέμα τότε 100-60=40 δεν το απάντησαν.

Α30. Σε μια ευθεία παίρνουμε ένα πλήθος σημείων. Θεωρούμε όλα τα ευθύγραμμα τμήματα με άκρα τα σημεία. Κάποια από τα σημεία είναι στο εσωτερικό (δηλαδή όχι σε άκρο) σε 27 από αυτά τα ευθύγραμμα τμήματα. Κάποια άλλα από τα σημεία είναι στο εσωτερικό σε 35 από αυτά τα ευθύγραμμα τμήματα. Πόσα είναι τα σημεία;

Λύση

Έστω N+1 το πλήθος των σημείων. Ας δούμε σε πόσα ευθύγραμμα τμήματα μπορεί να βρίσκεται κάποιο από τα σημεία. Αυτό εξαρτάται από την θέση του αλλά αν υπάρχουν Κ σημεία αριστερά του και άρα Ν-Κ σημεία δεξιά του, όπου το Κ μπορεί να είναι ένας οποιοσδήποτε φυσικός από 0 έως Ν+1, τότε τα ευθύγραμμα τμήματα που το πε-

ριέχουν είναι Κ(Ν-Κ) το πλήθος. Από τις συνθήκες του προβλήματος έχουμε ότι για κάποιο από τα σημεία ισχύει:
Κ(Ν-Κ)=27 (1).Επισης για κάποιο άλλο σημείο θα ισχύει Λ(Ν-Λ)=35 (2) για φυσικό Ν.
Οι διαιρέτες του 27 είναι 1,3,9,27 άρα οι μόνες εκδοχές για την (1) είναι οι (Κ=1,Ν-Κ=27 και άρα Ν=28) ή (Κ=3,Ν-Κ=9 και άρα Ν=12) ή (Κ=9,Ν-Κ=3 και άρα Ν=12) ή (Κ=27,Ν-Κ=1 και άρα Ν=28).
Ανάλογα ,Οι διαιρέτες του 35 είναι 1,5,7,35 άρα οι μόνες εκδοχές για την (2) είναι οι (Λ=1,Ν-Λ=35 και άρα Ν=36) ή (Λ=5,Ν-Λ=7 και άρα Ν=12) ή (Λ=7,Ν-Λ=5 και άρα Ν=12) ή (Λ=35,Ν-Λ=1 και άρα Ν=36)
Η μόνη κοινή τιμή και στις δυο περιπτώσεις είναι η Ν=12 .Άρα τα σημεία είναι Ν+1=13 .

Α31.Να δείξετε ότι μεταξύ των εξαψήφιων θετικών ακέραιων από το αριθμό 000000 μέχρι τον 999999 το πλήθος αυτών που τα ψηφία τους έχουν άθροισμα 27 είναι το ίδιο με το πλήθος αυτών που το άθροισμα των τριών πρώτων ψηφίων είναι το ίδιο με το άθροισμα των τριών τελευταίων ψηφίων.(*Leningrad Mathematical contest 1989)*

Λύση

Δυο ψηφία τα ονομάζουμε συμπληρωματικά αν έχουν άθροισμα 9 ,για παράδειγμα, το ζεύγος (2,7).Θεωρούμε ένα εξαψήφιο αριθμό που τα ψηφία του έχουν άθροισμα 27 τον $\overline{ΑΒΓΔΕΖ}$.(Α+Β+Γ+Δ+Ε+Ζ=27).Αντικαθιστούμε καθένα από τα 3 ψηφία με το συμπληρωματικό του

$\overline{(9-Α)(9-Β)(9-Γ)ΔΕΖ}$ παρατηρούμε ότι

(9-Α)+(9-Β)+(9-Γ)=27-Α-Β-Γ=Α+Β+Γ+Δ+Ε+Ζ-Α-Β-Γ=Δ+Ε+Ζ ,

δηλαδή ο $\overline{(9-Α)(9-Β)(9-Γ)ΔΕΖ}$ είναι εξαψήφιος που το των τριών πρώτων ψηφίων είναι το ίδιο με το άθροισμα των τριών τελευταίων ψηφίων. Αποκαταστήσαμε μια 1-1 αντιστοιχία μεταξύ των δυο συνόλων οπότε ισχύει το ζητούμενο.

Α32.Ένας δρόμος συνδέει την πόλη Α με την πόλη Β και έχει μήκος 999 χιλιόμετρα. Στις δύο πόλεις αλλά και κατά μήκος τους δρόμου σε κάθε χιλιόμετρο υπάρχουν πινακίδες που δίνουν ταυτόχρονα την απόσταση τόσο από την πόλη Α όσο και από την πόλη Β όπως φαίνεται στο σχήμα.

0/999	1/998	2/997	3/996	……..	998/1	999/0

Πόσες διαφορετικές πινακίδες υπάρχουν με δυο ακριβώς διαφορετικά αριθμητικά ψηφία; *(Australian Mathematics Competition 2018)*

Λύση

Κάθε πινακίδα έχει την μορφή Χ/Υ, θεωρούμε αυτές που αποτελούνται μόνο από δυο διαφορετικά ψηφία. Ισχύει ότι Χ+Υ=999.
Υπάρχουν 10 διαφορετικές επιλογές για το α , το ψηφίο των μονάδων του Χ και το ψηφίο των μονάδων του Υ ορίζεται μονοσήμαντα ως β=9-α (α διαφορετικό του β). Άρα τα ψηφία της πινακίδας είναι α και β.
Το ψηφίο των δεκάδων του Χ θα είναι είτε α είτε β άρα έχουμε 2 επιλογές καθεμία από τις οποίες καθορίζει μοναδικά και το αντίστοιχο ψηφίο των δεκάδων του Υ.Αναλόγως θα έχουμε και για το ψηφίο των εκατοντάδων δυο επιλογές.
Από την πολλαπλασιαστική αρχή προκύπτει:10 x 2 x 2=40 διαφορετικές πινακίδες.

●

2.Ασκήσεις ***(Μεταθέσεις ,κυκλικές μεταθέσεις, διατάξεις,επαναληπτικές διατάξεις)***

Α33.Μια εταιρεία διαθέτει 4 επιστημονες,15 ειδικευμένους εργάτες και 20 ανειδίκευτους. Με πόσους τρόπους μπορεί να συγκροτηθεί μια τριμελής επιτροπής με ένα άτομο από κάθε ομάδα;

Λύση Από την πολλαπλασιαστική αρχή $4\cdot15\cdot20=1200$

Α34.Με πόσους τρόπους μπορούν 5 επιβάτες να καθίσουν σε 5 κενές θέσεις ενός τραίνου;

Λύση Πρόκειται για τις μεταθέσεις 5 στοιχείων άρα $M_5=5!=120$

Α35.i. Με πόσους τρόπους μπορούν να καθίσουν 8 μαθητές γύρω από ένα στρογγυλό τραπέζι.

ii. Με πόσους τρόπους μπορούν να καθίσουν 8 μαθητές γύρω από ένα στρογγυλό τραπέζι σε 8 αριθμημένες θέσεις.

Λύση

i.Πρόκειται για κυκλικές μεταθέσεις 8 στοιχείων άρα $K_8=7!$

ii.Λόγω της αρίθμησης των θέσεων ν πρόκειται για μεταθέσεις 8 στοιχείων άρα $M_8=8!$

Α36.Να βρείτε το πλήθος των διατάξεων των συμβολών ♣,▼,¥,● ανά 2.

Λύση $\Delta_2^4=\dfrac{4!}{2!}=12$

Α37.Σε ένα πρωτάθλημα ποδοσφαίρου κάθε ομάδα δίνει δυο αγώνες με όλες τις υπόλοιπες. Να βρείτε πόσες ομάδες πρέπει να συμμετέχουν στο πρωτάθλημα αν είναι γνωστό ότι πραγματοποιήθηκαν συνολικά 240 αγώνες.

Λύση

Αν συμμετέχουν ν ομάδες τότε οι αγώνες που πραγματοποιήθηκαν είναι

$\Delta_2^\nu=\nu(\nu-1)$ άρα ισχύει η εξίσωση $\nu(\nu-1)=240 \Leftrightarrow \nu=-15$ απορρίπτεται ή $\nu=16$.Άρα πραγματοποιήθηκαν 16 αγώνες.

Α38. Τρεις άνθρωποι έχουν γενέθλια τον Μάρτιο. Να βρείτε με πόσους τρόπους:

i.Οι τρεις έχουν γενέθλια την ίδια μέρα;

ii.Οι τρεις έχουν γενέθλια διαφορετικές μέρες;

Λύση

i.Αν ένας έχει γενέθλια τον Μάρτιο οι άλλοι δυο έχουν γενέθλια την ίδια μέρα άρα έχουμε 31 επιλογές.

ii.Οι επιλογές των τριών διαφορετικών ημερών γέννησης είναι Δ_3^{31}.

Α39.Απο μια τράπουλα 52 φύλλων παίρνουμε διαδοχικά 2 φύλλα χωρίς επανατοποθέτηση.Με πόσους τρόπους μπορεί να γίνει αυτό;Με επανατοποθέτηση ;

Λύση

Χωρίς επανατοποθέτηση $\Delta_2^{52}=\dfrac{52!}{(52-2)!}=2652$ τρόποι, με επανατοποθέτηση τρόποι

$52^2=2704$

Α40.i.Με πόσους τρόπους μπορούμε να τοποθετήσουμε 10 διαφορετικά βιβλία σε ένα ράφι το ένα δίπλα στο άλλο;

ii.Με πόσους τρόπους μπορούμε από 10 βιβλία να πάρουμε τα 5 και να τα τοποθετήσουμε σε ένα ράφι βιβλιοθήκης, το ένα δίπλα στο άλλο;

Λύση
i. Πρόκειται για μεταθέσεις 10 στοιχείων άρα M_{10}=10!=3628800 τρόποι.
ii.Πρόκειται για διατάξεις 10 στοιχείων ανά 5 άρα $\Delta_5^{10} = \frac{10!}{5!} = 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 = 30240$ τρόποι.

Α41.Ποσοι εξαψήφιοι θετικοί ακέραιοι έχουν τουλάχιστον ένα άρτιο ψηφίο.
Λύση
Μετράμε πόσοι είναι οι εξαψήφιοι θετικοί ακέραιοι ,κατόπιν μετράμε πόσοι είναι εξαψήφιοι που έχουν μόνο περιττά ψηφία και αφαιρούμε.Δηλαδή,
900000-15625=884375.

Α42.Από τέσσερεις πόλεις,την Λαμία, το Μεσολόγγι ,το Αγρίνιο και την Θεσσαλονίκη επιλέχτηκαν τρεις μαθηματικοί να εκπροσωπήσουν τις πόλεις τους σε ένα μαθηματικό συνέδριο. Με πόσους τρόπους οι εννέα μαθηματικοί μπορούν να καθίσουν σε μια σειρά καθισμάτων έτσι ώστε οι μαθηματικοί κάθε πόλης να κάθονται μαζί (δίπλα– δίπλα);
Λύση
Ας συμβολίσουμε Λ,Μ,Α και Θ τις τριάδες των μαθηματικών που προέρχονται από την ίδια πόλη, τότε οι Λ,Μ,Α,Θ μπορούν να καθίσουν στην σειρά κατά 4!=24 τρόπους.
Για κάθε όμως τέτοια τοποθέτηση οι μαθηματικοί της τριάδας Λ μπορούν να εναλλάξουν θέσεις με 3!=6 τρόπους .Το ίδιο συμβαίνει και για τους μαθηματικούς των τριάδων Μ,Α,Θ.
Άρα, συνολικά θα υπάρχουν 24(3!·3!·3!· 3!)=31104 τρόποι.

Α43.Με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορούν να ταχτοποιηθούν σε ένα οριζόντιο ράφι 5 βιβλία μαθηματικων,3 βιβλία χημείας και 4 βιβλία φυσικής,
i.Χωρίς κανένα περιορισμό.
ii.Τα βιβλία χημείας να είναι μαζί.
iii. Τα βιβλία κάθε θεματικής ενότητας να είναι μαζί;
Λύση
i. Πρόκειται για μετάθεση 8 διαφορετικών στοιχείων άρα $M_{12} = 12!$
ii.Θεωρούμε τα βιβλία χημείας σαν ένα αντικείμενο άρα έχουμε μεταθέσεις 10 στοιχείων, $M_{10} = 10!3!$
iii.Τα βιβλία μαθηματικών ταχτοποιούνται στην σειρά (μεταθέσεις) κατά 5! τρόπους , τα βιβλία χημείας κατά 3! τρόπους και τα βιβλία φυσικής κατά 4! τρόπους .Οι τρεις θεματικές ενότητες κατά 3! τρόπους.Άρα έχουμε συνολικά 5!3!4!3!=103680 διαφορετικούς τρόπους τακτοποίησης των 12 βιβλίων ώστε να τοποθετηθούν κατά θεματική ενότητα.

Α44.Δυο πόλεις Α και Β αποτελούν τα άκρα μιας σιδηροδρομικής γραμμής με 6 ενδιαμέσους σταθμούς.Πόσα είδη εισιτήριων χρειάζεται να τυπωθούν για να εξυπηρετήσουν αυτό το δίκτυο; (Το τυπωμένο εισιτήριο μιας διαδρομής από το Γ στο Δ είναι διαφορετικό από το τυπωμένο εισιτήριο από το Δ στο Γ)
Λύση Πρόκειται για διατάξεις 8 στοιχείων(οι πόλεις Α,Β και οι 6 ενδιάμεσοι σταθμοί) ανά 2 άρα $\Delta_2^8 = \frac{8!}{6!} = 7 \cdot 8 = 56$ τρόποι

Α45.Οχτω δρόμοι συνδέουν δυο πόλεις Α και Β .Με πόσους τρόπους μπορούμε να ταξιδέψουμε από την πόλη Α στην πόλη Β και να επιστρέψουμε έτσι ώστε να μην χρησιμοποιήσουμε τον ίδιο δρόμο στην επιστροφή;

Λύση Πρόκειται για διατάξεις 8 στοιχείων ανά 2 άρα $\Delta_2^8 = \dfrac{8!}{6!} = 7\cdot 8 = 56$ τρόποι

Α46.Σε πόσες διατάξεις των αριθμών 1,2,3,4,5,6,7,8,9,10 ανά 7 παρουσιάζεται η τριάδα 1,2,3 με αυτήν την σειρά σε τρεις συνεχόμενες θέσεις;
Λύση
Η τριάδα 1,2,3 παρουσιάζεται στην διάταξη των 7 στοιχείων σε τρεις συνεχόμενες θέσεις με 5 τρόπους.

1	2	3				

	1	2	3			

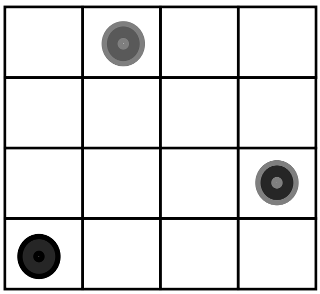
		1	2	3		

			1	2	3	

				1	2	3

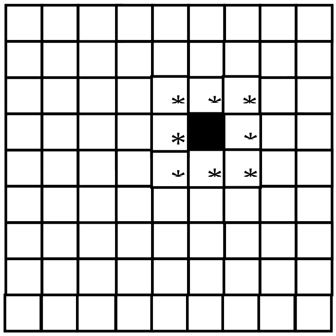
Τα υπόλοιπα 4 στοιχεία της επτάδας επιλέγονται ως διατάξεις των στοιχείων 4,5,6,7,8,9,10 ανά 4 δηλ $\Delta_4^7 = 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7 = 840$ άρα από την πολλαπλασιαστική αρχή το πλήθος των ζητούμενων διατάξεων είναι $5\cdot 840 = 4200$.

Α47. Σε ένα τετραγωνικό πλαίσιο 4x4 ,σε τρία διαφορετικά κελιά, τοποθετούμε τρία διαφορετικά κέρματα. Με πόσους τρόπους μπορούμε να τοποθετήσουμε τα κέρματα έτσι ώστε να μην υπάρχει ζεύγος κερμάτων που βρίσκονται στην ίδια γραμμή ή στην ίδια στήλη;



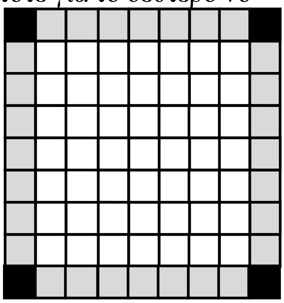
Λύση
Το πρώτο κέρμα μπορεί να τοποθετηθεί οπουδήποτε (16 δυνατές θέσεις) , το δεύτερο κέρμα μπορεί να τοποθετηθεί από τις 15 δυνατές θέσεις σε μόνο 9 (εξαιρούμε τα 6 κελιά στην ίδια γραμμή και στην ίδια στήλη). Τώρα, το τρίτο κέρμα μπορεί να τοποθετηθεί από τα 14 δυνατά κελιά μόνο σε 4 (βγάζουμε τα 6 της γραμμής-στήλης του πρώτου και 4 του δεύτερου, υπάρχουν 2 κοινά).Άρα από την πολλαπλασιαστική αρχή έχουμε: 16*9*4=576 τρόπους τοποθέτησης των τριών διαφορετικών κερμάτων.

Α48. Σε μια ιδιότυπη σκακιέρα 9x9, με πόσους τρόπους μπορούμε να τοποθετήσουμε δυο όμοια νομίσματα, ώστε να βρίσκονται σε τετράγωνα που έχουν κοινή πλευρά ή έστω μια κοινή κορυφή; Παράδειγμα, αν ένα από τα νομίσματα τοποθετηθεί στο μαύρο τετράγωνο , όπως στο διπλανό σχήμα, τότε υπάρχουν 8 διαφορετικές επιλογές για την τοποθέτηση του αλλού νομίσματος στην συγκεκριμένη σκακιέρα.



Λύση

-Αν τοποθετήσουμε το ένα νόμισμα σε γωνιακό κελί (μαύρο) τότε για το δεύτερο νόμισμα έχουμε 3 επιλογές, συνολικά 3*4=12



-Αν τοποθετήσουμε το ένα νόμισμα στα 7 ενδιάμεσα κελιά μεταξύ των δυο γωνιακών κελιών (γκρι κελιά στο σχήμα) τότε για το δεύτερο νόμισμα έχουμε 5 επιλογές, συνολικά 5*4*7=140

-Αν τοποθετήσουμε το ένα νόμισμα στα 49 εσωτερικά κελιά (λευκά κελιά στο σχήμα) τότε για το δεύτερο νόμισμα έχουμε 8 επιλογές συνολικά 49*8=392

Τελικα,12+392+140=544

Α49. Πόσοι είναι οι αναγραμματισμοί της λέξης ΜΠΟΥΦΟΣ;

ii. Πόσοι από αυτούς αρχίζουν με το γράμμα Σ;

iii. Πόσοι με φωνήεν;

iv. Πόσοι με σύμφωνο;

v. Πόσοι από αυτούς δεν έχουν ως τελευταίο γράμμα το Μ;

Λύση

i. Οι αναγραμματισμοί της συγκεκριμένης λέξης είναι επαναληπτικές μεταθέσεις καθώς το γράμμα Ο υπάρχει δυο φορές άρα έχουμε $\frac{7!}{2!}=3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7=2520$ αναγραμματισμούς.

ii. Το πρώτο γράμμα είναι το Μ άρα απομένουν οι αναγραμματισμοί των υπολοίπων 6 γραμμάτων που γίνονται με $\frac{6!}{2!}=3\cdot 4\cdot 5\cdot 6=360$ τρόπους

ii. Η λέξη αποτελείται από 7 γράμματα. Επιλέγουμε ως πρώτο γράμμα ένα φωνήεν.

-Αν επιλεγεί το Ο τότε μένουν 6 διαφορετικά γράμματα άρα έχουμε απλές μεταθέσεις 6 γραμμάτων που γίνονται με 6!=720 τρόπους

-Αν επιλεγεί το Υ τότε μένουν 6 γράμματα από τα οποία το Ο εμφανίζεται δυο φορές άρα έχουμε επαναληπτικές μεταθέσεις 6 γραμμάτων που γίνονται με

$\frac{6!}{2!}=3\cdot 4\cdot 5\cdot 6=360$ τρόπους . Συνολικά έχουμε 720+360=1080 τρόπους .

iii. Αφαιρούμε από τους συνολικούς αναγραμματισμούς αυτούς που αρχίζουν από φωνήεν και έχουμε: 2520-1080=1440 τρόπους.
v. Θα βρούμε πόσοι αναγραμματισμοί τελειώνουν σε Μ και θα αφαιρέσουμε από τους συνολικούς. Εφόσον η τελευταία θέση είναι «κλεισμένη» από το Μ πρόκειται για επαναληπτικές μεταθέσεις των υπολοίπων 6 γραμμάτων, από τα οποία το Ο εμφανίζεται δυο φορές άρα έχουμε $\frac{6!}{2!} = 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6 = 360$ τρόπους για τους οποίους το τελευταίο γράμμα είναι το Μ .Τελικά ζητούμενοι αναγραμματισμοί είναι 2520-360=2160

Α50. Γράφουμε όλους τους αναγραμματισμούς της λέξης ΚΟΥΠΑ σε μια στήλη κατά αλφαβητική σειρά. Ποιο είναι τελευταίο γράμμα του 78° αναγραμματισμού;

Λύση

Οι αναγραμματισμοί είναι όλες οι μεταθέσεις 5 διαφορετικών αντικειμένων άρα έχουμε 5!=120 αναγραμματισμούς. Τους γράφουμε κατά αλφαβητική σειρά και αναζητούμε την 78° αναγραμματισμό .Τους χωρίζουμε σε 5 ομάδες.
-Από 1° μέχρι τον 24° αναγραμματισμό αρχίζουν με το γράμμα Α.
-Από 25° μέχρι τον 48° αναγραμματισμό αρχίζουν με το γράμμα Κ.
-Από 49° μέχρι τον 72° αναγραμματισμό αρχίζουν με το γράμμα Ο.
-Από 73° μέχρι τον 96° αναγραμματισμό αρχίζουν με το γράμμα Π.
-Από 97° μέχρι τον 120° αναγραμματισμό αρχίζουν με το γράμμα Υ.
Εφόσον μας ζητούν τον 78° αναγραμματισμό γνωρίζουμε ότι έχει ως πρώτο γράμμα το Π. Τους αναγραμματισμούς από 73° μέχρι τον 96° τους χωρίζουμε σε 4 ομάδες των 6 άρα,
-Από 73° μέχρι τον 78° αναγραμματισμό αρχίζουν με ΠΑ
-Από 79° μέχρι τον 84° αναγραμματισμό αρχίζουν με ΠΚ
-Από 85° μέχρι τον 90° αναγραμματισμό αρχίζουν με ΠΟ.
-Από 91° μέχρι τον 96° αναγραμματισμό αρχίζουν με ΠΥ
Άρα ο ζητούμενος αναγραμματισμός αρχίζει από ΠΑ γράφουμε με αλφαβητική σειρά όλους τους αναγραμματισμούς από τον 73° μέχρι τον 78° :

ΠΑΚΟΥ,ΠΑΚΥΟ ,ΠΑΟΚΥ,ΠΑΟΥΚ, ΠΑΥΚΟ,ΠΑΥΟΚ

Άρα ο ζητούμενος αναγραμματισμός είναι ο ΠΑΥΟΚ και το τελευταίο γράμμα είναι το γράμμα Κ.

Α51.Με τους αριθμούς 3,4,5,6,7,8 σχηματίζουμε πενταψήφιους αριθμούς με διαφορετικά ψηφία.
i. Πόσοι τέτοιοι αριθμοί υπάρχουν;
ii.Πόσοι από τους αριθμούς είναι πολλαπλάσια του 5
iii. Πόσοι από αυτούς είναι περιττοί;
iv.Σε πόσους από αυτούς τα ψηφία 7 και 8 βρίσκονται σε διπλανές θέσεις ;
v. Πόσοι από αυτούς είναι μικρότεροι του 66000;
vi.Πόσοι από αυτούς είναι πολλαπλάσια του 9;

Λύση

i.Το πλήθος των αριθμών είναι ίσο με τις διατάξεις των 6 ανά 5, άρα

$$\Delta_5^6 = \frac{6!}{(6-5)!} = 6! = 720$$

ii.Για να είναι ένας αριθμός πολλαπλάσιο του 5 πρέπει το τελευταίο του ψηφίο να είναι το 5.Αρα το τελευταίο του ψηφίο επιλέγεται με έναν τρόπο, ενώ τα πρώτα 4 με 5! τρόπους. Οπότε το πλήθος των πολλαπλασίων του 5 είναι $5!\cdot 1=120$ αριθμοί .
iii.Το τελευταίο ψηφίο πρέπει να είναι το 3 ή το 5 ή το 7 (3 τρόποι επιλογής).Τα 4 πρώτα ψηφία επιλέγονται με 5! τρόπους. Άρα υπάρχουν $3\cdot 5!=360$ αριθμοί που είναι περιττοί.
iv.Αν θεωρήσουμε τα ψηφία 7 και 8 ως ένα ψηφίο, έχουμε διατάξεις των 5 ανά 4,δηλαδη υπάρχουν $\Delta_4^5=\dfrac{5!}{(5-4)!}=120$ αριθμοί. Επειδή τα ψηφία 7 και 8 μπορούν να τοποθετηθούν με 2 τρόπους, έχουμε: $2\cdot 120=240$ αριθμούς.
v.Ένας από τους πενταψήφιους αριθμούς είναι μικρότερος του 66000 αν έχει πρώτο ψηφίο 3,4,5 ή αν έχει πρώτο ψηφίο το 6 και δεύτερο ψηφίο ένα από τα 3,4 και 5.
Αριθμοί με 1° ψηφίο το 3 ή 4 ή 5 : $3\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2=360$ αριθμοί.
Αριθμοί με 1° ψηφίο το 6 και δεύτερο ψηφίο ένα από τα 3,4 και 5: $1\cdot3\cdot5\cdot4\cdot3=72$ αριθμοί.Συνολικά είναι $360 + 72=432$ αριθμοί.
vi. Ένας αριθμός είναι πολλαπλάσιο του 9 αν και μόνο αν το άθροισμα των ψηφίων του είναι πολλαπλάσιο του 9, όμως καθένας από τους πενταψήφιους με διαφορετικά ψηφία 3,4,5,6,7,8 έχει άθροισμα ψηφίων $3+4+5+6+7+8 =33-\lambda$, όπου $\lambda=3,4,5,6,7,8$ και είναι πολλαπλάσιο του 9 ,μόνο για $\lambda=6$ άρα οι ζητούμενοι αριθμοί σχηματίζονται από του αριθμούς 3,4,5,7,8 και το πληθος τους είναι 5!.

Α52.Ο Παπαδόπουλος διαθέτει 10 διαφορετικά κλειδιά, από τα οποία μόνο το ένα ταιριάζει στο συρτάρι του γραφείου του, όμως δεν γνωρίζει ποιο είναι αυτό. Κάνει λοιπόν το αυτονόητο,δοκιμάζει τα κλειδιά το ένα μετά το άλλο μέχρι να ξεκλειδώσει το συρτάρι.Με πόσους τρόπους μπορεί να τα καταφέρει αν:
i. το συρτάρι ανοίξει στην $7^η$ δόκιμη.
ii.το συρτάρι ανοίξει μέχρι την $6^η$ δόκιμη.
iii. το συρτάρι να ανοίξει με την τελευταία δοκιμή
Λύση
i Εφόσον το σωστό κλειδί θα μπει στην $7^η$ δοκιμή, οι υπόλοιπες αποτυχημένες δόκιμες είναι μια διατεταγμένη εξάδα κλειδιών από το σύνολο των 10 κλειδιών που απομένουν.Συνεπώς,το ζητούμενο πλήθος τρόπων ισούται με το πλήθος των διατάξεων Δ_6^9.
ii.Το συρτάρι μπορεί να ανοίξει είτε με την $1^η$ δοκιμή, είτε με την $2^η$,…είτε με την $6^η$ δοκιμή. Άρα από το ερώτημα (i) ,αυτό είναι δυνατό να πραγματοποιηθεί με :

$$1+\Delta_1^9+\Delta_2^9+\ldots+\Delta_5^9$$ τρόπους *(Κάνετε τις πράξεις μόνοι σας ☺)*

iii. Το ερώτημα αφόρα με πόσους τρόπους ο Παπαδόπουλος μπορεί να βρει το σωστό κλειδί με την τελευταία δοκιμή. Άρα θα έχει δοκιμάσει 9 κλειδιά, μετά γνωρίζει το σωστό. Άρα έχουμε αριθμό τρόπων ίσο με τις μεταθέσεις 9 κλειδιών, στο 10° το βρίσκει.Το πλήθος των διαφορετικών τρόπων είναι $9!=362880$.

Α53. Να βρείτε το πλήθος των οκταψήφιων θετικών ακεραίων που σχηματίζονται από τα ψηφία 0,1,2,3,…,9 χωρίς επανάληψη των ψηφίων και είναι πολλαπλάσια του 9 .
Λύση
Ένας φυσικός αριθμός είναι πολλαπλάσιο του 9 αν το άθροισμα των ψηφίων του είναι πολλαπλάσιο του 9. Ο οκταψήφιος αριθμός σχηματίζεται με επιλογή 8 ψηφίων από τα

0,1,2,3,4,5,6,7,8,9 .Τα οποία έχουν άθροισμα 45 πολλαπλάσιο του 9, θα παραλείψουμε δυο ψηφία στις επιλογές μας και πρέπει το άθροισμα να εξακολουθεί να παραμένει πολλαπλάσιο του 9, δηλαδή ,πρέπει να αφαιρέσουμε από το 45 πολλαπλάσιο του 9, αυτό γίνεται παραλείποντας τα ζεύγη: (1,8),(2,7),(3,6),(4,5),(0,9)
-Αν παραλείψουμε τα ψηφία 0,9 τότε σχηματίζεται ο αριθμός (μετάθεση 8 στοιχείων) με 8! τρόπους.
-Αν παραλείψουμε τα υπόλοιπα ζεύγη τότε σχηματίζεται ο αριθμός με 7! τρόπους (θυμηθείτε δεν ,μπορούμε να βάλουμε το 0 ως πρώτο ψηφίο).
Άρα από την προσθετική αρχή έχουμε συνολικά 8!+7!+7!+7!+7!=8+4·7!=36·7! τρόπους.

Α54. *Να αποδείξετε ότι το πλήθος των οκταψηφίων αριθμών με όλα τα ψηφία τους άρτια ή περιττά είναι αριθμός περιττός.
Λύση
Το πλήθος των οκταψηφίων με όλα τα ψηφία περιττά είναι 5^8.Το πλήθος των οκταψηφίων με όλα τα ψηφία άρτια είναι $4\cdot 5^7$, επειδή το 0 δεν μπορεί να αποτελεί το πρώτο από αριστερά ψηφίο των οκταψηφίων. Συνεπώς, έχουμε συνολικά $5^8+4\cdot 5^7=5^7(5+4)=9\cdot 5^7$ που είναι περιττός.

Α55. Ο Γιάννης έχει 15 φίλους.Με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορεί να τους προσκαλέσει σε δείπνο;
Λύση Μια πρώτη σκέψη είναι ότι ο Γιάννης μπορεί να καλέσει 1 ή 2 ή 3 ή 4 ή,…,ή 15 άτομα δηλαδή 1+2+3+…+15=120 περιπτώσεις. Είναι λάθος όμως οι φίλοι του Γιάννη είναι διαφορετικά πρόσωπα. Θεωρούμε τους φίλους του Γιάννη ως μια διατεταγμένη 15-αδα από 0 και 1 , όπου 1 σημαίνει ότι καλεί τον συγκεκριμένο φίλο γα δείπνο και 0 ότι δεν τον καλεί. Για παράδειγμα, η 15-αδα (0,0,1,1,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,1) σημαίνει ότι καλεί τον 3^{ο},τον 4^{ο} και τον 15^{ο} φίλο του αλλά όχι τους υπολοίπους. Τώρα, πρέπει να απαριθμήσουμε τις 15αδες, είναι 2^{15}-1,(εξαιρούμε την 15-αδα (0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0) δεν καλεί κανέναν φίλο)

Α56. Σε μια ουρά στο ταμείο για την αγορά του νέου βιβλίου του μεταμοντέρνου ποιητή Πότη Μούτα περιμένουν 20 άτομα. Μεταξύ αυτών, ο Μάκης και ο Τάκης.
i.Με πόσους τρόπους ο Μάκης και ο Τάκης είναι δυνατό να βρίσκονται σε γειτονικές θέσεις;
ii.Με πόσους τρόπους ο Μάκης προηγείται του Τάκη στην ουρά και όχι απαραίτητα μόνο μια θέση;
Λύση
i.Ο Μάκης (Μ) και ο Τάκης (Τ) είναι δυνατόν σαν περιμένουν ο ένας πίσω από τον άλλο με 2 τρόπους (ΜΤ,ΤΜ) .Τους θεωρούμε ως ένα πρόσωπο (!) στην ουρά. Γνωρίζουμε ότι περιμένουν ακόμα 18 άτομα , όλοι μαζί 19 άτομα είναι δυνατό να τοποθετηθούν στην ουρά με 19! τρόπους. (μεταθέσεις 19 αντικειμένων). Από την πολλαπλασιαστική αρχή έχουμε: 2*19! τρόπους.
ii.Οι συνολικές μεταθέσεις της ουράς των 20 ατόμων είναι 20!Θεωρουμε μια μετάθεση **καλή** αν ο Τάκης προηγείται του Μάκη, μετάθεση **κακή** αν ο Μάκης προηγείται του Τάκη .Θεωρούμε μια καλή μετάθεση και ανταλλάσουν θέσεις ο Μάκης με τον Τάκη συνεπώς προκύπτει μια **κακή** μετάθεση. Ισχύει και αντίστροφα. Έχουμε λοιπόν μια 1-1 αντιστοιχία του συνόλου των κάλων μεταθέσεων με το σύνολο των **κακών** μεταθέσε-

ων. Αύτη η 1-1 αντιστοιχία μεταξύ καλών και κακών συνεπάγεται ότι το πλήθος των καλών και των κακών μεταθέσεων είναι το ίδιο. Άρα το ζητούμενο πλήθος είναι 20!/2

Άλλος τρόπος.

Θεωρούμε τις 20 θέσεις αριθμημένες από τα αριστερά προς τα δεξιά .

Αν ο Μάκης καταλάβει την θέση 1, τότε για τον Μάκη υπάρχουν 19 τρόποι τοποθέτησης για τα υπόλοιπα 18 άτομα υπάρχουν 18! τρόποι. ($1\cdot 19\cdot 18!$ τρόποι)

Αν ο Μάκης καταλάβει την θέση 2, τότε για τον Μάκη υπάρχουν 18 τρόποι τοποθέτησης για τα υπόλοιπα 17 άτομα υπάρχουν 18! τρόποι. ($1\cdot 18\cdot 18!$ τρόποι)

…………………………

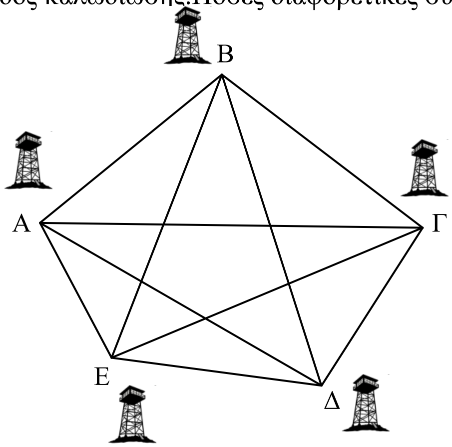
Αν ο Μάκης καταλάβει την θέση 19, τότε για τον Μάκη υπάρχουν 1 τρόπος τοποθέτησης για τα υπόλοιπα 17 άτομα υπάρχουν 18! τρόποι. ($1\cdot 1\cdot 18!$ τρόποι)

Από την προσθετική αρχή:

$$1\cdot 19\cdot 18! + 1\cdot 18\cdot 18! + \ldots + 1\cdot 1\cdot 18! = (19+18+\ldots+2+1)18! = 18!\frac{19\cdot 20}{2} = \frac{20!}{2}$$

(Ισχύει: $1+2+3+4+\ldots+(\nu-1)+\nu = \dfrac{\nu\cdot(\nu+1)}{2}$ $,\nu\in\mathbb{N}$)

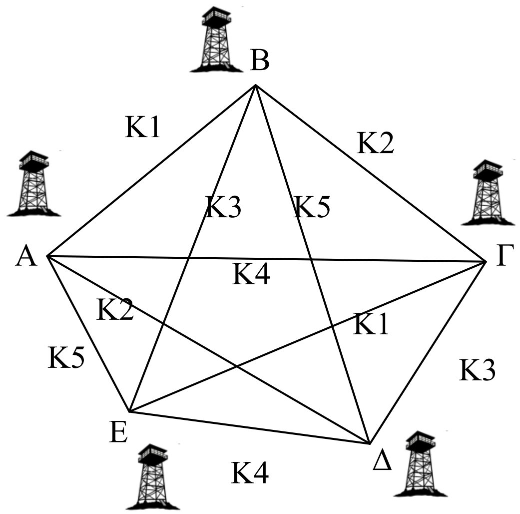
Α57. Πέντε παρατηρητήρια (Α,Β,Γ,Δ,Ε) σε ένα δάσος πρέπει να συνδεθούν - ανά δυο- ενσύρματα με μια γραμμή τηλεφώνου (σχήμα). Διαθέτουμε 5 διαφορετικά είδη καλωδίωσης (Κ1,Κ2,Κ3,Κ4,Κ5).Κάθε παρατηρητήριο συνδέεται με το άλλο μόνο με ένα είδος καλωδίωσης. Για να γίνει η σύνδεση χωρίς παράσιτα στην επικοινωνία είναι απαραίτητο κάθε τριάδα παρατηρητηρίων να συνδέεται (ανά δυο παρατηρητήρια) να έχει διαφορετικό είδος καλωδίωσης.Πόσες διαφορετικές συνδέσεις υπάρχουν;



Λύση

Τοποθετούμε αρχικά στις πλευρές ΑΒ,ΒΓ,ΓΔ,ΔΕ,ΕΑ καλωδιώσεις Κ1,Κ2,Κ3,Κ4,Κ5.Απο εκεί και πέρα η υπόλοιπες συνδέσεις είναι μονόδρομος.

Η καλωδίωση της σύνδεσης ΒΕ μπορεί να είναι μόνο Κ3 σύμφωνα με τους περιορισμούς του προβλήματος. Η σύνδεση ΒΔ έχει καλωδίωση Κ5.Η σύνδεση ΑΓ έχει καλωδίωση Κ4, η σύνδεση ΓΕ έχει καλωδίωση Κ1, η σύνδεση ΑΔ έχει καλωδίωση Κ2.Αρα το πλήθος των λύσεων εξαρτάται από την αρχική τοποθέτηση των Κ1,Κ2,Κ3,Κ4,Κ5 στις πλευρές του πενταγώνου και αυτό μπορεί να γίνει με 5!=120 τρόπους.



Α58. Να βρείτε το πλήθος των αναγραμματισμών της λέξης ΚΑΝΕΝΑ στις οποίες δεν εμφανίζονται δυο όμοια γράμματα σε διπλανές θέσεις.

Λύση

Έστω Α το πλήθος των αναγραμματισμών που έχουμε δυο Α σε διπλανές θέσεις και Β το σύνολο των αναγραμματισμών που έχουμε δυο Ν σε διπλανές θέσεις .

Έχουμε $|A| = |B| = \frac{5!}{2!} = 60$.Επίσης $|A \cap B| = 4! = 24$.Από την αρχή εγκλεισμού- αποκλεισμού έχουμε $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| = 60 + 60 - 24 = 96$

Επειδή το πλήθος όλων των αναγραμματισμών ισούται με $\frac{6!}{2!2!} = 180$,το ζητούμενο πλήθος ισούται με 180-96=84.

Α59.Στο βιβλίο του διακεκριμένου μαθηματικού του προηγούμενου αιώνα Γ.Κ. Χάρντι, *Η απολογία ενός μαθηματικού*,ο Χάρντι διηγείται μια ιστορία από τις επισκέψεις του στο νοσοκομείο του Putney, όπου νοσηλευόταν ο Ραμανουτζάν και βρισκόμενος όπως πάντα σε αμηχανία για το πώς θα ξεκινήσει τη συζήτηση είπε:

«Νομίζω ότι αριθμός κυκλοφορίας του ταξί που με έφερε ήταν 1729.Μου φάνηκε πολύ αδιάφορος αριθμός».

Για να λάβει την απάντηση από τον Ραμανουτζάν:

«*Οχι, Χάρντι, όχι !Είναι πολύ ενδιαφέρων αριθμός, είναι ο μικρότερος αριθμός που μπορεί να γραφεί ως άθροισμα δύο κύβων με δύο διαφορετικούς τρόπους.»*

Πραγματικά,ο αριθμός 1729 γράφεται:

$$1729 = 1^3 + 12^3 = 9^3 + 10^3$$

Αν θεωρήσουμε όλους τους τετραψήφιους αριθμούς που σχηματίζονται με χρήση των ψηφίων 1,7,2,9 χωρίς να επαναλαμβάνεται κανένα από αυτά τα ψηφία.

i.Πόσοι τέτοιοι αριθμοί υπάρχουν;

ii.Ποιο είναι το άθροισμα τους;

Λύση

i.Πρόκειται για το πλήθος των διατάξεων τεσσάρων διαφορετικών ψηφίων: 4!=24

ii. Παρατηρούμε ότι οι τετραψήφιοι αριθμοί του προβλήματος που έχουν ένα ψηφίο στο τέλος, για παράδειγμα το 9 είναι όσοι και οι μεταθέσεις των τριών άλλων ψηφίων (1,7 και 2), δηλαδή 3!=6 άρα θα δώσουν άθροισμα μονάδων 6·9=54.Ομοίως,οι αριθμοί που έχουν το 9 ως ψηφίο δεκάδων θα είναι όσοι και οι μεταθέσεις των τριών άλλων ψηφίων (1,7 και 2), δηλαδή 3!=6 άρα θα δώσουν άθροισμα δεκάδων 6·90=5400.Ομοιως, προκύπτει ότι οι αριθμοί που έχουν το 9 ως ψηφίο εκατοντάδων θα δώσουν άθροισμα εκατοντάδων 6·900=5400 και τέλος οι αριθμοί που έχουν το 9 ως ψηφίο χιλιάδων θα δώσουν άθροισμα χιλιάδων 6·9000=54000.

Συνεπώς το άθροισμα όλων των παραπάνω αριθμών θα είναι

54+540+5400+54000=59994

Κάνουμε το ίδιο για τα ψηφία 1,7, και 2 και λαμβάνουμε τα αθροίσματα:

42+420+4200+42000=46662

6+60+600+6000=6666

12+120+1200+12000=13332

Έτσι, το άθροισμα των 24 αριθμών είναι: 59994+46662+6666+13332=126.654

A60. Ο Πλάτωνας στην *Πολιτεία* αναφέρει ένα μυθικό αντικείμενο ,το *Δαχτυλίδι του Γύγη* που έδινε στον ιδιοκτήτη του την ικανότητα να γίνεται αόρατος με τη θέλησή του. Αυτό είναι γνωστό ,αυτό που δεν είναι γνωστό είναι ότι δεν ήταν ένα το δακτυλίδι αλλά έξι διαφορετικά και έπρεπε-σύμφωνα με τον μύθο- να φορεθούν σε τουλάχιστον ένα δάκτυλο του αριστερού χεριού πλην του αντίχειρα. Με πόσους τρόπους μπορεί να γίνει αυτό;

Λύση

Χρησιμοποιούμε τέχνασμα(«Stars and bars») .Ανάμεσα στα 6 δακτυλίδια τοποθετούμε με τυχαίο τρόπο 3 χωρίσματα-ανάμεσα σε 4 δάκτυλα υπάρχουν τρία χωρίσματα-θεωρούμε τώρα ότι έχουμε 9 αντικείμενα να αναδιατάξουμε άρα οι ζητούμενοι τρόποι

είναι $\Delta_6^9 = \dfrac{9!}{3!} = 60480$

Εναλλακτικά.

Ανάμεσα στα 6 δακτυλίδια τοποθετούμε με τυχαίο τρόπο 3 χωρίσματα-ανάμεσα σε 4 δάκτυλα υπάρχουν τρία χωρίσματα-θεωρούμε τώρα ότι έχουμε 9 αντικείμενα . Συμβολίζουμε τα δακτυλίδια Α,Β,Γ,Δ,Ε και Ο,Ο,Ο τα τρία χωρίσματα. Μια τοποθέτηση θα ήταν για παράδειγμα: ΑΟΒΓΟΟΔΕΖ .Δηλαδή, το Α στο 1° δάκτυλο , τα Β,Γ στο 2° δάκτυλο και τα Δ,Ε,Ζ στο 4° δάκτυλο, άρα αναζητούμε όλους τους αναγραμματισμούς των 9 γραμμάτων την παραπάνω λέξης με το Ο να υπάρχει 3 φορές ,δηλαδή

$\dfrac{9!}{3!} = 60480$.

Α61. Μια παρέα 5 αγοριών και 4 κοριτσιών τοποθετείται σε ένα στρογγυλό τραπέζι με την προϋπόθεση δυο κορίτσια να μην βρίσκονται σε διπλανές θέσεις.
i.Με πόσους τρόπους μπορεί να γίνει αυτό;
ii.Αν έχουμε α αγόρια και β κορίτσια;
iii.Αν τα 9 παιδιά τοποθετούνται σε ευθεία γραμμή πως λύνεται το ίδιο πρόβλημα.
Λύση
i.Τοποθετούμε τα 5 αγόρια στον κυκλικό τραπέζι και παρεμβάλουμε ανάμεσα στα 4 κορίτσια. Γνωρίζουμε ότι το πλήθος των κυκλικών μεταθέσεων 5 αντικειμένων είναι (5-1)!=4!.Αυτες οι διαφορετικές τοποθετήσεις των αγοριών σε κύκλο δημιουργούν 5 κενά για να τοποθετηθούν τα κορίτσια με Δ_4^5 τρόπους. Άρα το πλήθος των τοποθετήσεων είναι $5!4!=3600$
ii.Αν έχουμε β κορίτσια και α αγόρια πρέπει $\beta \leq \alpha+1$ αλλιώς το πρόβλημα δεν μπορεί να λυθεί. Με όμοιο συλλογισμό όπως στο ερώτημα (i) έχουμε (α-1)! μεταθέσεις για τα αγόρια και Δ_β^α για τα κορίτσια.

Άρα ο συνολικός αριθμός των περιπτώσεων είναι $(\alpha-1)!\cdot\dfrac{\alpha!}{(\alpha-\beta)!}$

iii.Σε τοποθέτηση σε ευθεία γραμμή , ο αριθμός των μεταθέσεων είναι $5!\cdot\Delta_4^5$ αφού έχουμε 6 κενά. Ο γενικός τύπος για την περίπτωση αυτή είναι $\alpha!\cdot\Delta_\beta^{\alpha+1}$

Α62. Σε ένα δρόμο υπάρχουν ν σπίτια αριθμημένα από το 1 έως το ν. Τα σπίτια με περιττό αριθμό βρίσκονται στην μια πλευρά και τα σπίτια με άρτια στην άλλη.Ένας ταχυδρόμος θέλει να παραδώσει από μια εφημερίδα σε κάθε σπίτι. Με πόσους τρόπους μπορεί να το κάνει αν θέλει να παραδίδει τις γράμματα εναλλάξ από την μια πλευρά στην άλλη,αν:
i.ν=20 ii. ν=21
Λύση
Θα αποδείξουμε την γενική περίπτωση.
● Αν ο ν είναι άρτιος, έστω ν=2λ, τότε ο ταχυδρόμος επιλέγει μια πλευρά του δρόμου για να ξεκινήσει με δυο τρόπους. Σε κάθε πλευρά υπάρχουν λ! διαφορετικοί τρόποι για να αποφασίσει με ποια σειρά θα ρίξει τα γράμματα σε αυτήν την πλευρά. Όποτε υπάρχουν $2(\lambda!)^2$ τρόποι.
● Αν ο ν είναι περιττός ,έστω ν=2λ+1, τότε αναγκαστικά ο ταχυδρόμος πρέπει να ξεκινήσει από την πλευρά με τα λ+1 σπίτια. Όπως προηγουμένως μπορεί να το κάνει με λ!(λ+1)! τρόπους.
Συνεπώς η απάντηση είναι για ν=20 έχουμε $2(10!)^2$ τρόπους και για ν=21 έχουμε 10!11! τρόπους.
Α63. Ένας εννιαψήφιος θετικός ακέραιος αριθμός που αποτελείται από τα ψηφία 1 έως 9 (κάθε ψηφίο έχει χρησιμοποιηθεί ακριβώς μια φορά) ονομάζεται «πολυπράγμων».Έστω εννέα (όχι κατά ανάγκη διαφορετικοί) πολυπράγμονες αριθμοί. Ποιος είναι μέγιστος δυνατός αριθμός από μηδενικά που μπορεί να τελειώνει το άθροισμα τους; *(kvant magazine)*
Λύση
Η απάντηση είναι 8 μηδενικά! Εφόσον

8*987654321+198765432=8100000000

Η απάντηση είναι **τουλάχιστον** 8 μηδενικά. Μπορεί το άθροισμα μας να έχει 9 μηδενικά;

Η μέγιστη τιμή του αθροίσματος μπορεί να είναι: 9*987654321=8888888889.Τώρα κάθε αριθμός τα ψηφία του οποίου είναι μετάθεση των αριθμών 1,..,9 είναι πολλαπλάσιο του 9,εφοσον το άθροισμα των ψηφίων τους είναι πολλαπλάσιο του 9.Άρα και το άθροισμα των 9 αριθμών είναι πολλαπλάσιο του 9.Αλλα ο μόνος δεκαψήφιος αριθμός που τελειώνει σε 9 μηδενικά και είναι πολλαπλάσιο του 9 είναι ο 9000000000 και προφανώς είναι μεγαλύτερος από τον μεγαλύτερο μας άθροισμα. Άρα ο μέγιστος αριθμός είναι 8 μηδενικά!



Όταν ένας μαθητής κάνει ανόητα και πολύ σοβαρά λάθη ή είναι απελπιστικά αργός,το πρόβλημα είναι συνήθως το ίδιο,δεν έχει καμία διάθεση να λύσει το πρόβλημα,ούτε καν να το αντιληφτεί σωστά και συνεπώς δεν το έχει καταλάβει.Άρα ένας δάσκαλος,που επιθυμεί σοβαρά να βοηθήσει τον μαθητή,θα πρέπει,πρώτα από όλα,να κεντρίσει την περιέργεια του μαθητή,να του δημιουργήσει κάποιο ενδιαφέρον να λύσει το πρόβλημα.Ο δάσκαλος θα πρέπει επίσης να δώσει κάποιο χρόνο στον μαθητή να πάρει μια απόφαση, να αφοσιωθεί στο καθήκον του.Η διδασκαλία της επίλυσης προβλημάτων είναι μια καλλιέργεια της θέλησης.Λύνοντας προβλήματα,που δεν είναι τόσο εύκολα για αυτόν,ο μαθητής μαθαίνει να επιμένει ακόμα και μετά από αποτυχίες,να εκτιμά μια μικρή πρόοδο,να περιμένει την κρίσιμη ιδέα,να συγκεντρώσει όλες του τις δυνάμεις,όταν η ιδέα αυτή εμφανιστεί.Αν ο μαθητής δεν είχε την ευκαιρία στο σχολείο να δοκιμάσει τα ποικίλα συναισθήματα της προσπάθειας για την λύση, αυτό σημαίνει πως η μαθηματική του εκπαίδευση απέτυχε στο πιο βασικό σημείο.

G Polya, «Πώς να το λύσω»

3.Ασκήσεις (Συνδυασμοί, συνδυασμοί με επανάληψη ,αρχή της διπλής μέτρησης)

Α64. Σε ένα τηλεπαιχνίδι, για να κερδίσει ο Μήτσος πρέπει να απαντήσει σε 5 από τις 8 ερωτήσεις που θα του τεθούν.Με πόσους τρόπους μπορεί να επιτύχει το στόχο του;

Λύση

Επειδή δεν έχει σημασία η σειρά με την οποία θα απαντήσει έχει $\binom{8}{5}$ επιλογές, έτσι

$$\binom{8}{5}=\frac{8!}{5!\cdot(8-5)!}=\frac{8!}{5!\cdot 3!}=\frac{6\cdot 7\cdot 8}{6}=56 \text{ τρόποι.}$$

Α65.Σε ένα τουρνουά σκακιού παίρνουν μέρος 30 παίκτες.Κάθε παίκτης πρέπει να παίζει μόνο μια φορά με κάθε άλλον. Πόσοι αγώνες θα γίνουν;

Λύση

Θα γίνουν τόσοι αγώνες όσοι και τα διαφορετικά ζευγάρια που μπορούμε να σχηματίσουμε με 30 παίκτες δηλαδή $\binom{30}{2}=\frac{30!}{2!(30-2)!}=435$.

A66.Με πόσους τρόπους 12 άνθρωποι μπορούν να χωριστούν σε δυο ομάδες μια των 8 και μια των 4;

Λύση

Μπορούμε να επιλέξουμε 8 άτομα της μιας ομάδας με $\binom{12}{8}$ τρόπους και τα άλλα 4 με ένα τρόπο (μόνο αυτά μένουν) $\binom{12}{8}=\dfrac{12!}{8!(2-4)!}=495$ τρόπους

A67. Ένα κουτί περιέχει 3 άσπρες ,6 μαύρες και 30 κόκκινες σφαίρες ,οι οποίες είναι όλες αριθμημένες με διαφορετική αρίθμηση.

i.Με πόσους τρόπους μπορούμε να επιλέξουμε τυχαία μια άσπρη, δυο μαύρες και δέκα κόκκινες σφαίρες;

ii.Με πόσους τρόπους μπορούμε να κάνουμε τις ίδιες επιλογές ,άμα πρέπει να έχουμε επιλέξει μια συγκεκριμένη άσπρη σφαίρα, μια συγκεκριμένη μαύρη σφαίρα και δυο συγκεκριμένες κόκκινε; σφαίρες;

Λύση

i. $\binom{3}{1}\cdot\binom{6}{2}\cdot\binom{30}{10}$ ii. $\binom{5}{1}\cdot\binom{28}{8}$

A68.Σε μια βιοτεχνία εργάζονται 6 άντρες και 5 γυναίκες.Μια ομάδα εργαζομένων της βιοτεχνίας θα πάρει μέρος σε ένα σεμινάριο. Με πόσους τρόπους μπορεί να επιλεγεί η ομάδα αν αποτελείται από:

i. 4 άντρες και 2 γυναίκες,

ii. 2 άντρες και 1 γυναίκα,

iii. 4 άνδρες

Λύση

i.Στην πρώτη φάση επιλέγουμε τους άνδρες, δεν μας ενδιαφέρει η σειρά των ατόμων της επιτροπής άρα έχουμε συνδυασμούς των 6 ανά 4.Αυτό μπορεί να γίνει με $\binom{6}{4}=15$ τρόπους.

Στην δεύτερη φάση επιλέγουμε τις γυναίκες.Αυτό μπορεί να γίνει με $\binom{5}{2}=10$ τρόπους. Συνολικά έχουμε $\binom{6}{4}\cdot\binom{5}{2}=150$ τρόπους.

ii. Ανάλογα προκύπτει $\binom{6}{2}\cdot\binom{5}{1}=75$ τρόπους.

iii. Ομοίως έχουμε $\binom{6}{4}=15$ τρόπους.

Α69.Στην βιοτεχνία της προηγούμενης άσκησης εξακολουθούν να εργάζονται 6 άνδρες και 5 γυναίκες. Μια τετραμελής ομάδα εργαζομένων θα πάρει άδεια.Με πόσους τρόπους μπορεί να επιλεγεί η ομάδα αν αποτελείται από,

i. 3 τουλάχιστον άντρες,

ii. το πολύ μια γυναίκα ,

iii. εκπρόσωπους και των δυο φύλων,

iv. το μεγαλύτερο σε χρόνια προϋπηρεσίας άνδρα ή την μεγαλύτερη σε χρόνια προϋπηρεσίας γυναίκα (ή και τους δυο)

Θεωρούμε ότι τα χρόνια προϋπηρεσίας των 11 εργαζομένων είναι διαφορετικοί αριθμοί.

Λύση

i.Διακρίνουμε 4 περιπτώσεις.

● Με τρεις ακριβώς άνδρες (άρα και μια ακριβώς γυναίκα) έχουμε

$\binom{6}{3}\cdot\binom{5}{1}=20\cdot 5=100$ τρόπους.

● Με τέσσερεις ακριβώς ανδρες (άρα με καμία γυμαίκα) έχουμε $\binom{6}{4}=15$ τρόπους .

Συνολικά έχουμε 100+15=115 τρόπους.

ii.Παρατηρούμε ότι ουσιαστικά πρόκειται για το ερώτημα (i) οπότε πάλι έχουμε 115 τρόπους.

iii. Με 1 άνδρα και 3 γυναίκες έχουμε $\binom{6}{1}\cdot\binom{5}{3}=60$ τρόπους

Με 2 άνδρες και 2 γυναίκες έχουμε $\binom{6}{2}\cdot\binom{5}{2}=150$ τρόπους

Με 3 άνδρες και 1 γυναίκα έχουμε $\binom{6}{3}\cdot\binom{5}{1}=100$ τρόπους

Συνολικά έχουμε 60+150+100=310 τρόπους.

iv. Οι ομάδες που περιέχουν τον μεγαλύτερο σε χρόνια προϋπηρεσίας άνδρα αλλά όχι και την μεγαλύτερη σε χρόνια προϋπηρεσίας γυναίκα είναι $\binom{9}{3}=84$ (από τους υπολοίπους 9 εκλέγουμε τους 3).

Οι ομάδες που περιέχουν την μεγαλύτερη σε χρόνια προϋπηρεσίας γυναίκα αλλά όχι και τον μεγαλύτερο σε χρόνια προϋπηρεσίας άνδρα είναι $\binom{9}{3}=84$.

Οι ομάδες που περιέχουν και την μεγαλύτερη σε χρόνια προϋπηρεσίας γυναίκα αλλά και τον μεγαλύτερο σε χρόνια προϋπηρεσίας άνδρα είναι $\binom{9}{2}=36$. Συνολικά, έχουμε 84+84+36=204 τέτοιες ομάδες.

Α70. Σε μια δραματική σχόλη αποφοιτούν 15 ηθοποιοί εκ των οποίων οι 11 γνωρίζουν χορό. Με πόσους τρόπους μπορούμε να επιλέξουμε 5 ηθοποιούς από τους 15 για να συμμετάσχουν σε ένα θίασο:

i. χωρίς κανένα περιορισμό,
ii. και οι 5 να γνωρίζουν χορό,
iii 2 ακριβώς ηθοποιοί να μην γνωρίζουν χορό,
iv. 4 τουλάχιστον ηθοποιοί να γνωρίζουν χορό.

Λύση

i. $\binom{15}{5}$,ii. $\binom{11}{5}$,iii. $\binom{4}{2}\cdot\binom{11}{3}$,iv. $\binom{11}{4}\cdot\binom{4}{1}+\binom{11}{5}$

Α71.Ο Μήτσος διαθέτει ζαχαροπλαστείο και πουλάει χωνάκι παγωτό έξω από το γήπεδο, το κατάστημα του διαθέτει 20 διαφορετικές γεύσεις και το γήπεδο χωρητικότητα 15000 θεατών. Τον ρώτησαν πόσα διαφορετικά χωνάκια παγωτό με πέντε διαφορετικές γεύσεις μπορεί να φτιάξει; Αυτός απάντησε, ότι θα μπορούσε στον αγώνα της Κυριακής στο γεμάτο από φιλάθλους γήπεδο να δώσει από ένα διαφορετικό παγωτό σε κάθε φίλαθλο. Έχει δίκιο;

Λύση Πρόκειται για συνδυασμούς των 20 ανά 5, οπότε έχουμε $\binom{20}{5}=15504$ διαφορετικά χωνάκια παγωτό με 5 γεύσεις.Άρα, ο Μήτσος έχει δίκιο!

Α72.Ο Μήτσος διαθέτει 4 σταθμά με βάρη 1 g, 2g, 4 g, 8 g. Να βρείτε το πλήθος όλων των διαφορετικών βαρών που μπορεί να σχηματίσει χρησιμοποιώντας (ένα τουλάχιστον) τα πιο πάνω σταθμά.

Λύση

● Αν χρησιμοποιήσει μόνο 1 από τα σταθμά ,έχουμε $\binom{4}{1}$ διαφορετικά βάρη.

● Αν χρησιμοποιήσει μόνο 2 από τα σταθμά ,έχουμε $\binom{4}{2}$ διαφορετικά βάρη.

● Αν χρησιμοποιήσει μόνο 3 από τα σταθμά ,έχουμε $\binom{4}{3}$ διαφορετικά βάρη.

● Αν χρησιμοποιήσει 4 από τα σταθμά ,έχουμε $\binom{4}{4}$ διαφορετικά βάρη.

Τελικά, $\binom{4}{1}+\binom{4}{2}+\binom{4}{3}+\binom{4}{4}=15$ διαφορετικά βάρη.

Α73.Δίνονται δυο παράλληλες ευθείες $\varepsilon_1,\varepsilon_2$.Στην ε_1 παίρνουμε 6 σημεία και η ε_2 10 σημεία. Πόσα τρίγωνα υπάρχουν με τις κορυφές τους στα δοθέντα σημεία;

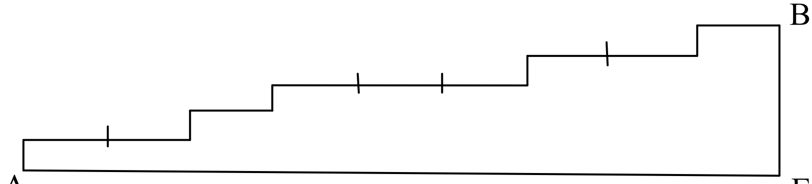
Λύση Κάθε τρίγωνο πρέπει να έχει τις δυο κορυφές του στην μια ευθεία και την τρίτη κορυφή στην άλλη. Από τα 6 σημεία της ε1 μπορούμε να επιλέξουμε δυο ως κορυφές

τριγώνου με $\binom{6}{2}$ τρόπους άρα έχουμε $\binom{6}{2}\cdot 10$ τρίγωνα. Όμοια υπάρχουν $\binom{10}{2}\cdot 6$ τρίγωνα άρα συνολικά έχουμε $\binom{6}{2}\cdot 10+\binom{10}{2}\cdot 6$ τρίγωνα.

Α74. Εξι παράλληλες ευθείες τέμνονται από επτά παράλληλες ευθείες. Πόσα παραλληλόγραμμα σχηματίζονται;

Λύση Για να σχηματίσουμε ένα παραλληλόγραμμο επιλέγουμε 2 από τις 6 παράλληλες και 2 από τις 7 παράλληλες. Άρα έχουμε $\binom{6}{2}\cdot\binom{7}{2}=315$ παραλληλόγραμμα.

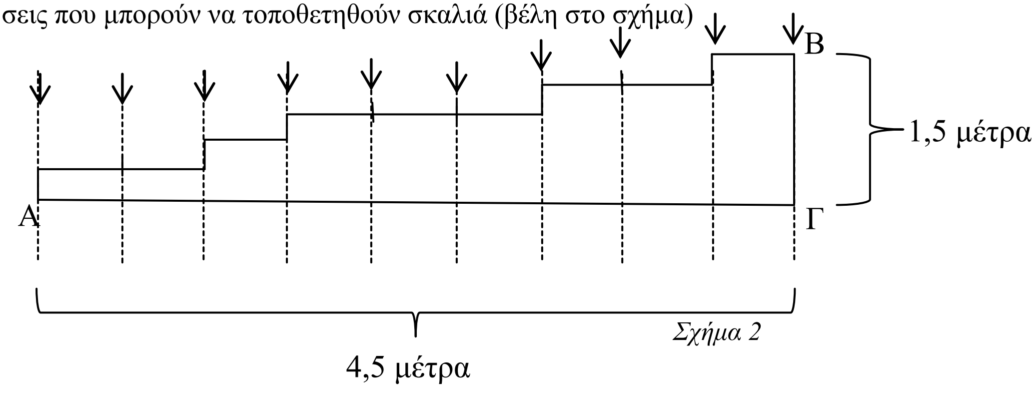
Α75. Ένας ξυλουργός πρέπει να κατασκευάσει μια σκάλα η οποία θα ενώνει τα σημεία Α και Β (σχήμα 1). Η απόσταση ΑΓ είναι 4,5 μέτρα, το ύψος της σκάλας από το Γ στο Β είναι 1,5 μέτρα. Κάθε σκαλί έχει ύψος 30 cm και το μήκος του είναι ακέραιο πολλαπλάσιο των 50 cm. Με πόσους τρόπους μπορεί να κατασκευαστεί η σκάλα;



Σχήμα 1

Λύση

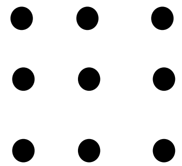
Το ύψος της σκάλας είναι 1,5 μέτρα και κάθε σκαλί πρέπει να έχει ύψος 0,3 μέτρα άρα η σκάλα πρέπει να έχει 1,5/0,3=5 σκαλιά. Τώρα, εφόσον 4,5/0,5=9 υπάρχουν 10 θέσεις που μπορούν να τοποθετηθούν σκαλιά (βέλη στο σχήμα)



Σχήμα 2

Άρα πρέπει για την κατασκευή της σκάλας να επιλέξουμε 5 θέσεις σκαλιών από τις 10 συνεπώς οι δυνατοί τρόποι κατασκευής της σκάλας είναι $C_5^{10}=\binom{10}{5}=252$.

Α76. Εννέα σημεία στο επίπεδο σχηματίζουν ένα τετράγωνο (σχήμα). Πόσα τρίγωνα σχηματίζονται με κορυφές 3 από τα 9 σημεία.



Λύση
Υπολογίζουμε το πλήθος των συνδυασμών των 3 σημείων (κορυφές τριγώνων) από τα 9 είναι: $\binom{9}{3}=\frac{9!}{3!6!}=\frac{7\cdot8\cdot9}{1\cdot2\cdot3}=7\cdot4\cdot3=28\cdot3=84$,όμως έχουμε μετρήσει και τις τριάδες σημείων που είναι συνευθειακά και δεν ορίζουν τρίγωνο. Έχουμε 8 συνευθειακές τριάδες άρα το πλήθος των τριγώνων είναι 84-8=76 τρίγωνα.

Α77. Έστω τρίγωνο ΑΒΓ και πάνω στις πλευρές του παίρνουμε 20 σημεία στην μια,30 σημεία στην άλλη και 50 σημεία στην τρίτη (όλα διαφορετικά μεταξύ τους). Να βρείτε πόσα τρίγωνα υπάρχουν με κορυφές αυτά τα σημεία.
Λύση
Χωρίς βλάβη της γενικότητας θα θεωρήσουμε ότι τα 20 σημεία βρίσκονται στην πλευρά ΒΓ , τα 30 σημεία στην ΑΓ και τα 50 σημεία στην πλευρά ΑΒ.

● Με τους $\binom{30}{2}$ τρόπους επιλογής δυο κορυφών πάνω στην ΑΓ σχηματίζονται και κορυφές τα 20+50=70 σημεία πάνω στις ΒΓ,ΑΒ σχηματίζονται $\binom{30}{2}\cdot70$ τρίγωνα.

● Με τους $\binom{50}{2}$ τρόπους επιλογής δυο κορυφών πάνω στην ΑΒ σχηματίζονται και κορυφές τα 20+30=50 σημεία πάνω στις ΒΓ,ΑΓ σχηματίζονται $\binom{50}{2}\cdot50$ τρίγωνα

● Με τους $\binom{20}{2}$ τρόπους επιλογής δυο κορυφών πάνω στην ΒΓ σχηματίζονται και κορυφές τα 50+30=80 σημεία πάνω στις ΑΒ,ΑΓ σχηματίζονται $\binom{20}{2}\cdot80$ τρίγωνα .

Αν οι τρεις κορυφές των τριγώνων βρίσκονται καθεμία στις τρεις πλευρές έχουμε σύμφωνα με την βασική αρχή απαρίθμησης 20·30·50=30000 τρίγωνα.

Συνολικά έχουμε: $\binom{30}{2}\cdot70+\binom{50}{2}\cdot50+\binom{20}{2}\cdot80+30000=136900$ τρίγωνα.

Α78. Στο εσωτερικό κάθε μίας από τις πλευρές τετραγώνου θεωρούμε ν διαφορετικά μεταξύ τους σημεία. Να βρεθεί το πλήθος όλων των τριγώνων που έχουν κορυφές τα σημεία αυτά.

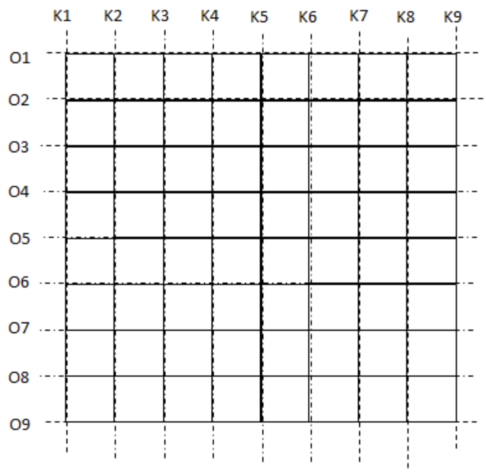
Λύση

Από τα 4ν σημεία που βρίσκονται στις πλευρές του τετραγώνου μπορούμε να δημιουργήσουμε $\binom{4\nu}{3}$ τριάδες σημείων. Όλες βέβαια αυτές οι τριάδες σημείων, δεν ορίζουν τρίγωνα γιατί κάποιες τριάδες αποτελούνται από συνευθειακά σημεία .Σε κάθε πλευρά υπάρχουν $\binom{\nu}{3}$ το πλήθος τριάδες που αποτελούνται από συνευθειακά σημεία. Συνεπώς δημιουργούνται: $\binom{4\nu}{3}-4\cdot\binom{\nu}{3}$ τρίγωνα.

Α79. Να βρείτε των αριθμό των ορθογωνίων σε μια σκακιέρα .*(Ένα ορθογώνιο είναι ένα υποσύνολο των κελιών (τετραγώνων) της σκακιέρας που έχει σχήμα ορθογωνίου. Δύο ορθογώνια θεωρούνται διαφορετικά αν είναι διαφορετικά ως σύνολα κελιών.)*

Λύση

Αριθμούμε από Κ1 έως Κ9 τις κάθετες και Ο1 έως Ο9 τις οριζόντιες ευθείες που ορίζουν τα κελιά της σκακιέρας (σχήμα).Κάθε ορθογώνιο του σχήματος ορίζεται από δυο οριζόντιες και δυο κάθετες ευθείες .Μπορούμε να επιλέξουμε 2 από τις 9 οριζόντιες ευθείες με $\binom{9}{2}$ τρόπους , αναλόγως να επιλέξουμε 2 από τις 9 κάθετες ευθείες με $\binom{9}{2}$ τρόπους .Από την πολλαπλασιαστική αρχή προκύπτουν $\binom{9}{2}\cdot\binom{9}{2}=36^2$ ορθογώνια.



Α80. Στο τυχερό παιχνίδι ΛΟΤΤΟ, ο παίκτης επιλέγει 6 αριθμούς από τους αριθμούς 1,2,3,…,48,49 κατόπιν γίνεται κλήρωση , προκύπτει μια τυχερή εξάδα και όσο περισσότερους αριθμούς έχει μαντέψει τότε ενδεχομένως κερδίζει χρήματα.

i.Με πόσους τρόπους μπορεί να έχει μαντέψει σωστά 4 από τα 6 νούμερα;

ii. Με πόσους τρόπους μπορεί σε δυο διαδοχικές κληρώσεις να επαναληφτεί τουλάχιστον ένας αριθμός;

Λύση

i.Ο παίκτης πρέπει να μαντέψει 4 από τα 6 νούμερα –μας είναι αδιάφορη η σειρά – άρα έχουμε 6 συνδυασμούς ανά 4 δηλαδή $\binom{6}{4}$ τρόπους. Τα αλλά 2 νούμερα που μάντεψε ο παίκτης θα επιλεγούν από τα υπόλοιπα 43 νούμερα επίσης με αδιάφορη σειρά άρα έχουμε $\binom{43}{2}$ τρόπους.

Από την βασική αρχή απαρίθμησης έχουμε συνολικά $\binom{6}{4}\cdot\binom{43}{2}=13545$ τρόπους.

ii.Ας το πάμε αντίστροφα.Με πόσους τρόπους δεν επαναλαμβάνεται κανένας αριθμός; Αυτό σημαίνει ότι εξαιρούμε τα 6 νούμερα που κληρωθήκαν στην πρώτη κλήρωση, μας απομένουν 43 άρα οι ζητούμενοι τρόποι να μην επαναληφτεί κανένας αριθμός είναι $\binom{43}{6}$.Οι συνολικοί τρόποι επιλογής 6 αριθμών από 49 είναι $\binom{49}{6}$ άρα η διαφορά $\binom{49}{6}-\binom{43}{6}$ μας δίνει όλους τους τρόπους με τους οποίους επαναλαμβάνεται ένας τουλάχιστον αριθμός στην δεύτερη κλήρωση.

Α81. Σε μια εταιρεία διανομής δεμάτων εργάζονται 10 υπάλληλοι.Από αυτούς 5 υπάλληλοι μεταφέρουν δεματα,3 υπάλληλοι εργάζονται στην μηχανογράφηση και 2 στο τηλεφωνικό κέντρο.

i.Με πόσους τρόπους μπορούν να σχηματιστούν οι τρεις ομάδες;

ii. Αν ένας υπάλληλος έχει ορθοπεδικό πρόβλημα και δεν μπορεί να εργαστεί στην μεταφορά δεμάτων, με πόσους τρόπους μπορούν να σχηματιστούν οι τρεις ομάδες;

Λύση

i. $\binom{10}{5}\cdot\binom{5}{3}\cdot\binom{2}{2}=2520$ τρόποι. ii. $\binom{9}{5}\cdot\binom{5}{3}\cdot\binom{2}{2}=1260$ τρόποι.

Α82.Μεταξύ των αριθμών 6000 και 9000 πόσοι έχουν ψηφία διαφορετικά μεταξύ τους και διατεταγμένα κατά φθίνουσα σειρά;

Λύση

Οι αριθμοί μεταξύ 6000 και 6999 έχουν πρώτο ψηφίο το 6 ,τα υπόλοιπα τρία ψηφία εκατοντάδων,δεκάδων, μονάδων πρέπει να επιλεγούν από το σύνολο $\{0,1,2,4,5\}$ και με φθίνουσα σειρά μπορούν να τοποθετηθούν με ένα τρόπο άρα έχουμε $\binom{6}{3}\cdot 1=20$ τρόπους.

Οι αριθμοί μεταξύ 7000 και 7999 έχουν πρώτο ψηφίο το 7,τα υπόλοιπα τρία ψηφία εκατοντάδων,δεκάδων,μονάδων πρέπει να επιλεγούν από το σύνολο $\{0,1,2,4,5,6\}$ και με φθίνουσα σειρά μπορούν να τοποθετηθούν με ένα τρόπο άρα έχουμε $\binom{7}{3}\cdot 1=35$ τρόπους.

Οι αριθμοί μεταξύ 8000 και 9000 έχουν πρώτο ψηφίο το 8,τα υπόλοιπα τρία ψηφία εκατοντάδων ,δεκάδων , μονάδων πρέπει να επιλεγούν από το σύνολο {0,1,2,4,5,6,7} και με φθίνουσα σειρά μπορούν να τοποθετηθούν με ένα τρόπο άρα έχουμε

$\binom{8}{3}\cdot 1 = 56$ τρόπους

Τελικά το πλήθος των ζητούμενων αριθμών είναι :20+36+56=111

Α83.Να βρείτε το πλήθος των θετικών πενταψηφίων ακεραίων αριθμών που τα ψηφία τους είναι κατά αύξουσα σειρά και δεν είναι απαραίτητα διαφορετικά μεταξύ τους.

Λύση

Ένας θετικός πενταψήφιος ακέραιος με αύξουσα σειρά ψηφίων καθορίζεται μόνο από τα 5 ψηφία που τον αποτελούν. Τα ψηφία είναι δυνατό να πάρουν τιμές από το σύνολο {1,2,3,4…,9} ,το ψηφίο 0 δεν μπορεί να είναι σε καμιά θέση εφόσον δεν μπορεί να είναι στην πρώτη από αριστερά θέση . Άρα, για να βρούμε το πλήθος τους αρκεί να πάρουμε τους επαναληπτικούς συνδυασμούς των 9 ψηφιων ανα 7 γίνει με

$\binom{9+5-1}{5} = \binom{13}{5}$ τρόπους.

Α84.i. Με πόσους τρόπους μπορεί μια ομάδα 10 παικτών ποδόσφαιρου να χωριστεί σε δυο ομάδες των 5 ατόμων;

ii. Με πόσους τρόπους μπορεί μια ομάδα 10 παικτών ποδόσφαιρου να χωριστεί σε δυο ομάδες των 5 ατόμων η μια από τις οποίες θα κάνει προπόνηση και η άλλη θα ξεκουραστεί.

Λύση

i. Έστω ένα συγκεκριμένο άτομο Χ από τα 10 αρχικά άτομα.Από τα υπόλοιπα 9 άτομα επιλέγουμε 4,που μαζί με τον Χ θα αποτελέσουν την πρώτη πεντάδα με $\binom{9}{4}$ *τρόπους.*

Η άλλη πεντάδα επιλέγεται τότε με ένα μόνο τρόπο (αφού έχουν μείνει μόνο 5 άτομα για την δημιουργία πεντάδας).

Επομένως ,έχουμε συνολικά $\binom{9}{4} = 126$ τρόπους

ii.Το ερώτημα είναι τελείως διαφορετικό από το πρώτο. Εδώ η σωστή λύση είναι

$\binom{10}{5}\cdot\binom{5}{5} = 252$ τρόποι.

Α85.Από μια ομάδα 5 φίλων: Α,Β,Γ,Δ,Ε πόσοι τρόποι υπάρχουν ώστε:

i.Οι Α,Β,Γ να έχουν γεννηθεί την ίδια ημερομηνία.

ii. Τα 3 άτομα να έχουν γεννηθεί τη ίδια ημερομηνία , ενώ τα άλλα δυο σε 2 άλλες ,και διαφορετικές μεταξύ τους ημερομηνίες;

Λύση

i.Το να έχουν γεννηθεί και τα 3 άτομα Α,Β,Γ την ίδια ημερομηνία, μπορεί να συμβεί κατά 365 τρόπους ,αφού 365 είναι οι μέρες τους έτους .Τα υπόλοιπα δυο άτομα οι Δ,Ε μπορούν να διαταχθούν στις υπόλοιπες 364 ημέρες .Άρα συνολικά αυτό μπορεί να γίνει με $365\cdot\Delta_{5-3}^{365} = 365\cdot\Delta_2^{365}$

ii.Θέλουμε τα 3 από τα 5 άτομα να έχουν γεννηθεί την ίδια ημερομηνία, ενώ τα άλλα 2 σε διαφορετικές μεταξύ τους ημερομηνίες. Επομένως είναι όλοι οι προηγούμενοι τρόποι επί τους συνδυασμούς των 5 ατόμων ανά 3,

δήλ $\binom{5}{3}365\cdot\Delta_{5-3}^{365}=\binom{5}{3}\cdot 365\cdot\Delta_{2}^{365}$ τρόπους.

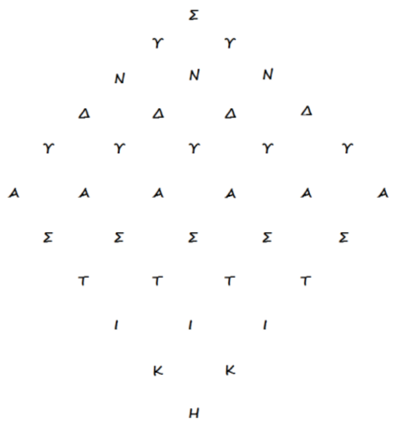
Α86. Σε επτά εκλογικά τμήματα (Α,Β,Γ,Δ,Ε,Ζ) το κόμμα SOKON πήρε συνολικά δέκα ψήφους.
Να βρείτε με πόσους τρόπους,
i.μπορούν να δοθούν οι 10 ψήφοι στα 7 εκλογικά τμήματα.
ii. στο Β εκλογικό τμήμα υπάρχουν ακριβώς 2 ψήφοι του κόμματος SOKON.
iii. το κόμμα SOKON πήρε μια τουλάχιστον ψήφο σε κάθε εκλογικό τμήμα.
iv. στα εκλογικά τμήματα Α,Γ,Δ,Ζ να μην υπάρχουν ψήφοι του κόμματος SOKON.
v.σε ακριβώς 4 εκλογικά τμήματα να μην υπάρχουν ψήφοι του κόμματος SOKON.
Λύση
i.Δέκα ψήφοι μοιράζονται σε επτά εκλογικά τμήματα μπορεί να γίνει με 7^{10} τρόπους.
ii.Οι επιλογή των 2 ψήφων που θα δοθούν στο εκλογικό τμήμα Β γίνεται με $\binom{10}{2}$ τρόπους οι υπόλοιποι 8 ψήφοι θα μοιραστούν στα υπόλοιπα 6 τμήματα με 6^8 τρόπους, από την βασική αρχή απαρίθμησης έχουμε συνολικά: $\binom{10}{2}\cdot 6^8$ τρόπους.

iii.Οι τρεις ψήφοι που περισσεύουν μπορούν να τοποθετηθούν στα 7 εκλογικά τμήματα με 7^3 και οι 7 ψήφοι που πήγαν σε καθένα από τα 7 τμήματα τοποθετούνται 7! Τρόπους.Έτσι ,από την βασική αρχή απαρίθμησης έχουμε συνολικά $7!\cdot 7^3$ τρόπους.

iv.Οι 10 ψήφοι μοιράζονται στα υπόλοιπα 3 εκλογικά τμήματα με 3^{10} τρόπους.

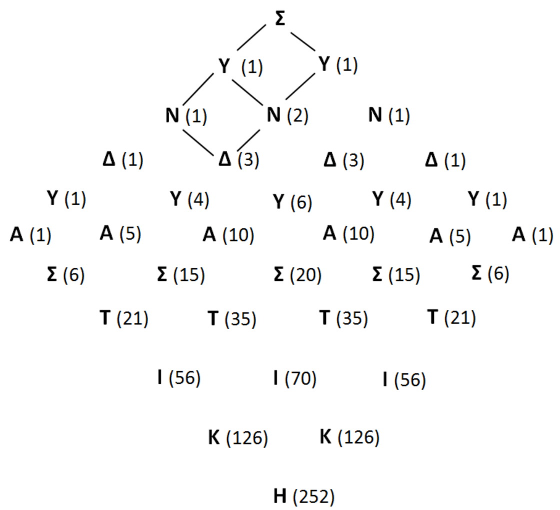
v. Τα 4 τμήματα μπορούν να επιλεγούν με $\binom{7}{4}$ τρόπους και οι 10 ψήφοι μοιράζονται στα υπόλοιπα 3 εκλογικά τμήματα με 3^{10} τρόπους, άρα από την βασική αρχή απαρίθμησης έχουμε συνολικά: $\binom{7}{4}\cdot 3^{10}$ τρόποι.

Α87. Με πόσους τρόπους μπορείτε να διαβάσετε την λέξη ΣΥΝΔΥΑΣΤΙΚΗ στο παρακάτω σχήμα;



Λύση Υπάρχουν $\binom{10}{5} = 252$ τρόποι. Δείτε το παράδειγμα 80

Εναλλακτικά, με αφετηρία το Σ σε κάθε σημείο γράφουμε έναν αριθμό που εκφράζει το πλήθος των διαφορετικών διαδρομών που καταλήγουν σε αυτό το σημείο. Στο σχήμα για παράδειγμα ο αριθμός 3 στο Δ εκφράζει το πλήθος των διαφορετικών διάδρομων που ξεκινούν από το Σ και καταλήγουν στο Δ. Υπάρχει μάλιστα και ένα συγκεκριμένο μοτίβο υπολογισμού των αριθμών, κάθε αριθμός ισούται με το άθροισμα των δυο αριθμών (ή του ενός να μιλάμε για τους αριθμούς στις πλευρές τους σχήματος) ακριβώς από πάνω του. Με τον τρόπο αυτό καταλήγουμε στο πλήθος των 252 διαφορετικών διαδρομών.



Α88. Ο Παπαδόπουλος καθηγητής μαθηματικών έλαβε μέρος σε ένα τηλεπαιχνίδι. Στο συγκεκριμένο τηλεπαιχνίδι πρέπει να απαντά στις ερωτήσεις που τίθενται στον ελάχιστο χρόνο για να πάρει όσο το δυνατό περισσοτέρους βαθμούς. Ρωτήθηκε λοιπόν:

«Με πόσους τρόπους- διαδρομές στο ακόλουθο σχήμα κινούμενοι από πάνω προς τα κάτω σχηματίζεται η λέξη ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΣ;»

Μ
Μ **Α** Μ
Μ Α **Θ** Α Μ
Μ Α Θ **Η** Θ Α Μ
Μ Α Θ Η **Μ** Η Θ Α Μ
Μ Α Θ Η Μ **Α** Μ Η Θ Α Μ
Μ Α Θ Η Μ Α **Τ** Α Μ Η Θ Α Μ
Μ Α Θ Η Μ Α Τ **Ι** Τ Α Μ Η Θ Α Μ
Μ Α Θ Η Μ Α Τ Ι **Κ** Ι Τ Α Μ Η Θ Α Μ
Μ Α Θ Η Μ Α Τ Ι Κ **Ο** Κ Ι Τ Α Μ Η Θ Α Μ
Μ Α Θ Η Μ Α Τ Ι Κ Ο **Σ** Ο Κ Ι Τ Α Μ Η Θ Α Μ

Μπορείτε να βοηθήσετε τον Παπαδόπουλο να βρει το πλήθος των διαδρομών με το ελάχιστο πλήθος υπολογισμών;

Λύση

Δουλεύουμε αντίστροφα.Κάθε διαδρομή καταλήγει στο γράμμα Σ.Θεωρούμε λοιπόν το αριστερό τριγωνικό μέρος του σχήματος συμπεριλαμβανομένης της κεντρικής στήλης. (σχήμα 1) Ξεκινώντας λοιπόν από το γράμμα Σ μπορούμε να γυρίσουμε πίσω γράμμα–γράμμα έχοντας κάθε φορά 2 επιλογές άρα συνολικά έχουμε 2^{10} επιλογές. Το ίδιο μπορούμε να κάνουμε και στο δεξιό τριγωνικό μέρος συνεπώς από την πολλαπλασιαστική αρχή θα έχουμε και εκεί 2^{10} επιλογές συνολικά $2*2^{10}=2^{11}$ αφαιρούμε όμως 1 καθώς έχουμε διπλομετρήσει την διαδρομή κεντρική στήλη άρα έχουμε συνολικά 2^{11}-1 διαδρομές.

Μ
Μ Α Μ
Μ Α **Θ** Α Μ
Μ Α Θ **Η** Θ Α Μ
Μ Α Θ Η **Μ** Η Θ Α Μ
Μ Α Θ Η Μ Α Μ Η Θ Α Μ
Μ Α Θ Η Μ Α **Τ** Α Μ Η Θ Α Μ
Μ Α Θ Η Μ Α Τ **Ι** Τ Α Μ Η Θ Α Μ
Μ Α Θ Η Μ Α Τ Ι **Κ** Ι Τ Α Μ Η Θ Α Μ
Μ Α Θ Η Μ Α Τ Ι Κ **Ο** Κ Ι Τ Α Μ Η Θ Α Μ
Μ Α Θ Η Μ Α Τ Ι Κ Ο **Σ** Ο Κ Ι Τ Α Μ Η Θ Α Μ

Σχήμα 1

Α90.Ποσες λέξεις των 5 γραμμάτων μπορούμε να σχηματίσουμε με 3 σύμφωνα και 2 φωνήεντα από τα γράμματα κ,λ,μ,ξ,ο,ε,η;

Λύση

Έχουμε την μετάθεση 5 διαφορετικών γραμμάτων άρα 5! τρόπους.

Επιλογή 2 φωνήεντων από 3 με $\binom{3}{2}$ τρόπους .

Επιλογή 3 συμφώνων από 3 με $\binom{4}{3}$ τρόπους .

Άρα από την πολλαπλασιαστική αρχή προκύπτουν $\binom{4}{3}\cdot\binom{3}{2}\cdot 5!$ λέξεις.

Α91. Να βρείτε πόσες εντεκάδες ποδοσφαιριστών μπορούν να σχηματιστούν από 8 αλλοδαπούς και 9 ημεδαπούς ποδοσφαιριστές αν πρέπει οι ημεδαποί να πλειοψηφούν.
Λύση
Μας είναι αδιάφορη η σειρά επιλογής άρα πρόκειται για συνδυασμούς. Διακρίνουμε περιπτώσεις:

● Επιλέγουμε 6 ημεδαπούς και 5 αλλοδαπούς με $\binom{9}{6}\cdot\binom{8}{5}$ τρόπους.

● Επιλέγουμε 7 ημεδαπούς και 4 αλλοδαπούς με $\binom{9}{7}\cdot\binom{8}{4}$ τρόπους.

● Επιλέγουμε 8 ημεδαπούς και 3 αλλοδαπούς με $\binom{9}{8}\cdot\binom{8}{3}$ τρόπους.

● Επιλέγουμε 9 ημεδαπούς και 2 αλλοδαπούς με $\binom{9}{9}\cdot\binom{8}{2}$ τρόπους.

Από την προσθετική αρχή, οι συνολικοί τρόποι είναι :
$\binom{9}{6}\cdot\binom{8}{5}+\binom{9}{7}\cdot\binom{8}{4}+\binom{9}{8}\cdot\binom{8}{3}+\binom{9}{9}\cdot\binom{8}{2}$ τρόποι.

Α90. Μια παρέα από 9 ψαράδες σκοπεύει να πάει για ψάρεμα σε μια λίμνη ,διαθέτουν δυο βάρκες χωρητικότητας 7 και 5 ατόμων. Με πόσους τρόπους μπορούν να επιβιβαστούν στις βάρκες οι 9 ψαράδες;
Λύση
Μας είναι αδιάφορη η σειρά επιλογής άρα πρόκειται για συνδυασμούς.
Διακρίνουμε περιπτώσεις:

● Επιλέγουμε 7 άτομα για την πρώτη βάρκα άρα περισσεύουν 2 άτομα για την δεύτερη με $\binom{9}{7}$ τρόπους.

● Επιλέγουμε 6 άτομα για την πρώτη βάρκα άρα περισσεύουν 3 άτομα για την δεύτερη με $\binom{9}{6}$ τρόπους.

● Επιλέγουμε 5 άτομα για την πρώτη βάρκα άρα περισσεύουν 3 άτομα για την δεύτερη με $\binom{9}{5}$ τρόπους.

● Επιλέγουμε 4 άτομα για την πρώτη βάρκα άρα περισσεύουν 5 άτομα για την δεύτερη με $\binom{9}{4}$ τρόπους.

Συνολικά έχουμε: $\binom{9}{7}+\binom{9}{6}+\binom{9}{5}+\binom{9}{4}=372$ τρόπους

Α92.Απο μια ομάδα 6 στρατιωτικών που αποτελείται από 3 αξιωματικούς και 3 υπαξιωματικούς επιλέγουμε μια τετράδα. Με πόσους τρόπους μπορεί να γίνει αυτό ,αν πρέπει στην τετράδα να βρίσκονται το πολύ δυο αξιωματικοί;

Λύση

$\binom{3}{3}\binom{3}{1}+\binom{3}{2}\binom{3}{2}=12$ τρόποι

Α93.Αν ένα σύνολο Α έχει 8 στοιχεία , να βρείτε το πλήθος των υποσυνόλων του Α:

i.με κανένα στοιχείο

ii.με 4 στοιχεία ,

iii.με το πολύ 4 στοιχεία.

iv.ανεξαρτήτως πλήθους στοιχείων.

Λύση

i. $\binom{8}{0}=1$ ii. $\binom{8}{4}=70$ iii. $\binom{8}{0}+\binom{8}{1}+\binom{8}{2}+\binom{8}{3}+\binom{8}{4}=163$

iv. $\binom{8}{0}+\binom{8}{1}+\binom{8}{2}+\binom{8}{3}+\binom{8}{4}+\binom{8}{5}+\binom{8}{6}+\binom{8}{7}+\binom{8}{8}=256$ ή 2^8

Α94.Απο 8 βουλευτές του ελληνικού κοινοβουλίου πρόκειται να σχηματιστεί μια τετραμελής επιτροπή. Από αυτούς τους βουλευτές, δυο ονομάζονται Παπαδόπουλος και Καλοχαιρέτας. Αν συμμετέχει στην επιτροπή ο Παπαδόπουλος θα πρέπει να συμμετέχει και ο Καλοχαιρέτας ενώ αν συμμετέχει ο Καλοχαιρέτας δεν είναι ανάγκη να συμμετέχει ο Παπαδόπουλος.

Με πόσους τρόπους μπορεί να σχηματιστεί η επιτροπή;

Λύση

$\binom{6}{2}+\binom{6}{3}+\binom{6}{4}=50$ τρόποι

Α95.Με πόσους τρόπους μπορεί να εκλεγεί μια πενταμελής επιτροπή από μια ομάδα 10 ατόμων, αν δυο ορισμένα άτομα δεν μπορούν να είναι μαζί στην επιτροπή;

Λύση

Έστω Α,Β τα άτομα αυτά. Οι επιτροπές που περιέχουν τον Α αλλά όχι τον Β είναι $\binom{8}{4}$.Οι επιτροπές που περιέχουν τον Β αλλά όχι τον Α είναι $\binom{8}{4}$.Οι επιτροπές που δεν περιέχουν ούτε τον Α, ούτε τον Β είναι $\binom{8}{5}$.Συνολικά έχουμε $2\binom{8}{4}+\binom{8}{5}=196$ τρόποι.

Α96.Σε ένα σχολείο ,τέσσερεις μαθητές της Α τάξης ,έξι μαθητές της Β τάξης και τρεις μαθητές της Γ τάξης είναι υποψήφιοι για τον σχηματισμό μιας τετραμελούς ομάδας.

Ο διευθυντής του σχολείου απαίτησε η επιλογή να γίνει έτσι ώστε να εκπροσωπείται κάθε τάξη του σχολείου. Με πόσους τρόπους μπορεί να γίνει αυτό;
Λύση
1ος τρόπος
Διακρίνουμε περιπτώσεις :
● Επιλογή 1 μαθητή της πρώτης ταξης,1 μαθητή της Β τάξης και 2 μαθητών της Γ τάξης.
Γίνεται με $\binom{4}{1}\cdot\binom{6}{1}\cdot\binom{3}{2}=72$ τρόπους.
● Επιλογή 1 μαθητή της πρώτης ταξης,2 μαθητών της Β τάξης και 1 μαθητή της Γ τάξης.
Γίνεται με $\binom{4}{1}\cdot\binom{6}{2}\cdot\binom{3}{1}=180$ τρόπους.
● Επιλογή 2 μαθητών της πρώτης ταξης,1 μαθητή της Β τάξης και 1 μαθητή της Γ τάξης.
Γίνεται με $\binom{4}{2}\cdot\binom{6}{1}\cdot\binom{3}{1}=108$ τρόπους.
Συνολικά έχουμε:180+72+108=360 τρόποι.
2ος τρόπος
Επιλέγουμε πρώτα ένα μαθητή της Α τάξης (με 4 τρόπους) ,ένα μαθητή της Β τάξης (με 6 τρόπους) ,ένα μαθητή της Γ τάξης (με 3 τρόπους).Στην συνέχεια, επιλέγουμε ένα οποιοδήποτε άτομα από τα υπόλοιπα 10 με $\binom{10}{1}=10$ τρόπους.
Προκύπτουν έτσι $4\cdot6\cdot3\cdot10=720$ τρόποι.
Όμως κάθε δυνατή επιτροπή έχει μετρηθεί δυο φορές .Άρα έχουμε $\frac{720}{2}=360$ τρόποι.

Α97. Στο τηλεπαιχνίδι *«Πολύ χρήμα!»* ζητήθηκε από την Μαρία να αντιστοιχίσει 4 ηθοποιούς με τις 4 ταινίες που τους ανέδειξαν. Αν η Μαρία απαντήσει στην τύχη ,να βρείτε με πόσους τρόπους μπορεί να αντιστοιχίσει σωστά:
i.μόνο μια ταινία.
ii. μόνο δυο ταινίες.
iii.τουλάχιστον δυο ταινίες.
Λύση
i.Έστω Η1,Η2,Η3,Η4 οι 4 ηθοποιοί και Τ1,Τ2,Τ3,Τ4 αντιστοίχως η ταινία καθενός. Αν η Μαρία βρει σωστά μόνο μια ταινία ας πούμε την Τ1 τότε έχει βρει τις υπόλοιπες λάθος , απάντησε Τ1Τ3Τ4Τ2 ή Τ1Τ4Τ2Τ3 έχει κατόπιν δυο επιλογές. Αρχικά έχει 4 επιλογές για την σωστή ταινία και μετά δυο επιλογές για τις υπόλοιπες από την πολλαπλασιαστική αρχή αυτό μπορεί να γίνει με 4*2=8 τρόπους.

ii.Η Μαρία βρίσκει ακριβώς δυο ταινίες αυτό μπορεί να γίνει με $\binom{4}{2}$ τρόπους και τις άλλες δυο λάθος, αυτό γίνεται μόνο με ένα τρόπο. Άρα έχουμε συνολικά $\binom{4}{2}=6$ τρόπους .

ii.Τουλάχιστον δυο ταινίες αυτό σημαίνει ότι βρήκε 2 ή 3 ή 4 αλλά αν έχει βρει 3 τότε σίγουρα έχει βρει και την $4^{η}$. Άρα θεωρούμε ότι βρήκε 2 ή 4. Αυτό γίνεται με $\binom{4}{2}+1=6+1=7$ τρόπους.

Α98. Επιλέγουμε τυχαία τρεις αριθμούς α,β,γ από τους 1,2,3,…,300 διαφορετικούς μεταξύ τους.

i.Με πόσους τρόπους μπορούμε να επιλέξουμε τους α,β,γ;

ii.Με πόσους τρόπους μπορούμε να επιλέξουμε τους α,β,γ ώστε να είναι α+β+γ πολλαπλάσιο του 3.

Λύση

i.Η επιλογή των α,β,γ είναι το πλήθος των συνδυασμών 300 στοιχείων ανά 3 και γίνεται με $\binom{300}{3}=4455100$ τρόπους.

ii.Οι αριθμοί 1,2,3,…,300 διαμερίζονται στους αριθμούς της μορφής 3κ,3κ+1,3κ+2, $\kappa\in\mathbb{N}$, $\kappa\in\mathbb{N}$.Αν επιλέξουμε τους α,β,γ τότε α+β+γ είναι πολλαπλάσιο του 3 όταν:

- α,β,γ είναι της μορφής 3κ (αυτοί είναι 100 αριθμοί) άρα η επιλογή γίνεται με $\binom{100}{3}=161700$ τρόπους
- α,β,γ είναι της μορφής 3κ+1 αυτοί είναι 100 αριθμοί άρα η επιλογή γίνεται με $\binom{100}{3}=161700$ τρόπους
- α,β,γ είναι της μορφής 3κ+2 αυτοί είναι 100 αριθμοί άρα η επιλογή γίνεται με $\binom{100}{3}=161700$ τρόπους
- α,β,γ , ένας της μορφής 3κ,ενας της μορφής 3κ+1,ενας της μορφής 3κ+2 ,μας είναι αδιάφορη η σειρά και η επιλογή μπορεί να γίνει με 100^3 τρόπους.

Συνολικά η επιλογή γίνεται με $3\cdot161700+100^3=1485100$ τρόπους

Α99. Εβδομήντα υπάλληλοι της εταιρείας MPARBAGIORGOS.CORPORATION έχουν ανά δυο διαφορετική ηλικία (σε ακέραιο αριθμό ετών) .Με πόσους τρόπους μπορούμε να τους χωρίσουμε σε δυο ομάδες των 10 και 20 υπάλληλων έτσι ώστε η ηλικία κάθε υπάλληλου της πρώτης ομάδας να είναι μικρότερη από την ηλικία κάθε υπάλληλου της δεύτερης ομάδας;

Λύση

Η επιλογή θα γίνει σε δυο φάσεις:

Φάση 1^{η} :Αρχικά επιλέγουμε τριάντα υπαλλήλους με $\binom{70}{30}$ τρόπους όσοι και οι συνδυασμοί των 70 ανά 30.
Φάση 2^{η} :Τοποθετούμε τους 10 μικρότερους σε ηλικία από του 30 υπαλλήλους που επιλέξαμε ως πρώτη ομάδα και τους υπολοίπους 20 μεγαλύτερους σε ηλικία σαν μέλη της δεύτερης ομάδας .Αύτη η φάση πραγματοποιείται με έναν τρόπο.

Άρα το ζητούμενο πλήθος είναι $\binom{70}{30}$ τρόποι.

Α100. Δίνονται 20 ευθείες ενός επίπεδου, που τέμνονται ανά 2 σε διαφορετικά σημεία.
i.Πόσα είναι τα σημεία τομής;
ii.Με πόσους τρόπους 4 από αυτά δεν είναι συνευθειακά;
Λύση

i.Το πλήθος των σημείων τομής είναι $\binom{20}{2}=190$.

ii.Το πλήθος των τρόπων επιλογής 4 σημείων από τα σημεία τομής είναι

$$\binom{\binom{20}{2}}{4}=\binom{190}{4}=52602165$$

Σε κάθε ευθεία υπάρχουν 19 σημεία και από αυτά μπορούν να επιλέγουν 4 (συνευθειακά) με $\binom{19}{4}=3876$ τρόπους ,έχουμε 20 ευθείες άρα έχουμε συνολικά

$20\cdot\binom{19}{4}=20\cdot 3876=77520$ τρόπους επιλογής 4 συνευθειακών σημείων.

Συνεπώς το πλήθος τρόπων επιλογής 4 σημείων τομής που δεν είναι συνευθειακά είναι: $52602165-77520=52524645$

Α101. Οι αριθμοί x, y, z είναι θετικοί ακέραιοι και ικανοποιούν την εξίσωση:

$$x+y+z=2013$$

Να βρειτε το πλήθος των τριάδων (x, y, z) που είναι λύσεις της εξίσωσης .
(Προκριματικός νέων 2012 (Ε.Μ.Ε))

(Απ.Προκύπτει από το παράδειγμα $\binom{2013-1}{3-1}=\binom{2012}{2}$)

Α102. Να αποδείξετε συνδυαστικά ότι $\binom{\mu+\nu}{2}-\binom{\mu}{2}-\binom{\nu}{2}=\mu\cdot\nu\ ,\ \mu,\nu\in\mathbb{N}$

Λύση

Θεωρούμε μια ομάδα από μ μαθητές και ν μαθήτριες .Αν θέλουμε να επιλέξουμε ένα μαθητή και μια μαθήτρια μπορούμε να το κάνουμε με $\mu\cdot\nu$ τρόπους (Πολλαπλασιαστική αρχή)

Διαφορετικά θα μπορούσαμε να επιλέξουμε ένα μαθητή και μια μαθήτρια ως εξής:

Από τα $\binom{\mu+\nu}{2}$ συνολικά ζεύγη επιλογής δυο ατόμων να αφαιρέσουμε τα $\binom{\mu}{2}$ ζεύγη επιλογής 2 αγοριών και τα $\binom{\nu}{2}$ ζεύγη επιλογής 2 κοριτσιών .Τελικά ισχύει:

$$\binom{\mu+\nu}{2}-\binom{\mu}{2}-\binom{\nu}{2}=\mu\cdot\nu\ ,\ \mu,\nu\in\mathbb{N}$$

Α103. Ένας φύλακας σε μουσείο πρέπει να εργαστεί νυκτερινή βάρδια στο Μουσείο 5 μέρες τον μήνα Ιανουάριο. Ωστόσο, δεν επιτρέπεται να εργαστεί δυο συνεχόμενες μέρες.Με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορεί να επιλέξει τις 5 ημέρες του Ιανουαρίου που θα εργαστεί;

Λύση

Η δυσκολία εδώ είναι ότι πρέπει να διασφαλίσουμε ότι ο φύλακας δεν θα εργαστεί δυο συνεχόμενες ημέρες του Ιανουαρίου (οι ημέρες του Ιανουάριου έχουν ημερομηνίες: 1,2,3,..,31). Θα καταφύγουμε λοιπόν σε ένα τέχνασμα. Έστω $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5$ οι 5 ημερομηνίες κατά αύξουσα σειρά που θα εργαστεί ο φύλακας όπου $1\le\alpha_i\le31$.Δεν έχουμε δυο συνεχόμενες μέρες εργασίας του φύλακα αρκεί να ισχύει ότι:

$1\le\alpha_1<\alpha_2-1<\alpha_3-2<\alpha_4-3<\alpha_5-4\le27$

Υπάρχει μια ένα προς ένα αντιστοιχία μεταξύ συνδυασμών των 31 ήμερων του Ιανουαρίου ανά 5 (μη συνεχόμενων ανά 2) και των συνδυασμών των 27 ήμερων ανά 5.

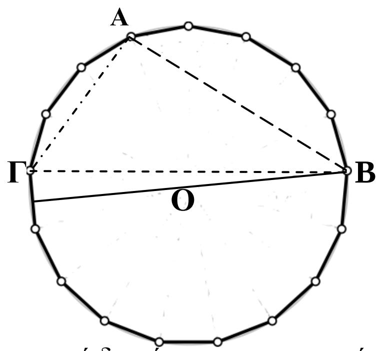
Άρα το ζητούμενο πλήθος είναι $\binom{27}{5}$.

Α104. Επιλέγουμε τυχαία τρεις από τις κορυφές του κανονικου 17-γωνου.
Να βρείτε το πλήθος των οξυγωνίων τριγώνων που σχηματίζονται.

Λύση

Στο κανονικό δεκαεπτάγωνο από διαγώνιους και κορυφές σχηματίζονται μόνο οξυγώνια και αμβλυγώνια τρίγωνα και αυτό γιατί δεν υπάρχει διάμετρος με αντιδιαμετρικά σημεία κορυφές του δεκαπταγώνου.Αν βρούμε το σύνολο των τριγώνων και το σύνολο των αμβλυγώνιων τριγώνων είναι πολύ εύκολο να βρούμε το πλήθος των οξυγωνίων.

Κατασκευάζουμε διάμετρο με ένα άκρο μια κορυφή του δεκαεπταγωνου και το άλλο άκρο ένα σημείο του κύκλου τότε στα δυο ημικύκλια υπάρχουν από 8 κορυφές .



Ένα τρίγωνο που σχηματίζεται από διαγώνιους και κορυφές του δεκαεπταγώνου είναι αμβλυγώνιο αν και οι τρεις κορυφές του βρίσκονται προς το ίδιο ημικύκλιο(πχ. ΑΒΓ) καθώς είναι βέβαιο ότι η μια από τις τρεις γωνίες (Α) είναι αμβλεία.
Μετράμε αυτά τα αμβλυγώνια τρίγωνα είναι: 17 επιλογές άκρου διαμέτρου και συνδυασμοί 8 κορυφών ανά 2 , $\frac{8!}{2!6!}$ δηλαδή $17\cdot\frac{8!}{2!6!}=476$

Το συνολικό πλήθος των τριγώνων είναι το πλήθος των συνδυασμών 17 κορυφών ανά 3 δηλαδή $\frac{17!}{3!14!}=680$

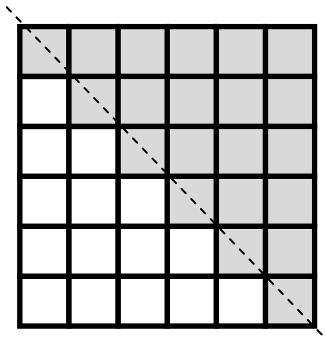
Άρα το ζητούμενο πλήθος είναι: 680-476=204

Α105. Ο Τοτός σε ένα αγώνα μπάσκετ πέτυχε 5 καλάθια. Κάθε καλάθι που έβαλε ήταν δίποντο ή τρίποντο και συγκέντρωσε α πόντους. Πόσες είναι διαφορετικές τιμές του α;
Λύση
Το ερώτημα είναι πόσους συνδυασμούς δίποντα -τρίποντα θα ήταν δυνατό να πετύχει ο Τοτός.
Θεωρούμε τα 5 καλάθια ως σφαιρίδια και διαθέτουμε ένα χώρισμα. Το χώρισμα αν τοποθετηθεί ανάμεσα στα σφαιρίδια αριστερά του βρίσκονταν τα δίποντα και δεξιά του τα τρίποντα.Για παράδειγμα, στο σχήμα έχουμε 1 δίποντο και 4 τριποντά.



Το πλήθος των διαφορετικών τρόπων με τους οποίους επετεύχθησαν τα 5 καλάθια είναι ακριβώς το πλήθος των θέσεων που μπορεί να τοποθετηθεί το χώρισμα.Το χώρισμα έχει 6 θέσεις άρα έχουμε 6 διαφορετικά σύνολα πόντων.(«Stars and bars»)

Α106. Με την βοήθεια του ακόλουθου σχήματος να αποδείξετε ότι:



$$1+2+3+4+5+6=\binom{7}{2}$$

Αν έπρεπε να υπολογίσουμε το άθροισμα $1+2+3+....+\nu$ για ένα τετράγωνο που κατασκευάζεται από ν^2 μοναδιαία τετράγωνα ποια θα ήταν η απάντηση

Λύση

Το τετράγωνο αποτελείται από 36 μοναδιαία τετράγωνα .Το ζητούμενο άθροισμα $1+2+3+4+5+6$ εκφράζεται ως το πλήθος των χρωματισμένων με γκρι χρώμα μοναδιαίων τετράγωνων. Πως βρίσκουμε το πλήθος; Παρατηρείστε ότι αν από τα 36 τετράγωνα αφαιρέσουμε τα μοναδιαία τετράγωνα της διαγωνίου και πάρουμε τα μισά των υπόλοιπων και κατόπιν προσθέσουμε το πλήθος της διαγωνίου έχουμε το ζητούμενο πλήθος , δηλαδή, $\frac{36-6}{2}+6=15+6=21$ που προφανώς είναι ίσο με $\binom{7}{2}$

($\binom{7}{2}=\frac{7!}{2!(7-2)!}=\frac{7!}{2!\cdot 5!}=\frac{6\cdot 7}{2}=21$ **)**

4.Ασκήσεις (Αρχή του περιστερώνα)

Α107. Μια ομάδα ποδοσφαίρου έχει 11 παίκτες από τους οποίους ο μικρότερος είναι 21 ετών και ο μεγαλύτερος 30 ετών. Να εξετάσετε αν υπάρχουν τουλάχιστον δυο παίκτες που έχουν γεννηθεί το ίδιο έτος. (Οι ηλικίες είναι ακέραιοι αριθμοί.)

Λύση

Θα εξετάσουμε αν υπάρχουν τουλάχιστον δυο παίκτες με την ίδια ηλικία. Για την ομάδα των παικτών υπάρχουν 30-21+1=10 διαφορετικές ηλικίες (φωλιές) και έχουμε 11 παίκτες (περιστέρια) άρα από την αρχή της περιστεροφωλιάς υπάρχουν τουλάχιστον δυο παίκτες που έχουν γεννηθεί το ίδιο έτος.

Α108.Ο λοχαγός Καραβανέας επέλεξε από τρεις διαφορετικούς λόχους συνολικά 25 στρατιώτες για μια αποστολή .Την κατάληψη ενός λόφου.Να αποδείξετε ότι ανάμεσα τους υπάρχουν τουλάχιστον 9 στρατιώτες από τον ίδιο λόχο.

Λύση

Ισχύει ότι $25=3\cdot 8+1$ άρα σε τρεις λόχους (φωλιές) τοποθετούμε 25 στρατιώτες (περιστέρια) οπότε από την αρχή της περιστεροφωλιάς από κάποιο λόχο (φωλιά) προέρχονται 8+1=9 στρατιώτες (περιστέρια).

Α109.Σε ένα σχολείο 700 μαθητών,πόσοι τουλάχιστον μαθητές υπάρχουν που έχουν γεννηθεί τον ίδιο μήνα του έτους;

Λύση

Ένα έτος έχει 12 μήνες. Άρα, σε 12 «φωλιές» θα πρέπει να τοποθετηθούν 700 «περιστέρια». Διαιρώντας το 700 διά του 12,έχουμε πηλίκο 58 και υπόλοιπο 4. Επομένως, ο μικρότερος αριθμός προκύπτει,αν τοποθετήσουμε στις 12 φωλιές από 58 άτομα. Τα 4 άτομα που απομένουν τα τοποθετούμε σε διαφορετικές φωλιές. Οπότε υπάρχουν τουλάχιστον 59 άτομα με τον ίδιο μήνα γέννησης.

Α110.Σε ένα συρτάρι υπάρχουν 10 ζευγάρια καλτσών (συνολικά 20 κάλτσες) διαφορετικού χρώματος.Το δωμάτιο είναι σκοτεινό. Πόσες τουλάχιστον κάλτσες πρέπει να τραβήξει κάποιος για να είναι σίγουρος ότι θα έχει τουλάχιστον δυο ίδιου χρώματος;

Λύση

Έστω ότι κάθε φωλια αντιστοιχεί σε ένα χρώμα. Έχουμε 10 φωλιές.Αν αρχίσουμε και βάζουμε σε φωλιές από μια κάλτσα, η εντεκάτη κάλτσα θα μπει σε μια φωλιά όπου υπάρχει ακόμη μια κάλτσα. Άρα 11 κάλτσες χρειάζεται κάποιος να τραβήξει για να είναι σίγουρος ότι θα έχει τουλάχιστον δυο ίδιου χρώματος.

Α111.Ένα καλάθι με φρούτα περιέχει μήλα, μπανάνες και πορτοκάλια. Ποιος είναι ο ελάχιστος αριθμός από φρούτα που πρέπει να τοποθετήσουμε στο καλάθι για να είμαστε σίγουροι ότι στο καλάθι θα βρίσκονται τουλάχιστον 8 μήλα ή τουλάχιστον 6 μπανάνες ή τουλάχιστον 9 πορτοκάλια;

Λύση

Αν στο καλάθι βάλουμε 7 μήλα,5 μπανάνες και 8 πορτοκάλια τότε δεν ικανοποιούνται οι συνθήκες του προβλήματος. Με ένα φρούτο ακόμα ότι και αν είναι θα έχουμε στο καλάθι 7+5+8+1=21 φρούτα. Τοτε,ανεξάρτητα πόσα θα διαλέξουμε από κάθε φρούτο (μπανάνες, μήλο, πορτοκαλί) να βάλουμε στο καλάθι θα ικανοποιούνται οι συνθήκες του προβλήματος.

Α112. Δίνονται 9 ορθογώνια τρίγωνα των οποίων οι κάθετες πλευρές έχουν μήκη με μέτρο φυσικούς αριθμούς και το εμβαδό καθενός τρίγωνου είναι ίσο με 15 m^2.Να δείξετε ότι υπάρχουν 3 τουλάχιστον τρίγωνα από αυτά που είναι ίσα.

Λύση

Ισχύει, $E = \dfrac{\beta \cdot \upsilon}{2} \Rightarrow \beta \cdot \upsilon = 30 \;\; \beta, \upsilon \in \mathbb{N}^*$

Οι διαιρέτες του 30 είναι :{1,2,3,5,6,10,15,30},τα πιθανά ζευγάρια των καθέτων πλευρών των ορθογωνίων τριγώνων θα είναι Α={(1,30),(2,15),(3,10),(5,6)}.Εχουμε 4 περιπτώσεις ζεύγους πλευρών (φωλιές) και 9 τρίγωνα (περιστέρια) θα ισχύει: 9=2*4+1 οπότε από την αρχή της περιστεροφωλιάς υπάρχουν 3 τουλάχιστον τρίγωνα από αυτά που είναι ίσα.

Α113.Ένας μαθητής πρέπει να λύσει 15 προβλήματα σε μια εβδομάδα. Εξηγήστε γιατί τουλάχιστον σε μια ήμερα της εβδομάδας αυτής, ο μαθητής πρέπει να λύσει τουλάχιστον τρία προβλήματα.

Λύση

Θεωρούμε 7 φωλιές με τα ονόματα των ημερών της εβδομάδας. Τοποθετούμε σε κάθε θέση τα προβλήματα (περιστέρια) που πρέπει να λύσει ο μαθητής στην διάρκεια της ημέρας η οποία αντιστοιχεί στο όνομα της φωλιάς. Δηλαδή πρέπει $15 = 2 \cdot 7 + 1$ προβλήματα (περιστέρια) να αντιστοιχιστούν με τις 7 φωλιές.Από την αρχή της περιστε-

ροφωλιάς, τουλάχιστον 3 προβλήματα αντιστοιχούν στην ίδια φώλια. Άρα ο μαθητής θα χρειαστεί να λύσει 3 προβλήματα προβλήματα τουλάχιστον, σε μια μέρα της εβδομάδας.

Α114. Σε ένα διαγωνισμό φυσικής τεθήκαν 5 προβλήματα ,στο διαγωνισμό έλαβαν μέρος 73 μαθητές. Να αποδειχθεί ότι τουλάχιστον 13 μαθητές έλυσαν ακριβώς το ίδιο πλήθος προβλημάτων.

Λύση

Θα χρησιμοποιήσουμε την αρχή της περιστεροφωλιάς, οι 73 μαθητές (περιστέρια) ήταν δυνατό να λύσουν 0,1,2,3,4,5 θέματα (6 φωλιές).Ισχύει 73=6*12+1 άρα 13 μαθητές έλυσαν ακριβώς το ίδιο πλήθος προβλημάτων.

Α115. Σε ένα διαγωνισμό τραγουδιού έλαβαν μέρος 34 διαγωνιζόμενοι. Η ακέραια βαθμολογία που συγκέντρωσε καθένας από τους διαγωνιζόμενους είχε εύρος από 10 έως 20 βαθμούς.Να δείξετε ότι υπάρχουν τουλάχιστον 4 διαγωνιζόμενοι που πήραν την ίδια βαθμολογία.

Λύση

Έχουμε 20-10+1=11 διαφορετικές βαθμολογίες (φωλιές) που πήραν 34 διαγωνιζόμενοι (περιστέρια) ,ισχύει: 34=3*11+1 άρα από την αρχή της περιστεροφωλιάς υπάρχουν τουλάχιστον 4 διαγωνιζόμενοι που πήραν την ίδια βαθμολογία.

Α116. Ο Κωστάκης έφαγε 16 καραμέλες από ένα κουτί που περιέχει 3 ειδών καραμέλες.Βρείτε τον μέγιστο αριθμό καραμελών ίδιου είδους τον οποίο είμαστε απολύτως βέβαιοι ότι έφαγε ο Τοτός.

Λύση

Αν ο Κωστάκης έφαγε το πολύ 5 καραμέλες από κάθε είδος τότε θα είχε φάει $3\cdot 5=15<16$. Ισχύει ότι $16=3\cdot 5+1$ άρα αν θεωρήσουμε τα είδη καραμελών ως φωλιές και τις καραμέλες περιστέρια από την αρχή της περιστεροφωλιάς είναι βέβαιο ότι ο Κωστάκης έφαγε τουλάχιστον 6 καραμέλες από το ίδιο είδος.Συνεπώς, ο ζητούμενος αριθμός είναι 6.

Α117.Ποιος είναι ο μικρότερος δυνατός ακέραιος ν τέτοιος ώστε η ακόλουθη δήλωση είναι αληθής;

Σε κάθε ομάδα 2ν-10 ανθρώπων, υπάρχουν πάντα τουλάχιστον 10 άτομα τα οποία έχουν κοινά γενέθλια;

Θεωρούμε ότι στο χρόνο υπάρχουν 365 διαφορετικές ημερομηνίες γενέθλιων.

(SMO 2013 junior section)

Λύση

Από την αρχή της περιστεροφωλιας σε κάθε ομάδα 365*9+1=3286 ατόμων πρέπει να υπάρχουν τουλάχιστον 10 άτομα που έχουν γεννηθεί την ίδια ημερομηνία.

Προκύπτει η ανίσωση *2ν-10 ≥3286 ή ν ≥1648.Αρα* ο μικρότερος δυνατός ακέραιος ν είναι ο 1648, εφόσον για τον αμέσως προηγούμενο ακέραιο, τον 1647 ισχύει: 2*1647-10=3284<365*9 άρα σε καθεμία από τις 365 ημερομηνίες του χρόνου μπορούμε να μοιράσουμε το πολύ 9 άτομα.

Α118.Σε ένα τουρνουά πυγμαχίας,την πρώτη μέρα κάθε πυγμάχος με όσους πυγμάχους αγωνιστεί, θα αγωνιστεί ακριβώς μια φορά. Να αποδειχτεί ότι στο τέλος της πρώτης μέρας του τουρνουά θα υπάρχουν τουλάχιστον δυο πυγμάχοι που θα έχουν δώσει τον ίδιο αριθμό αγώνων.

Λύση

Έστω ότι έχουμε ν πυγμάχους. Στο τέλος της πρώτης μέρας του τουρνουά κάθε πυγμάχος μπορεί να έχει δώσει 0,1,2,3,…,ν-1 αγώνες. Αν όμως, ο πυγμάχος Rocky έχει αγωνιστεί σε ν-1 αγώνες δεν μπορεί να υπάρχει πυγμάχος με 0 αγώνες, αφού κάθε πυγμάχος θα έχει αγωνιστεί με τον Rocky. Έτσι για τους ν πυγμάχους (περιστέρια) υπάρχουν το πολύ ν-1 αγώνες (φωλιές). Άρα από την αρχή της περιστεροφωλιάς θα υπάρχουν τουλάχιστον δυο πυγμάχοι που θα έχουν δώσει τον ίδιο αριθμό αγώνων.

Α119. Αν α,β,γ είναι θετικοί ακέραιοι αριθμοί ,να αποδείξετε ότι ο αριθμός Δ=(α+β)(β+γ)(γ+α) είναι άρτιος.

Λύση

Έχουμε τρεις αριθμούς α,β,γ (περιστέρια) και δυο περιπτώσεις (φωλιές) αριθμών άρτιος ,περιττός άρα από την αρχή της περιστεροφωλιάς δυο από τους αριθμούς (α,β,γ) είναι του ιδίου είδους (άρτιοι ή περιττοί) τότε το άθροισμα των δυο αυτών αριθμών θα είναι άρτιος άρα και ο Δ είναι άρτιος.

Α120. Να αποδειχθεί ότι ανάμεσα σε 2019 ακεραίους μπορούμε πάντα να βρούμε τουλάχιστον δυο, των οποίων η διαφορά να διαιρείται με τον 2018.

Λύση

Αν διαιρέσουμε τους 2019 ακεραίους αριθμούς με το 2018,θα προκύψουν 2018 υπόλοιπα με τιμές από το σύνολο {0,1,2,3,..,2017}.Αν όμως πάρουμε 2019 στοιχεία από το σύνολο αυτό που έχει 2018 στοιχεία, τουλάχιστον δυο θα είναι ίσα (σύμφωνα με την αρχή της περιστεροφωλιάς). Υπάρχουν λοιπόν δυο αριθμοί (από τους 2019) που αν διαιρεθούν με το 2018 δίνουν το ίδιο υπόλοιπο. Η διαφορά των αριθμών είναι προφανώς πολλαπλάσιο του 2018.

Διοτι, $\alpha-\beta=\left(2018\cdot\lambda+\upsilon\right)-\left(2018\cdot\mu+\upsilon\right)=2018(\lambda-\mu)$ πολλαπλάσιο του 2018.

Α121. Να δείξετε ότι από κάθε σύνολο 50 θετικών ακεραίων είναι δυνατό να επιλέξουμε τέσσερεις αριθμούς α,β,γ,δ τέτοιους ώστε ο αριθμός $(\alpha-\beta)(\gamma-\delta)$ να είναι πολλαπλάσιο του 2009.

Λύση

Αρχικά παρατηρούμε ότι 2009=49*41 .Αν διαιρεθούν οι 50 αριθμοί με το 49 είναι δυνατό να προκύψουν 49 διαφορετικά υπόλοιπα :0,1,2,3,…,47,48. Εφαρμόζουμε την αρχή της περιστεροφωλιάς ,σε 49 υπόλοιπα (φωλιές) αν τοποθετήσουμε 50 αριθμούς (περιστέρια) τουλάχιστον δυο θα έχουν το ίδιο υπόλοιπο αν διαιρεθούν με το 49 έστω οι αριθμοί α,β ,άρα α=49κ+υ,β=49λ+υ $\kappa,\lambda,\upsilon\in\mathbb{N}$ συνεπώς $\alpha-\beta=49(\kappa-\lambda)$ που είναι πολλαπλάσιο του 49.

Με ανάλογο σκεπτικό αν διαιρεθούν οι 50 αριθμοί με το 41 προκύπτουν 41 διαφορετικά υπόλοιπα και μπορούμε να επιλέξουμε δυο αριθμούς γ,δ από τους 50 τέτοιους ώστε να προκύπτει $\gamma-\delta$ πολλαπλάσιο του 41.Τελικα $(\alpha-\beta)(\gamma-\delta)$ να είναι πολλαπλάσιο του 2009.

Α122.Θεωρούμε 27 τυχαίους περιττούς θετικούς ακεραίους, διαφορετικούς μεταξύ τους και μικρότερους του 100.Να αποδείξετε ότι ανάμεσα τους υπάρχει ένα ζευγάρι αριθμών με άθροισμα 102.

Λύση

Θεωρούμε όλους τους περιττούς ακεραίους ανάμεσα τον 1 και τον 99-που το πλήθος τους είναι 50 –και το χωρίσουμε σε ομάδες ως εξής:

{1},{3,99},{5,97},{7,95},…,{49,53},{51}

Έχουμε 24 ζεύγη αριθμών και 2 μονοσύνολα συνολικά 26 ομάδες (φωλιές). Επιλέγουμε 27(περιστερια) από τους συνολικά 50 ακεραίους αριθμούς. Επειδή 27=1*26+1 Συμφώνα με την αρχή της περιστεροφωλιάς συμπεραίνουμε ότι δυο τουλάχιστον από αυτούς ανήκουν στην ίδια ομάδα. Το άθροισμα τους θα είναι 102.
(Αν από τους 27 αριθμούς που θα επιλέξουμε οι δυο είναι το 1 και το 51,τοτε τους υπολοίπους 25 θα τους πάρουμε από τα 24 εναπομένοντα ζεύγη άρα δυο τουλάχιστον αριθμοί θα προέρχονται από ένα ζεύγος και έτσι θα έχουμε άθροισμα 102.

Α123. Μέσα σε ένα κουτί έχουμε τοποθετήσει:

1 κάρτα με τον αριθμό 1
2 κάρτες με τον αριθμό 2
3 κάρτες με τον αριθμό 3
………………..
Ν κάρτες με τον αριθμό Ν

Ποιος είναι ο ελάχιστος αριθμός από κάρτες που πρέπει να βγάλουμε τυχαία από το κουτί,ώστε να υπάρχουν με βεβαιότητα 8 κάρτες με τον ίδιο αριθμό;

Λύση

Η χειρότερη περίπτωση είναι να πάρουμε:

1 κάρτα με την ένδειξη 1
2 κάρτες με την ένδειξη 2
3 κάρτες με την ένδειξη 3
…………….
7 κάρτες με την ένδειξη 7

Δηλαδή 1+2+3+4+5+6+7=28 κάρτες

Και στην συνέχεια

7 κάρτες με την ένδειξη 8
7 κάρτες με την ένδειξη 9
…………….
7 κάρτες με την ένδειξη Ν

Δηλαδή συνολικά: $7\cdot(N-8+1)=7\cdot(N-7)$ κάρτες

Αν πάρουμε τώρα μια από τις υπόλοιπες κάρτες που υπάρχουν στο κουτί ,τότε σίγουρα θα κάνουμε οκτάδα. Άρα, πρέπει να πάρουμε τουλάχιστον 29+7(Ν-1) κάρτες.

Α124. Ένα κουτί περιέχει 900 κάρτες, στην κάθε κάρτα είναι γραμμένος ένας θετικός τριψήφιος ακέραιος αριθμός. Ο Γιάννης βγάζει από το κουτί έναν αριθμό από κάρτες και υπολογίζει για τον αριθμό κάθε κάρτας τον άθροισμα των ψηφίων του. Πόσες κάρτες τουλάχιστον πρέπει να έχει τραβήξει ο Γιάννης για να είναι βέβαιο ότι τουλάχιστον 3 κάρτες θα έχουν αριθμούς με το ίδιο άθροισμα ψηφίων;

Λύση

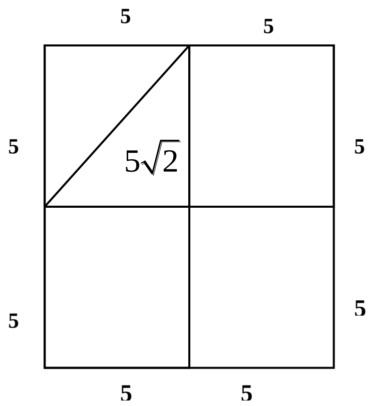
Οι τριψήφιοι αριθμοί είναι από το 100 μέχρι το 999 και για το άθροισμα των ψηφίων των συγκεκριμένων αριθμών S ισχύει: $1\leq S\leq 27$,άρα έχουμε 27 διαφορετικά αθροίσματα ψηφίων, παρατηρούμε δυο συγκεκριμένους αριθμούς,το 100 έχει άθροισμα 1 και το 999 έχει άθροισμα 27.Χρησιμοποιούμε την αρχή της περιστεροφωλιάς. Θεωρούμε ως φωλιές τα 27 αθροίσματα , στην φωλιά 1 μπαίνει μόνο ένας αριθμός (περιστέρι) ο αριθμός 100,στην φωλιά 27 μόνο ο αριθμός 999(περιστέρι),στις υπόλοιπες 25 φωλιές πρέπει να μπουν από δυο αριθμοί (περιστέρια): 2+25+25=52 αριθμοί. Με ένα αριθμό

ακόμα, σύνολο 53 είναι βέβαιο ότι τρεις τουλάχιστον κάρτες θα έχουν αριθμούς με το ίδιο άθροισμα ψηφίων.

Α125.Ο καλός,ο κακός και ο άσχημος εξασκούνται στην σκοποβολή στην πινακίδα στην είσοδο της πόλης Pigeon City.Η πινακίδα έχει τετραγωνικό σχήμα με πλευρά 10 cm. Πρώτος ρίχνει ο καλός, αδειάζει το εξάσφαιρο του και μόνο μια σφαίρα δεν βρίσκει στόχο.Να δείξετε ότι τουλάχιστον δυο από τις σφαίρες που βρήκαν στόχο απέχουν λιγότερο από $5\sqrt{2}$ cm.

Λύση

Χωρίζουμε την πινακίδα σε τέσσερεις τετραγωνικούς τομείς με πλευρά 5 cm. Έχουν σφηνωθεί 5 σφαίρες στην πινακίδα άρα τουλάχιστον δυο σφαίρες έχουν καρφωθεί στον ίδιο τετραγωνικό τομέα. Εφόσον τώρα η μεγαλύτερη απόσταση ανάμεσα σε δυο σημεία ενός τετραγωνικού τομέα ισούται με την διαγώνιο του ($5\sqrt{2}$ cm) ισχύει το ζητούμενο.



Α126.Δίνονται 5 σημεία στο επίπεδο με ακέραιες συντεταγμένες.Να αποδείξετε ότι το μέσο ενός ευθυγράμμου τμήματος που ενώνει ένα τουλάχιστον ζεύγος από τα σημεία έχει επίσης ακέραιες συντεταγμένες.

Λυση

Το μέσο ενός ευθυγράμμου τμήματος που ενώνει τα σημεία (α,β), (γ,δ) έχει συντεταγμένες $\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2},\dfrac{\gamma+\delta}{2}\right)$.Τωρα αυτό έχει ακέραιες συντεταγμένες αν και μόνο αν α και β είναι και τα δυο άρτια ,είτε είναι και τα δυο περιττά και ταυτόχρονα ισχύει το ίδιο και για τα γ,δ. Θα θεωρήσουμε 4 φωλιές :(άρτιος , άρτιος), (άρτιος ,περιττός), (περιττός, περιττός), (περιττός ,άρτιος) για τα 5 σημεία (περιστέρια) που δοθήκαν ,άρα από την αρχή της περιστεροφωλιάς θα έχουμε δυο τουλάχιστον σημεία σε μια φωλιά άρα και μέσο με ακέραιες συνταγμένες.

Α127.Να αποδείξετε ότι αν επιλεγούν τυχαία 100 θετικοί ακέραιοι αριθμοί τότε δυο ή περισσότεροι από αυτούς έχουν άθροισμα πολλαπλάσιο του 100.

Λύση

Συμβολίζουμε τους αριθμούς ως $X_1, X_2, \ldots, X_{100}$ και θεωρούμε τα αθροίσματα $S1=X_1$, $S2=X_1+X_2$, $S3=X_1+X_2+X_3$,$S100=X_1+X_2+X_3+\ldots+X_{100}$

Έστω ότι κανένα από αυτά τα αθροίσματα δεν είναι πολλαπλάσιο του 100-αν ήταν τότε το πρόβλημα έχει λυθεί- τότε διαιρώντας καθένα από αυτά με το 100 μπορεί να προκύψει υπόλοιπο από 1,2,3,…,99 και άρα από την αρχή της περιστεροφωλιάς δυο από αυτά τα αθροίσματα αφήνουν το ίδιο υπόλοιπο.

Ας πούμε χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι είναι το S_λ και το S_μ ,($1\leq\mu<\lambda\leq100$) τότε

$S_\lambda - S_\mu = X_{\mu+1}+X_{\mu+2}+\ldots\ldots+X_{\lambda-1}+X_\lambda$ είναι πολλαπλάσιο του 100

Α128. Πενήντα βουλευτές πρόκειται να καθίσουν σε ένα στρογγυλό τραπέζι για μια συνεδρίαση με θέμα την διάσωση ενός σπανίου ζωικού είδους.Θα λάβουν μέρος 25

βουλευτές της συμπολίτευσης και 25 βουλευτές της αντιπολίτευσης.Να αποδείξετε ότι όπως και να καθίσουν οι πενήντα βουλευτές στο στρογγυλό τραπέζι πάντα θα υπάρχει βουλευτής του οποίου οι γείτονες είναι βουλευτές της αντιπολίτευσης

Λύση

Συμβολίζουμε ως *μαύρους* βουλευτές τους βουλευτές της συμπολίτευσης και *γκρίζους* του βουλευτές της αντιπολίτευσης.Αρκεί να δείξουμε ότι όπως και να καθίσουν οι 50 βουλευτές πάντα θα υπάρχει βουλευτής που θα βρίσκεται ανάμεσα σε δυο γκρίζους βουλευτές.Υποθέτουμε ότι υπάρχει μια τοποθέτηση στην οποία κανείς βουλευτής δεν βρίσκεται ανάμεσα σε δυο γκρίζους βουλευτές.Ονομάζουμε συρφετό κάθε ομάδα μαύρων ή γκρίζων βουλευτών που κάθονται όλοι μαζί και αριστερά και δεξιά τους υπάρχει βουλευτής του αντίθετου χρώματος.Από υπόθεση,κάθε συρφετός γκρίζων βουλευτών έχει το πολύ δυο γκρίζους βουλευτές (αν υπήρχαν τρεις διαδοχικοί γκρίζοι βουλευτές ο μεσαίος θα βρισκόταν ανάμεσα σε δυο γκρίζους) και υπάρχουν τουλάχιστον δυο μαύροι βουλευτές στο κενό ανάμεσα σε δυο διαδοχικούς συρφετούς γκρίζων.Αφού υπάρχουν τουλάχιστον 13 συρφετοί γκρι βουλευτών τότε πρέπει να υπάρχουν τουλάχιστον 2*13=26 μαύροι βουλευτές.Άτοπο.Άρα δεν ισχύει η αρχική υπόθεση.

Α129.Ο Παπαδόπουλος διατηρεί ένα διαδικτυακό κατάστημα και εμπορεύεται φορητούς υπολογιστές.Κοιτώντας τις πωλήσεις που έκανε στο χρονικό διάστημα από την 1η Μαρτίου μέχρι την 16η Μαΐου, έκανε τις εξής παρατηρήσεις

- Κάθε μέρα κατόρθωσε να πουλήσει τουλάχιστον ένα υπολογιστή.
- Δεν πούλησε συνολικά παραπάνω από 132 υπολογιστές. (για το παραπάνω χρονικό διάστημα)

Να αποδείξετε ότι υπάρχουν κάποιες συνεχόμενες μέρες που ο Παπαδόπουλος πούλησε ακριβώς 21 υπολογιστές.Το κατάστημα είναι διαδικτυακό,άρα στο παραπάνω χρονικό διάστημα δεν υπάρχουν αργίες, ούτε ημέρες που το κατάστημα δεν λειτούργησε.

Λύση

Σκεφτόμαστε ως εξής:

Από την 1η Μαρτίου μέχρι την 16η Μαΐου έχουμε συνολικά 77 ημέρες. Έστω Y_i ο αριθμός των υπολογιστών που πούλησε μέχρι και την i μέρα.Έχουμε λοιπόν:

$$1 \leq Y_1 < Y_2 < \dots < Y_{77} \leq 132 \text{ προσθέτουμε το 21}$$

$$22 \leq Y_1+21 < Y_2+21 < \dots < Y_{77}+21 \leq 153$$

Όμως μεταξύ των παραπάνω 154 αριθμών

$$Y_1, Y_2, .., Y_{77}, .. Y_1+21, Y_2+21, \dots, Y_{77}+21$$

από την αρχή της περιστεροφωλιάς θα υπάρχουν σίγουρα δυο ίσοι αριθμοί άρα υπάρχουν δείκτες ημερών i και j τέτοια ώστε $Y_i = Y_j + 21$ έτσι ο Παπαδόπουλος θα έχει πουλήσει ακριβώς 21 υπολογιστές τις μέρες j+1,j+2,..,i.

Α130.Στο Αβγατηγανιστάν στην επαρχία Μπέικον η γλώσσα που μιλούν οι γηγενείς κάτοικοι,τα Αλαμπουρνέζικα αποτελείται από 21 φωνήεντα και 32 σύμφωνα.Ο Τοτός - διακεκριμένος γλωσσολόγος του Αβγατηγανιστάν- έχει διαπιστώσει ότι κάθε ακολουθία γραμμάτων του αλφάβητου αποτελεί λέξη της συγκεκριμένης γλώσσας, αρκεί κανένα γράμμα της ακολουθίας να μην επαναλαμβάνεται δυο φορές και να μην παρουσιάζονται δυο σύμφωνα συνεχόμενα. Αν διαιρέσουμε το αλφάβητο σε έξι υποσύνολα χωρίς κοινά στοιχεία μεταξύ τους, να αποδείξετε ότι τα γράμματα (στοιχεία) ενός τουλάχιστον από τα υποσύνολα αυτά μπορούν να σχηματίσουν λέξη της γλώσσας.

Λύση
Αρκεί να αποδείξουμε ότι τα στοιχεία ενός τουλάχιστον από τα έξι υποσύνολα,τα σύμφωνα είναι το πολύ κατά ένα περισσότερα από τα φωνήεντα.
Υπάρχουν 32-21=11 σύμφωνα παραπάνω από τα φωνήεντα.
Έστω $A_1,A_2,\ldots A_6$ τα έξι υποσύνολα και
B_i=|αριθμός συμφώνων – αριθμός φωνήεντων| του υποσύνολου A_i,με i=1,2,3,…,6.
Είναι τότε: $B_1+B_2+\ldots B_6=11$
Συνεπώς, ένα τουλάχιστον από τα $B_1,B_2,B_3,\ldots,B_6$ είναι μικρότερο του 2.Αν λοιπόν για κάποιο κ είναι $B_\kappa<2$ τότε τα στοιχεία του A_κ σχηματίζουν λέξη.

Α131.Δίνονται 76 σημεία στο επίπεδο από τα οποία δεν υπάρχουν τρία συνευθειακά. Καθένα από αυτά χρωματίζεται , χρησιμοποιώντας ένα από 5 δεδομένα χρώματα. Να αποδείξετε ότι έχουν χρωματιστεί ,οι κορυφές τουλάχιστον 320 σκαληνών τριγώνων, με το ίδιο χρώμα.
Λύση
Βλέπουμε ότι $76=5\cdot 15+1$άρα από την αρχή της περιστεροφωλιάς θα υπάρχουν 16 σημεία χρωματισμένα με το ίδιο χρώμα. Με κορυφές ν σημεία ορίζονται

$$\binom{\nu}{2}=\frac{\nu!}{2!(\nu-2)!}=\frac{(\nu-1)\nu}{2}$$ ευθύγραμμα τμήματα και

$$\binom{\nu}{3}=\frac{\nu!}{2!(\nu-3)!}=\frac{(\nu-2)(\nu-1)\nu}{6}$$ τρίγωνα. Από αυτά ,το πολύ $2\cdot\binom{\nu}{2}=\nu(\nu-1)$ τρίγωνα μπορεί να είναι ισοσκελή,(στα ισοσκελή έχουμε μετρήσει και τα ισόπλευρα) διότι σε αντίθετη περίπτωση για κάποιο τμήμα ΑΒ θα μπορούσαμε να κατασκευάσουμε τουλάχιστον τρία ισοσκελή τρίγωνα, αλλά, αν είχαμε τρία τρίγωνα ΑΒΓ,ΑΒΔ, και ΑΒΕ τότε τα Γ,Δ,Ε είναι συνευθειακά, άτοπο. Έτσι, ο αριθμός των σκαληνών τριγώνων θα είναι τουλάχιστον ίσος με

$$\frac{(\nu-2)(\nu-1)\nu}{6}-\nu(\nu-1)=\frac{(\nu-2)(\nu-1)\nu}{6}-\frac{6\nu(\nu-1)}{6}=\frac{\nu(\nu-1)(\nu-8)}{6}.$$

Άρα για ν=16 με ένα από τα δεδομένα χρώματα θα έχουμε τουλάχιστον

$$\frac{16(16-1)(16-8)}{6}=\frac{16\cdot 15\cdot 8}{6}=8\cdot 5\cdot 8=320$$ σκαληνά τρίγωνα.

(Στα ισοσκελή τρίγωνα που υπολογίσαμε συμπεριλάβαμε και τα ισόπλευρα.)

Α132.Διαιρούμε ένα κύκλο σε 36 ίσα τόξα χρησιμοποιώντας 36 σημεία. Χρωματίζουμε 6 από αυτά τα σημεία μπλε και αλλά 6 κόκκινα. Να αποδείξετε ότι υπάρχουν δυο ίσες χορδές ,η μια να έχει κόκκινα άκρα και η άλλη μπλε!
Λύση
Έστω ότι το μήκος του κύκλου είναι 36 μονάδες, τότε το μήκος του τόξου με άκρα τα δεδομένα σημεία μπορεί να πάρει μόνο μια από 35 δυνατές τιμες.Θεωρουμε όλα τα δυνατά τόξα που έχουν άκρα διαφορετικού χρώματος και είναι τέτοια ώστε όταν πηγαίνουμε από το κόκκινο άκρο προς το μπλε να κινούμαστε δεξιόστροφα. Το πλήθος αυτών των τόξων είναι 36.Αρα από την αρχή της περιστεροφωλιάς, υπάρχουν δυο τόξα ΑΒ,ΓΔ , με ίδιο μήκος. Τότε, η χορδή ΑΓ με κόκκινα άκρα ισούται με την ΒΔ με μπλε άκρα.

Α133. Το δάσος της περιστέρας στην Λοξολάνδη αποτελείται από ακριβώς 2017 δέντρα ,είναι γνωστό ότι από κάθε τριάδα δέντρων μπορούμε να επιλέξουμε δυο δέντρα τέτοια ώστε η απόσταση τους να είναι μικρότερη του 1 μέτρου. Να αποδείξετε ότι υπάρχει μια κυκλική περιοχή στο δάσος που περιέχει ακριβώς 1009 δέντρα.

Το πρόβλημα είναι ισοδύναμο με το εξής:

Έχουμε 2017 σημεία στο επίπεδο και για κάθε τριάδα σημείων δυο εξ αυτών απέχουν λιγότερο από 1.Να αποδείξετε ότι υπάρχει κύκλος που περιέχει ακριβώς 1009 σημεία.

Λύση

Έστω Α1 ένα από τα 2017 σημεία ,από την αρχή της περιστεροφωλιάς είναι δυνατό να ισχύουν δυο περιπτώσεις:

● Να υπάρχουν 1008 σημεία $A_2,A_3,A_4,\dots,A_{1009}$, τέτοια ώστε:

$$A_1A_2 \le 1, A_1A_3 \le 1, .., A_1A_{1009} \le 1$$

Τότε ο κύκλος με κέντρο Α1 και ακτίνα 1 περιέχει 1009 σημεία: $A_2,A_3,A_4,\dots,A_{1009}$

● Να υπάρχουν 1009 σημεία $B_1,B_2,B_3,\dots,B_{1009}$ τέτοια ώστε:

$$A_1B_1 \ge 1, A_1B_2 \ge 1, .., A_1B_{1009} \ge 1$$

Εφόσον όμως στην τριάδα σημείων A_1,B_1,B_2 μπορούμε(από υπόθεση) να επιλέξουμε δυο σημεία τέτοια ώστε η απόσταση τους να είναι μικρότερη από 1 και είναι γνωστό ότι $A_1B_1 \ge 1$, $A_1B_2 \ge 1$ πρέπει να ισχύει $B_1B_2 < 1$.Ομοίως ,

$$B_1B_3 < 1, ..., B_1B_{1009} < 1$$

Τότε $B_1,B_2,B_3,\dots,B_{1009}$ είναι 1009 σημεία που περιλαμβάνονται στο κύκλο με κέντρο B_1και ακτίνα 1.

Άρα, το ζητούμενο αποδείχθηκε σε κάθε περίπτωση.*(Προκριματικός 2017 Τσεχία)*

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΠΡΟΣ ΛΥΣΗ (Παίγνια-Αναλλοίωτο)

Α134.Στο τραπέζι υπάρχουν 26 σπίρτα.Δυο μαθητές (ο Α και ο Β) ο ένας μετά τον άλλον παίρνουν 1 ή 2 ή 3 ή 4 σπίρτα. Όποιος πάρει τελευταίος σπίρτα κερδίζει. Πρώτος παίζει ο Α. Τι πρέπει να κάνει για να κερδίσει;

Λύση

Διαιρούμε το 26 με το 5 και προκύπτει υπόλοιπο 1.Ο Α παίρνει αρχικά 1 σπίρτο. Στην συνέχεια, όταν ο Β πάρει 1,2 ,3 ή 4 σπίρτα, ο Α θα πρέπει να πάρει αντίστοιχα 4,3,2 ή 1 .Με αυτόν τον τρόπο κερδίζει το παιχνίδι.Ο Α καταφέρνει μετά από κάθε παίξιμό του να υπάρχουν πολλαπλασιο του 5 σπίρτα στο τραπέζι. Έτσι κάποια στιγμή ο Β θα αναγκαστεί να παίξει με 5 σπίρτα στο τραπέζι. Ότι και να κάνει το παιχνίδι είναι χαμένο.

Α135. Δυο παίκτες Α και Β παίζουν εναλλάξ και από ένα σωρό με 19 φασόλια μπορούν να πάρουν είτε ένα είτε δυο φασόλια. Ο παίκτης Α παίζει πρώτος. Το παιχνίδι τελειώνει όταν ένας από τους δυο παίκτες πάρει και το τελευταίο φασόλι και νικητής είναι αυτός που έχει άρτιο αριθμό φασολιών. Υπάρχει στρατηγικής νίκης για κάποιον από τους δυο παίκτες;

Λύση

Ο παίκτης Α που παίζει πρώτος έχει στρατηγική νίκης, αρχικά παίρνει 2 φασόλια και κατόπιν «καθρεφτίζει» τις κινήσεις του παίκτη Β. Όταν ο παίκτης Β παίρνει 1 φασόλι παίρνει και ο Α 1 φασόλι όταν ο παίκτης Β παίρνει 2 φασόλια παίρνει και ο

Β 2 φασόλια.Έτσι πάντα θα υπάρχει περιττό πλήθος φασολιών μετά την κίνηση του παίκτη Α.
-Αν ο σωρός φτάσει στα 3 φασόλια τότε ο Α θα έχει 9 φασόλια και ο Β 7 φασόλια παίζει ο Β και ότι και αν κάνει χάνει.
-Αν ο σωρός φτάσει στο 1 φασόλι τότε ο Α θα έχει 10 φασόλια και ο Β 8 φασόλια παίζει ο Β και ότι και αν κάνει χάνει.
(στρατηγική Tweedledum και Tweedledee)
Α136.Ο Γιάννης έγραψε ένα θετικό ακέραιο Ν στον πίνακα (Ν >1).Ο Δημήτρης με πρώτο αριθμό τον Ν γράφει μια σειρά από αριθμούς στον πίνακα ακολουθώντας το μοτίβο:Λαμβάνει ένα διαιρέτη μεγαλύτερο του 1 του προηγούμενου αριθμού και είτε τον προσθέτει είτε τον αφαιρει από τον αριθμό. Είναι δυνατό για τον Δημήτρη ανεξάρτητα από τον αριθμό που θα επιλέξει ο Γιάννης να καταλήξει στον αριθμό 2018;
Λυση
Ο Δημήτρης προσθέτει 2017 φορές τον αριθμο Ν και κατασκευάζει τον 2018Ν κατόπιν αφαιρεί τον 2018 Ν-1 φορές όπου και λαμβάνει το 2018.
Α137. Οι μαθητές Χ και Υ παίζουν ένα παιχνίδι ως εξής:
Επιλέγουν εναλλάξ ο ένας μετά τον άλλο , έναν από τους αριθμούς 1 και 2.Αρχιζει ο Χ επιλέγοντας τον αριθμό $x_1 \in \{1,2\}$ και συνεχίζει ο Υ επιλέγοντας τον αριθμό $y_1 \in \{1,2\}$ και καταγράφοντας τον άθροισμα $\Sigma_1 = x_1 + y_1$.Στην συνέχεια ο Χ επιλέγει τον αριθμό $x_2 \in \{1,2\}$ και καταγράφει το άθροισμα $\Sigma_2 = \Sigma_1 + x_2$,ενώ ο Υ συνεχίζοντας επιλέγει τον αριθμό $y_2 \in \{1,2\}$ και καταγράφει το άθροισμα $\Sigma_3 = \Sigma_2 + y_2$ κ.λ.π.Νικητής αναδεικνύεται ο μαθητής που θα καταγράψει σε μια επιλογή του ως άθροισμα τον αριθμό 200.Να αιτιολογήσετε γιατί ο μαθητής Χ έχει στρατηγική νίκης;Ισχύει το ίδιο,αν ο νικητής αναδεικνύεται όταν το άθροισμα γίνει 300;
(Θαλής 2001)
Λύση
Παρατηρούμε ότι είναι δυνατόν μετά από κάθε επιλογή των δυο μαθητών, έστω x_i, y_i, να ισχύει ότι $x_i + y_i = 3$.Πραγματικά, αν ο μαθητής Χ επιλέξει $x_i = 1$ τότε ο μαθητής Υ επιλέγει $y_i = 2$, αν ο μαθητής Χ επιλέξει $x_i = 2$ τότε ο μαθητής Υ επιλέγει $y_i = 1$.Έτσι είναι δυνατόν το συνολικό άθροισμα μετά από δυο διαδοχικές επιλογές των μαθητών να αυξάνεται κάθε φορά κατά 3.
Ο μαθητές Χ που αρχίσει πρώτος πρέπει να παρατηρήσει ότι 200=66*3+2 , οπότε θα κάνει την πρώτη επιλογή του $x_i = 2$.Στην συνέχεια μπορεί (ο Χ) ανεξάρτητα από τις επιλογές του μαθητή Υ να μεγαλώσει κάθε φορά το προηγούμενο συνολικό άθροισμα κατά 3 και έτσι να φτάσει πρώτος το 200.
Δεν ισχύει το ίδιο αν το ζητούμενο τελικό άθροισμα είναι το 300, γιατί 300=100*3, οπότε ο μαθητής Υ που επιλέγει δεύτερος μπορεί πρώτος να καταγράψει αυτό το άθροισμα. ■

A138.Ο Γιώργος παίζει το παιχνίδι 102 στον υπολογιστή. Στην αρχική οθόνη φαίνεται ο αριθμός 123,ο παίκτης έχει στην διάθεση του ένα λεπτό και την δυνατότητα να αλλάξει όπως θέλει την θέση των ψηφίων του αριθμού.Μόλις περάσει το λεπτό,το πρόγραμμα προσθέτει στον αριθμό της οθόνης τον αριθμό 102.Στον επόμενο γύροτο ίδιο,πάλι χρονικό διάστημα ένα λεπτού,ο παίκτης μπορεί να αλλάξει τα ψηφία όπως θέλει και στην συνέχεια προστίθεται ο αριθμός102. Σκοπος του παίκτη είναι να μην προκύψει άθροισμα τετραψήφιος αριθμός.



Υπάρχει στρατηγική νίκης ενάντια στο πρόγραμμα;
(Tournament of towns)

Λυση

Είναι εφικτό να μην εμφανιστεί τετραψήφιος στην οθόνη αν ακολουθήσουμε την εξής στρατηγική:Στο 123 αλλάζουμε θέση στα ψηφία και το κανουμε 312 τοτε αφήνουμε το παιχνιδι να προσθετει 102 και γινεται διαδοχικά 414,516,618 και 720 .Αλλάζουμε το 720 σε 027 το οποιο θα γίνει (με πρόσθεση από το πρόγραμμα) 129 και μετά 231 τοτε το κάνουμε 312 και πάλι από την αρχή.

A139.Έστω ένας σωρός από 100 πέτρες, ανά δυο έχουν διαφορετικό βάρος. Σε κάθε πέτρα κολλάμε ένα αυτοκόλλητο με το βάρος της .Είναι δυνατό να «αλλάξουμε» ένα ή περισσότερα αυτοκόλλητα στις πέτρες έτσι ώστε, αν επιλέξουμε οποιαδήποτε ομάδα από 1 έως 99 πέτρες από τον σωρό το άθροισμα των βαρών στα αυτοκόλλητα τους να είναι πάντα λανθασμένο; *(Tournament of towns)*

Λύση

Ας τοποθετήσουμε τις πέτρες κυκλικά σε αύξουσα ωρολογιακά σειρά βάρους,με το σωστό αυτοκόλλητο στην κάθε πέτρα.Αν σε αυτή τη διάταξη μετακινήσουμε κάθε αυτοκόλλητο κατά μία θέση αντιωρολογιακά,τότε η βαρύτερη όλων πέτρα θα έχει το αυτοκόλλητο με τον μικρότερο αριθμό,ενώ κάθε άλλη πέτρα θα έχει αυτοκόλλητο με αριθμό μεγαλύτερο από το πραγματικό της βάρος.

Αν τώρα πάρουμε μια οποιαδήποτε ομάδα 1-99 πετρών που δεν περιέχει τη βαρύτερη πέτρα,σε κάθε περίπτωση το άθροισμα των αριθμών των αυτοκόλλητων τους θα είναι μεγαλύτερο από το άθροισμα των αντίστοιχων πραγματικών βαρών.Αν πάλι πάρουμε μια οποιαδήποτε ομάδα 1-99 πετρών που περιέχει και τη βαρύτερη πέτρα, τότε η συμπληρωματική της ομάδα όλων των υπόλοιπων πετρών δεν θα την περιέχει, επομένως στη μεν συμπληρωματική ομάδα πετρών το άθροισμα των αριθμών των αυτοκόλλητων τους θα είναι μεγαλύτερο από το άθροισμα των αντίστοιχων πραγματικών βαρών, ενώ στην κύρια ομάδα πετρών που περιλαμβάνει και τη βαρύτερη πέτρα το άθροισμα των αριθμών των αυτοκόλλητων τους θα είναι μικρότερο από το άθροισμα των αντίστοιχων πραγματικών βαρών, δεδομένου ότι το άθροισμα των 100 αριθμών των αυτοκόλλητων είναι ακριβώς ίσο με το άθροισμα των πραγματικών βαρών όλων των πετρών.Επομένως, το ζητούμενο είναι πάντα δυνατό.

A140. Δυο παίκτες σε διαδοχικούς γύρους παίζουν εναλλάξ χρωματίζοντας τα μοναδιαία τετράγωνα ενός 4x4 τετραγωνικού πλέγματος, ένα την κάθε φορά. Όταν μετά την κίνηση ενός παίκτη ένα τετράγωνο 2x2 έχει πλήρως χρωματιστεί τότε αυτός ο παί-

κτης χάνει. Ποιος από τους δυο παίκτες έχει στρατηγική νίκης; Ο πρώτος ή ο δεύτερος;

Λύση

Ο δεύτερος παίκτης έχει στρατηγική νίκης . Σε κάθε κίνηση του πρώτου παίκτη , ο δεύτερος απάντα χρωματίζοντας στην ίδια στήλη το μοναδιαίο τετράγωνο δυο τετράγωνα πάνω (ή κάτω) . Είναι εύκολο να δειχτεί ότι σε κάθε κίνηση του πρώτου υπάρχει η αντίστοιχη κίνηση του δεύτερου.

A141. Δυο φίλοι παίζουν το παρακάτω παιχνίδι .

Γράφουν στον πίνακα την εξίσωση $*x^2+*x+*=0$.Αυτος που παίζει πρώτος, πρέπει να αντικαταστήσει τους αστερίσκους με τρεις μη μηδενικούς πραγματικούς αριθμούς. Το ίδιο κάνει και ο δεύτερος παίκτης.

Θα κερδίσει αυτός , που η εξίσωση που θα σχηματίζει θα έχει δυο ρίζες πραγματικές και άνισες .Να δείξετε ότι υπάρχει ένας απλός τρόπος επιλογής των συντελεστών, ώστε ο παίκτης να κερδίζει πάντα. (Ευκλείδης Β)

Λύση

Έστω $αx^2+βx+γ=0$ (1).Για να παραγοντοποιήσουμε την (1) ένας τρόπος, θα ήταν να γράψουμε το $γ=-α-β$, οπότε η (1) γίνεται $αx^2+βx-α-β=0$ ή $α(x^2-1)+β(x-1)=0$ ή

$(x-1)(α(x+1)+β)=0$ ή $(x-1)(αx+α+β)=0$ οπότε $x=1$ ή $x=-\frac{a+\beta}{\alpha}$

Οι ρίζες είναι πραγματικές διότι $\alpha \neq 0$.

Για να είναι άνισες θα πρέπει $-\frac{a+\beta}{\alpha} \neq 1 \Leftrightarrow -\alpha-\beta \neq \alpha \Leftrightarrow 2\alpha \neq -\beta \Leftrightarrow \alpha \neq \frac{-\beta}{2}$

Δηλαδή, αν τα α,β,γ ικανοποιούν την σχέση $\gamma=-\alpha-\beta \Leftrightarrow \gamma+\alpha+\beta=0, \alpha \neq -\frac{\beta}{2}$ θα έχουμε πάντα δυο ρίζες πραγματικές και άνισες. ■

A142.Έστω ότι έχουμε τρεις σωρούς από βώλους. Στον πρώτο σωρό έχουμε 12 βώλους ,στον δεύτερο σωρό έχουμε 123 βώλους και στον τρίτο σωρό έχουμε 1234 βώλους. Θεωρούμε ως μια κίνηση:

- Είτε να αφαιρέσουμε τον ίδιο αριθμό βώλων από κάθε ένα από τους τρεις σωρούς.
- Είτε να χωρίσουμε έναν από τους σωρούς (με άρτιο πλήθος βώλων) σε δυο υποσωρούς με ίδιο πλήθος βώλων ,να αφαιρέσουμε τον ένα υποσωρό και να προσθέσουμε τους βώλους του άλλου υποσωρού σε ένα από τους δυο άλλους σωρούς.

Είναι δυνατό να βρεθεί κατάλληλη ακολουθία κινήσεων η οποία να οδηγεί στις καταστάσεις:

i .Να μην μείνει κανένας βώλος στον $1^ο$ και στον $2^ο$ σωρό.

ii.Να μην μείνει κανένας βώλος στον $1^ο$ και στον $3^ο$ σωρό.

iii.Να μην μείνει κανένας βώλος στον $2^ο$ και στον $3^ο$ σωρό.

iv.Να μην μείνει κανένας βώλος στους τρεις σωρούς

Λύση

i.(12,123,1234) ► (0,111,1222) ► (611,111,611) ►(500,0,500) ►(250,250,500) ► (0,0,250)

ii. (12,123,1234) ► (0,111,1222) ► (611,111,611) ►(500,0,500) ►(250,250,500) ► (250,500,250) ►(0,0,250)

iii. (12,123,1234) ► (0,111,1222) ► (611,111,611) ►(500,0,500) ►(500,250,250) ►(250,0,0)
iv.Δεν είναι δυνατό. Διότι όταν αφαιρούμε βώλους πάντα γίνεται σε πολλαπλάσιο του 3 αλλά 12+1223+1234=1369 που δεν είναι πολλαπλάσιο του 3. ■

Α143. Ο Αντώνης και ο Βασίλης παίζουν το ακόλουθο παιχνίδι.Ο Αντώνης αρχίζει γράφοντας σε ένα χαρτί το 0 ή το 1.Σε κάθε κίνηση ο Αντώνης επιλέγει να γράψει το 0 ή το 1.Απο την άλλη ο Βασίλης μετά από κάθε κίνηση του Αντώνη κάνει την δική του κίνηση,επιλέγει δυο ψηφία της ακολουθίας όποια θέλει και τα αντιμεταθέτει.Το παιχνίδι τελειώνει όταν συμπληρωθούν 1999 ψηφία.Νικητής είναι ο Βασίλης όταν η ακολουθία είναι συμμετρική ως προς το μεσαίο (1000° ψηφίο) ενώ αν δεν είναι κερδίζει ο Αντώνης.Υπάρχει στρατηγική νίκης για κάποιον από τους δυο;

Λύση

Υπάρχει στρατηγική νίκης για τον Βασίλη.Ο Βασίλης αφήνει τον Αντώνη να συμπληρώνει τα ψηφία μέχρι την $1000^η$ θέση και απλά αντιμεταθέτει ότι ζεύγος αυτός θέλει,όταν όμως φτάνει να κάνει ο Αντώνης την 1000+i κίνηση.(i >0) κοιτάζει τα ψηφία στις θέσεις 1000+i,1000-i,αν είναι ίδια τα αντιμεταθέτει αν είναι διαφορετικά κοιτάζει το 1000° ψηφίο και το αντιμεταθέτει με το 1000-i ή 1000+i,οποίο από τα δυο είναι διαφορετικό.Μετά την τελευταία κίνηση του Βασίλη,το μοτίβο θα είναι απολύτως συμμετρικό. ■

Α144.Δυο παίκτες ξεκινούν από τον αριθμό 60 και σε διαδοχικούς γύρους αφαιρούν εναλλάξ από τον εκάστοτε αριθμό, έναν από τους θετικούς διαιρέτες του. Χάνει ο παίκτης που θα γράψει ως αποτέλεσμα της αφαίρεσης τον αριθμό 0.Υπάρχει νικηφόρα στρατηγική για κάποιον από τους δυο παίκτες;

Λύση

Υπάρχει για τον παίκτη που παίζει πρώτος.Νικητής θα είναι αυτός που μετά την κίνηση του κάποια στιγμή θα μείνει 1.Θα δείξουμε ότι θέσεις νίκης για το πρώτο παίκτη είναι αυτές στις οποίες έχει μείνει περιττός αριθμός. Όταν ο πρώτος παίκτης –ο Α- πρέπει να αφαιρέσει έναν διαιρέτη ενός αρτίου αφαιρει το 1 και αφήνει τον δεύτερο παίκτη τον Β με ένα περιττό. Επειδή ο Α ξεκινά από τον άρτιο 60 με την παραπάνω τακτική ο Β θα πρέπει να αφαιρέσει από ένα περιττό που οι διαιρέτες του είναι περιττοί αριθμοί άρα θα αφήσει τον Α με ένα άρτιο.Επαναλαμβάνοντας την διαδικασία,ο Α θα μένει πάντα με ένα άρτιο αριθμό έτσι θα μπορεί με αφαίρεση να αφήσει έναν περιττό στον Β.Τελικά ο αριθμός που θα μείνει στον Β θα είναι το 1 και θα χύσει ο Β. ■

Α145.Σχεδιάζουμε στο χαρτί ένα 4× 4 τετράγωνο. Δύο παίκτες Α,Β τοποθετούν εναλλάξ στα τετράγωνα τους αριθμούς 1 έως 16, από μία φορά τον καθένα, μέχρι να γεμίσουν όλα τα τετράγωνα. Κατόπιν ο πρώτος παίκτης Α προσθέτει τους αριθμούς σε κάθε στήλη και μετά βρίσκει την διαφορά μεταξύ του μεγαλύτερου και του μικρότερου από αυτά τα τέσσερα αθροίσματα. Ο αριθμός που θα προκύψει είναι το σκορ του.Ο δεύτερος παίκτης Β κάνει το ίδιο, αλλά με τις γραμμές. Ο παίκτης που θα έχει το μεγαλύτερο σκορ είναι ο νικητής.

3	7	4	16	30
5	6	9	12	32
11	15	10	14	50
8	1	13	2	24
27	29	36	44	

ΣΚΟΡ ΠΑΙΚΤΗ Β 50-24=26

ΣΚΟΡ ΠΑΙΚΤΗ Α 44-27=17

Για παράδειγμα,αν η 4x4 διάταξη γεμίσει όπως το σχήμα, τότε ο παίκτης Α έχει αθροίσματα στηλών τα 27,29,32, 44 οπότε το σκορ του είναι 44-27=17. Ο δεύτερος παίκτης Β έχει αθροίσματα γραμμών 30,34,50,24,οπότε το σκορ του είναι 50-24=26.Αφού το 26 είναι μεγαλύτερο από το 17, κερδίζει ο δεύτερος παίκτης Β.Έχει ο δεύτερος παίκτης Β στρατηγική νίκης ή τουλάχιστον ισοπαλίας;

Λύση

Το μυστικό είναι ο αριθμός 17 και το γεγονός ότι 1 + 16 = 2 + 15 = 3 + 14= …….= 8 +9 = 17. Κάθε φορά που ο αντίπαλος τοποθετεί έναν αριθμό στα τετραγωνάκια, η απάντηση σας είναι να τοποθετήσετε στην ίδια στήλη εκείνον τον αριθμό που τον συμπληρώνει για να έχουν οι δύο τους άθροισμα 17. Για παράδειγμα, αν τοποθέτησε τον 1, τότε η απάντησή σας είναι ο 17-1=16 στην ίδια στήλη.Είναι τώρα προφανές στο τέλος τα αθροίσματα των στηλών είναι 17+17= 34, οπότε ο αντίπαλος έχει σκορ 34-34=0.Το δικό σας σκορ είναι μεγαλύτερο ή ίσο του μηδενός. Κερδίσατε ή,τουλάχιστον,δεν χάσατε! ■

Α146.Ένας ταξιδιώτης κατά την διάρκεια του ταξιδιού του στην χώρα των κανίβαλων βρέθηκε περικυκλωμένος από 10 κανίβαλους.Καθένας από τους κανίβαλους θέλει να φάει τον ταξιδιώτη αλλά,όπως όλοι στην χώρα των κανίβαλων γνωρίζουν υπάρχει ένα ρίσκο.Όταν κάποιος από τους κανίβαλους επιτεθεί στον ταξιδιώτη και τον φάει τότε θα κουραστεί και θα είναι ανυπεράσπιστος στην όρεξη οποιουδήποτε άλλου κανιβάλου (ο οποίος παρεμπιπτόντως αν φάει τον πρώτο κανίβαλο θα βρεθεί στην ίδια θέση). Οι κανίβαλοι είναι όλοι πεινασμένοι αλλά δεν υπάρχει περίπτωση να συνεργαστούν.Όλοι οι κανίβαλοι είναι εξίσου νοήμονες,εξίσου ικανοί στην λήψη αποφάσεων και είναι σε θέση να κάνουν το καλύτερο δυνατό λογικό συλλογισμό (πολύ γνωστό και αυτό!!).Άρα θα σκεφτούν προτού κάνουν οποιαδήποτε κίνηση.

Το ερώτημα είναι:*θα γλυτώσει ο ταξιδιώτης;*

Λύση

Όσο και αν φαίνεται παράξενο ο ταξιδιώτης θα γλυτώσει από τις ορέξεις των κανίβαλων.Η εξήγηση είναι η εξής:Αν υποθέσουμε ότι υπήρχε μόνο ένας κανίβαλος τότε είναι προφανές ότι ο ταξιδιώτης δεν θα γλυτώσει καθ' ότι ο κανίβαλος θα τον έτρωγε χωρίς καμία ανησυχία.Αν όμως οι κανίβαλοι ήταν δυο τότε ο πρώτος κανίβαλος που θα έτρωγε τον ταξιδιώτη θα ήταν ανυπεράσπιστος στις ορέξεις του άλλου κανίβαλου.Αυτή την σκέψη θα κάνουν και οι δυο κανίβαλοι άρα κανένας δεν θα τολμήσει να πειράξει τον ταξιδιώτη οπότε θα γλυτώσει.Αν οι κανίβαλοι ήταν τρεις τότε,ο πλησιέστερος κανίβαλος θα επιτεθεί στον περιηγητή και θα τον φάει.Ο κανίβαλος αυτός θα είναι ανυπεράσπιστος στις ορέξεις των άλλων δυο κανίβαλων παρ όλα αυτά είναι ασφαλής διότι όπως αποδείξαμε στην προηγούμενη περίπτωση αν έχουμε δυο πεινασμένους κανίβαλους και ένα υποψήφιο θύμα κανένας τους δεν θα κάνει καμία κίνηση φοβούμενος τον άλλο.

Γενικά αποδεικνύεται ότι αν έχουμε περιττό αριθμό κανίβαλων ο πλησιέστερος θα φάει τον ταξιδιώτη με ασφάλεια,αν όμως το πλήθος των κανίβαλων είναι άρτιο τότε κανένας δεν θα τολμήσει να κάνει καμία κίνηση και ο ταξιδιώτης θα γλυτώσει.Στο συγκεκριμένο παράδειγμα με τους 10 κανίβαλους ο ταξιδιώτης θα ξεφύγει από το τσουκάλι!

Α147.Ο Αυτοκράτορας Μήτσος κάλεσε τους 50 συμβούλους του στην μεγάλη αίθουσα του θρόνου.Κάποιοι από τους 50 σύμβουλους είναι διεφθαρμένοι και πότε λένε αλήθεια,πότε λένε ψέματα,οι υπόλοιποι είναι ευσυνείδητοι,λένε πάντα αλήθεια.Ο κάθε σύμβουλος γνωρίζει την κατάσταση όλων των άλλων συμβούλων (διεφθαρμένοι ή ευσυνείδητοι). Ωστόσο,ο αυτοκράτορας δεν γνωρίζει το ποιον ούτε ενός σύμβουλου.Φυσικά,θέλει να βρει και να τιμωρήσει όλους τους διεφθαρμένους.Δίνει στον κάθε σύμβουλο μια κάρτα με μια ερώτηση δικής του επιλογής που επιδέχεται απάντηση «Ναι» ή «Όχι». Οι ερωτήσεις δεν είναι κατά ανάγκη ίδιες από σύμβουλο σε σύμβουλο.Στην συνέχεια ακούει την απάντηση καθενός.

Μόλις απαντήσουν όλοι,ο αυτοκράτορας επιλέγει κατά την κρίση του ένα σύμβουλο και τον πετάει σε ένα μαγικό πηγάδι όπου και σκοτώνεται,μόλις σκοτωθεί από το πηγάδι –μαγικό γαρ- ακούγεται φωνή που λέει αν ο θανών ήταν ευσυνείδητος ή διεφθαρμένος.

Ακολούθως, ο αυτοκράτορας Μήτσος ετοιμάζει νέες κάρτες με ερωτήσεις όποιες θέλει αυτός και τις ξαναδίνει στους εναπομείναντες συμβούλους κ.ο.κ. Η διαδικασία σταματά αν ο αυτοκράτορας κατορθώσει να εξαλείψει όλους τους διεφθαρμένους συμβούλους. Αν σε κάποια φάση της διαδικασίας αντιληφθεί ποιοι ακριβώς είναι οι διεφθαρμένοι σύμβουλοι μπορεί να τους σκοτώσει μονομιάς και φυσικά να επαληθευτεί από το πηγάδι.

Υπάρχει στρατηγική να εξαλειφθούν από τον αυτοκράτορα Μήτσο όλοι οι διεφθαρμένοι σύμβουλοι με περιθώριο μιας μόνο λάθους επιλογής;Δηλαδή ο μέγιστος αριθμός από ευσυνείδητους συμβούλους που μπορεί να σκοτώσει να είναι μόνο ένας;

Λυση

Ο Μήτσος καταρχήν συμβολίζει τους συμβούλους Σ1,Σ2,…Σ50 και τους ρωτά όλους *«Είναι Σ1 διεφθαρμένος;»*

-Αν όλοι οι σύμβουλοι απαντήσουν **ΝΑΙ** (δηλαδή ότι ο Σ1 είναι διεφθαρμένος) τότε ο Μήτσος θα πετάξει τον Σ1 στο πηγάδι. Αν ο Σ1 επιβεβαιωθεί ότι είναι διεφθαρμένος τότε ελαττώθηκαν οι διεφθαρμένοι κατά έναν και ο Μήτσος πάει στον επόμενο γύ-

ρο.Αν ο Σ1 επιβεβαιωθεί ότι είναι ευσυνείδητος τότε όλοι οι υπόλοιποι σύμβουλοι είναι διεφθαρμένοι και τους ρίχνει στο πηγάδι.
-Αν ο σύμβουλος Σi απαντήσει **ΟΧΙ** τότε ο Μήτσος τον ρίχνει στο πηγάδι.Αν ο Σi είναι διεφθαρμένος τότε ο αριθμός των διαφθαρμένων ελαττώνεται κατά έναν.Από την άλλη αν ο Σi αποδειχτεί ότι είναι ευσυνείδητος τότε από την απάντηση του έχουμε βρει ένα ευσυνείδητο σύμβουλο (τον Σ1).
Από το σημείο, που ο Μήτσος έχει βρει ένα ευσυνείδητο σύμβουλο ακολουθεί την εξής τακτική.
Βάζει σε μια σειρά τους συμβούλους με πρώτο τον Σ1.Ο Μήτσος ρωτάει τον $Σ_i$(i=1,2,3…) *αν ο $Σ_{i+1}$ είναι διεφθαρμένος* (χωρίς να μας ενδιαφέρει η απάντηση του τελευταίου στην σειρά συμβούλου).
Από τις απαντήσεις, αρχής γενομένης από την απάντηση του Σ1 ο Μήτσος μετραει(αν υπάρχουν) τα συνεχομενα **ΝΑΙ** εντοπίζει το τελευταίο σε αυτην την σειρά $Σ_i$ που απανταει **ΝΑΙ** τότε ρίχνει τον $Σ_{i+1}$ στο πηγάδι και πάει στον επόμενο γύρο.
Αν όλοι οι σύμβουλοι απαντήσουν **ΟΧΙ** τότε όλοι οι διεφθαρμένοι σύμβουλοι έχουν ήδη ρίχτει στο πηγάδι και τελειώνει το θέμα. ■

Α148.Στην Λοξολάνδη κάθε χρόνο διοργανώνεται το ετήσιο τουρνουά Μπιζελιών. Ένα τουρνουά στο οποίο συμμετέχουν παίκτες από όλη την επικράτεια,με έπαθλο το κολοσσιαίο ποσό των 1000 λιρών Λοξολάνδης που το προσφέρει ο επιχειρηματίας Μήτσος,τσιφούτης επίσης κολοσσιαίων διαστάσεων.Το παιχνίδι έχει πολύ απλούς κανόνες.

Παίζεται από δυο αντίπαλους παίκτες.Αρχικά, κάθονται ενώπιος ενωπίω σε ένα τραπέζι με μια στοίβα 39 μπιζελιών,ο πρώτος παίκτης χωρίζει όπως θέλει την αρχική στοίβα σε δυο νέες στοίβες με πλήθη μπιζελιών α,β. Ο κριτής τότε καταγράφει το γινόμενο α*β. Έρχεται η σειρά του άλλου παίκτη που επιλέγει όποια στοίβα θέλει και την χωρίζει επίσης όπως θέλει-όσο αφορά το πλήθος μπιζελιών-σε δυο νέες στοίβες με πλήθη α΄,β΄. Ο κριτής τότε καταγράφει το γινόμενο α΄*β΄.

Η διαδικασία συνεχίζεται μέχρι να προκύψουν 39 στοίβες του ενός μπιζελιού.Ο κριτής που έχει καταγράψει τα γινόμενα,τα αθροίζει,αν το αποτέλεσμα είναι περιττός κερδίζει ο πρώτος παίκτης αν το αποτέλεσμα είναι άρτιος κερδίζει ο δεύτερος παίκτης.Κάθε χρόνο το χρηματικό έπαθλο κερδίζει ο Μήτσος τζούνιορ,ο όποιος μεταξύ μας δεν μπορεί να μοιράσει δυο γαϊδουριών άχυρα αλλά επειδή είναι ο γιος του διοργανωτή παίζει πάντα πρώτος.Εξηγήστε γιατί κερδίζει πάντα;

Λυση

Θα κερδίζει πάντα ο πρώτος παίκτης ανεξάρτητα από τον χωρισμό των στοιβών κατά την διάρκεια του παιχνιδιού. Αρχικά ονομάσουμε Τκ το άθροισμα των τετραγώνων των αριθμών των μπιζελιών σε κάθε στοίβα όταν οι στοίβες είναι κ το πλήθος.Για παράδειγμα, αρχικά έχουμε μια στοίβα με 39 μπιζέλια θα ισχύει $T_1=39^2=1521$,αν ο πρώτος παίκτης χωρίσει την μια στοίβα σε δυο στοίβες των 30 και 9 μπιζελιών, τότε , θα ισχύει $T_2=30^2+9^2=981$ κ.ο.κ μέχρι να καταλήξουν οι δυο παίκτες σε 39 στοίβες όπου και θα ισχύει $T_{39}=1^2+1^2+1^2+..+1^2=39$.

Σε κάθε γύρο του παιχνιδιού που πηγαίνουμε από κ στοίβες σε κ+1 στοίβες αυτό που κάνουμε είναι να αντικαταστήσουμε μια στοίβα με χ+y μπιζέλια με δυο που έχουν x μπιζέλια και y μπιζέλια,αντίστοιχα.Η αλλαγή στο άθροισμα των τετραγώνων των αριθμών είναι $(x+y)^2=x^2+y^2+2xy$ δηλαδή $2xy=T_κ-T_{κ+1}$.Στο ίδιο αυτό βήμα, το

γινόμενο που καταγράφουμε είναι το xy.Με άλλα λόγια το γινόμενο που καταγράφουμε ικανοποιεί $xy = \frac{1}{2}(T_\kappa - T_{\kappa+1})$.Οποτε το άθροισμα όλων των xy που καταγράψαμε,το ονομάζουμε Σ,είναι:

$$\Sigma = \frac{1}{2}(T_1 - T_2) + \frac{1}{2}(T_2 - T_1) + ... + \frac{1}{2}(T_{38} - T_{39}) = \frac{1}{2}(T_1 - T_2 + T_2 - T_1 + ... + T_{38} - T_{39}) =$$

$$= \frac{1}{2}(T_1 - T_{39}) = \frac{1}{2}(39^2 - 39) = 741$$

Το Σ ανεξάρτητα από τις επιμερίσεις είναι πάντα 741 για αυτό κερδίζει πάντα ο Μήτσος Τζούνιορ!

Α149.Στην μια όψη 2002 καρτών είναι τυπωμένος ένας θετικός ακέραιος από το 1 μέχρι το 2002.Καθε ζεύγος καρτών έχει διαφορετικό αριθμό. Οι κάρτες είναι τοποθετημένες σε μια σειρά σε ένα τραπέζι με ορατή την όψη του αριθμού. Δυο παίκτες Α,Β παίρνουν εναλλάξ σε διαδοχικούς γύρους ο καθένας μια κάρτα μέχρι να μην μείνει κάρτα στο τραπέζι.Στο τέλος ο καθένας αθροίζει τους αριθμούς των καρτών του και ανακοινώνει το τελευταίο ψηφίο του αθροίσματος. Νικητής είναι ο παίκτης που έχει μεγαλύτερο τελευταίο ψηφίο.

Υπάρχει στρατηγική νίκης για κάποιον από του δυο παίκτες Α ή Β;

(Πρώτος παίζει ο Α.)

Λύση

Ο πρώτος παίκτης , ο Α έχει στρατηγική νίκης.Νοερά ζευγαρώνει κάθε αριθμό κ με τον 1000+κ ,κ=1,2,3,…1000,επίσης ζευγαρώνει το 2001 με το 2002.Το ζευγάρωμα πλην του τελευταίου ζεύγους έγινε με τους δυο αριθμούς να έχουν ίδιο τελευταίο ψηφίο. Η πρώτη κίνηση του Α είναι να επιλέξει το 2002. Ακολούθως σε κάθε κίνηση επιλογής του αριθμού κ του Β ο Α επιλέγει το 1000+κ, με αυτόν τον τρόπο ο παίκτης Β θα αναγκαστεί να πάρει το 2001.Εστω Σ_A το άθροισμα των αριθμών του Α χωρίς το 2002 και Σ_B το άθροισμα των αριθμών του Β χωρίς το 2001 θα ισχύει ότι Σ_A-Σ_B=10^ν δηλαδή Σ_A και Σ_B έχουν το ίδιο τελευταίο ψηφίο τελικά το τελευταίο ψηφίο του Σ_A +2002 είναι μεγαλύτερο από το τελευταίο ψηφίο του Σ_B +2001 και κερδίζει ο Α. ■

Α150.Στο μακρινό βασίλειο της Ρεμούλας,δυο απατεώνες συλλαμβάνονται να κλέβουν.Η ετυμηγορία των δικαστών είναι ισόβια φυλάκιση.Όμως η μέρα που γινόταν η δίκη ήταν εθνική εορτή για αυτό οι δικαστές αποφάσισαν να τους υποβάλλουν σε ένα τεστ που θα τους επέτρεπε να γλυτώσουν την φυλάκιση.Τους έδειξαν μια κάλπη της οποίας το περιεχόμενο δεν φαινόταν και τους είπαν ότι περιείχε άσπρες και μαύρες σφαίρες.Θα τους έκλειναν σε δυο κελιά όπου δεν θα είχαν καμία επικοινωνία,θα τους έφερναν την κάλπη και θα διάλεγαν μια σφαίρα στην τύχη.Στην συνέχεια ο καθένας θα έκανε μια πρόβλεψη για το χρώμα της σφαίρας που θα τύχαινε στον άλλο.Αν έκαναν λάθος στην πρόβλεψη είτε ο ένας τους,είτε και οι δυο θα γλύτωναν την φυλακή,αν έκαναν και οι δυο σωστές προβλέψεις θα φυλακίζονταν ισόβια.Οι δικαστές πριν τους κλείσουν στα κελιά τους επέτρεψαν να συζητήσουν για μερικά λεπτά.Υπάρχει στρατηγική να γλυτώσουν;

Λυση

Αν ο καθένας από τους δυο υπόδικους προσπαθούσε να μαντέψει στην τύχη υπάρχει μια περίπτωση στις τέσσερεις να μαντέψουν σωστά το χρώμα της σφαίρας που έχει ο άλλος και να φυλακιστούν.Υπάρχει όμως μια στρατηγική η οποία θα τους επιτρέψει να φύγουν ελεύθεροι από το δικαστήριο.Αρκεί ο ένας στην πρόβλεψη του, να ανακοινώσει το χρώμα που έχει η σφαίρα του και ο άλλος να ανακοινώσει το αντίθετο από αυτό που έχει.Με αυτό τον τρόπο σίγουρα θα κερδίσουν.Ας το δούμε αναλυτικά.

-Ο Α έχει άσπρη σφαίρα και ο Β μαύρη: ανακοινώνουν ο Α άσπρη και ο Β άσπρη άρα κερδίζουν.

-Ο Α έχει άσπρη σφαίρα και ο Β άσπρη: ανακοινώνουν ο Α άσπρη και ο Β μαύρη άρα κερδίζουν.

-Ο Α έχει μαύρη σφαίρα και ο Β άσπρη: ανακοινώνουν ο Α μαύρη και ο Β μαύρη άρα κερδίζουν.

-Ο Α έχει μαύρη σφαίρα και ο Β μαύρη: ανακοινώνουν ο Α μαύρη και ο Β άσπρη άρα κερδίζουν.

Η συγκεκριμένη στρατηγική «δουλεύει» πάντα διότι: Ο παίκτης Α ανακοινώνει το χρώμα της σφαίρας που έχει άρα ο παίκτης Α μαντεύει σωστά αν μόνο αν και οι δυο έχουν σφαίρες με το ίδιο χρώμα.Ο παίκτης Β ανακοινώνει το αντίθετο από το χρώμα της σφαίρας που έχει άρα ο παίκτης Β μαντεύει σωστά αν μόνο αν και οι δυο έχουν σφαίρες με διαφορετικό χρώμα.Οπότε αποκλείεται και οι δυο παίκτες να μαντέψουν σωστά.Το μόνο που μένει είναι,πριν τους κλείσουν στα κελιά να συμφωνήσουν ποιος θα ανακοινώσει το χρώμα της σφαίρας του και ποιος θα πει το αντίθετο χρώμα από αυτό που έχει.

Α151.Ένας δράκος έχει 400 κεφάλια.Ένας Ιππότης,ο Σερ Μήτσος μπορεί με κάθε χτύπημα του σπαθιού του να κόψει 18,19,25 ή 5 κεφάλια. Σε καθεμία από αυτές τις περιπτώσεις, φυτρώνουν στους ώμους του δράκου αντίστοιχα 24,7,22 ή 11 νέα κεφάλια.Ο δράκος σκοτώνεται αν του κοπούν όλα τα κεφάλια.Μπορεί ο Σερ Μήτσος να σκοτώσει τον δράκο;

Λύση

● Αν ο Σερ Μήτσος κόψει 18 κεφάλια στους ώμους του φυτρώνουν 24 νέα. Έτσι τα κεφάλια του δράκου θα αυξηθούν κατά 24-18=6

● Αν ο Σερ Μήτσος κόψει 19 κεφάλια στους ώμους του φυτρώνουν 7 νέα. Έτσι τα κεφάλια του δράκου θα ελαττωθούν κατά 19-7=12

● Αν ο Σερ Μήτσος κόψει 25 κεφάλια στους ώμους του φυτρώνουν 22 νέα. Έτσι τα κεφάλια του δράκου θα ελαττωθούν κατά 25-22=3

●Αν ο Σερ Μήτσος κόψει 5 κεφάλια στους ώμους του φυτρώνουν 11 νέα. Έτσι τα κεφάλια του δράκου θα ελαττωθούν κατά 11-5=6

Οι αριθμοί 6,12,3 και 6 που αυξάνονται ή μειώνονται κάθε φορά ο αριθμός των κεφαλιών του δράκου, είναι πολλαπλάσιο του 3.

Επειδή 400=3*133+1 στην καλύτερη περίπτωση ο Σερ Μήτσος με τα κοψίματα που θα κάνει θα μειώσει τα κεφάλια του δράκου σε 1.Αρα ο Σερ Μήτσος δεν μπορεί να σκοτώσει τον δράκο.

Α152.Έστω ότι έχουμε τρεις σωρούς 5,49 και 51 βόλων.Είναι δυνατό να γίνουν μόνο δυο κινήσεις:

1.Μπορουμε να συνενώσουμε δυο σωρούς και να προκύψει ένας νέος.

2.Μπορουμε να χωρίσουμε ένα σωρό σε δυο ισοπληθείς σωρούς.
Είναι δυνατό με κατάλληλη ακολουθία των παραπάνω κινήσεων να προκύψουν 105 μονομελείς σωροί. (να έχουν ένα μόνο βόλο έκαστος) *(Tournament of towns)*

Λύση

Εφόσον όλοι οι αριθμοί είναι περιττοί και δεν μπορούμε να χωρίσουμε κανέναν τους άρα οι αρχικές κινήσεις είναι τρεις:

Α. Συνδυάζουμε τους σωρούς των 5,49 βόλων
Β. Συνδυάζουμε τους σωρούς των 51,49 βόλων
Γ. Συνδυάζουμε τους σωρούς των 51,5 βόλων

Ας πάρουμε την περίπτωση Α προκύπτουν δυο σωροί 54 και 51 βόλων και οι δυο αριθμοί είναι πολλαπλάσια του 3 .Αν ένα πολλαπλάσιο του 3 διαιρεθεί με το 2 τότε πάλι θα προκύψει πολλαπλάσιο του 3 (2 και 3 πρώτοι μεταξύ τους) επίσης να ενωθούν δυο σωροί πολλαπλάσιων του 3 και ο νέος θα είναι πολλαπλάσιο του 3.Άρα ό,τι ακολουθία κινήσεων και να εφαρμόσουμε οι σωροί θα είναι πάντα πολλαπλάσια του 3 συνεπώς αποκλείεται να προκύψουν 105 μονομελείς σωροί (το 1 δεν είναι πολλαπλάσιο του 3) Ανάλογα δείχνουμε ότι για την περίπτωση Β σε κάθε ακολουθία κινήσεων οδηγεί σε πολλαπλάσιο του 7 ενώ για την περίπτωση Γ θα οδηγεί σε πολλαπλάσιο του 5.

Α153.Σε ένα τουρνουά αγώνων τένις συμμετέχουν 151 αθλητές από διάφορες χώρες.Να αποδείξετε ότι ο αριθμός των αθλητών που αγωνιστήκαν σε περιττό αριθμό αγώνων, είναι αριθμός άρτιος.

Λύση

Η πρώτη σκέψη είναι να υπολογίσουμε το πλήθος των αγώνων που πραγματοποιήθηκαν, όμως δεν γνωρίζουμε τίποτα. Με πόσους αγωνίστηκε κάθε αθλητής; Ήταν οι αγώνες Νοκ αουτ; Σε πόσες φάσεις διεξήχθη; Δεν μπορούμε να απαντήσουμε και καταλήγουμε σε αδιέξοδο.

Έτσι συμπεραίνουμε ότι η λύση είναι ανεξάρτητη του τρόπου διεξαγωγής του τουρνουά.Ας ονομάσουμε $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_{151}$ τους αγώνες που έδωσε ο καθένας από τους αθλητές. Τότε το άθροισμα $S= \alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_{150}$ είναι άρτιος διότι *«αφού ο κ αγωνίστηκε με τον λ και ο λ αγωνίστηκε με τον κ»*. Για την ακρίβεια το συγκεκριμένο άθροισμα είναι άρτιο σε οποιαδήποτε φάση του τουρνουά (αναλλοίωτος ιδιότητα)

Το άθροισμα S είναι άρτιο και αποτελείται από περιττό πλήθος προσθετέων άρα το πλήθος των περριτών προσθετέων είναι άρτιος διότι αν ήταν περιττός θα ήταν περιττό και το τελικό άθροισμα.

Α154.Ο παρακάτω πίνακας με τους αριθμούς έχει μια περίεργη ιδιότητα.Επιλέξετε τυχαία ένα αριθμό,κατόπιν διαγράψτε κάθε αριθμό που βρίσκεται στην ίδια γραμμή και στην ίδια στήλη.Επαναλάβετε μέχρι να μην μείνει άλλος αριθμός στον πίνακα.Θα το κάνετε 6 φορές.

28	26	30	27	29	25
34	32	36	33	35	31
16	14	18	15	17	13
4	2	6	3	5	1
10	8	12	9	11	7
22	20	24	21	23	19

~~28~~	26	~~30~~	~~27~~	~~29~~	~~25~~
~~34~~	~~32~~	~~36~~	~~3~~	35	~~31~~
~~16~~	~~14~~	~~18~~	15	~~17~~	~~13~~
4	~~2~~	~~6~~	~~3~~	~~5~~	~~1~~
~~10~~	~~8~~	12	~~9~~	~~11~~	~~7~~
~~22~~	~~20~~	~~24~~	~~21~~	~~23~~	19

Όποιους αριθμούς και να επιλέξετε πάντα το άθροισμα των έξι αριθμών θα είναι το ίδιο (111).(στο σχήμα έχουν επιλεγει 26,35,15,4,12,19) Γιατί συμβαίνει αυτό;

(Martin Gardner,Scientific American 1957)

Λύση

Κάθε αριθμός του πίνακα πρόεκυψε από άθροισμα δυο αριθμών.Οι αριθμοί προέρχονται από τα σύνολα {3,1,5,2,4,0},{25,31,13,1,7,19}.(δείτε το παρακάτω σχήμα) Με την παραπάνω διαδικασία επιλογής αριθμών και διαγραφής όσων βρίσκονται στην ίδια γραμμή ή στήλη ουσιαστικά επιλέγουμε έξι ζεύγη αριθμών που όλα μαζί αποτελούν τους δώδεκα αριθμούς των δυο παραπάνω συνόλων,άρα είναι βέβαιο ότι το άθροισμα θα είναι πάντα το άθροισμα των δώδεκα αριθμών.

(3+1+5+2+4+0)+(25+31+13+1+7+19)=111

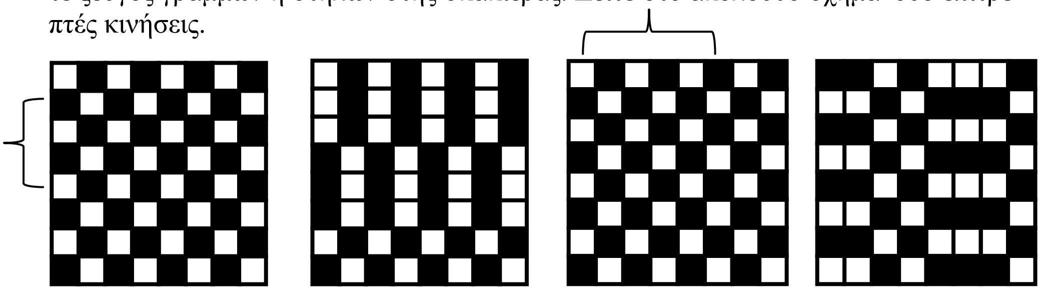
	3	1	5	2	4	0
25	~~28~~	26	~~30~~	~~27~~	~~29~~	~~25~~
31	~~34~~	~~32~~	~~36~~	~~33~~	35	~~31~~
13	~~16~~	~~14~~	~~18~~	15	~~17~~	~~13~~
1	4	~~2~~	~~6~~	~~3~~	~~5~~	~~1~~
7	~~10~~	~~8~~	12	~~9~~	~~11~~	~~7~~
19	~~22~~	~~20~~	~~24~~	~~21~~	~~23~~	19

Α155.Σε μια ευθεία λαμβάνουμε δυο σημεία Α,Β στην συνέχεια παίρνουμε τυχαία στην ευθεία 45 σημεία τα οποία δεν ανήκουν στο ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ. Να αποδείξετε ότι το άθροισμα των αποστάσεων των σημείων αυτών από το σημείο Α δεν είναι ίσο με το άθροισμα των αποστάσεων των σημείων αυτών από το Β.

Λύση

Για καθένα από τα 45 σημεία , η διαφορά των αποστάσεων του από τα σημεία A και B είναι ± AB. Το άθροισμα περιττού πλήθους αποστάσεων ± AB δεν μπορεί να ισούται με το 0

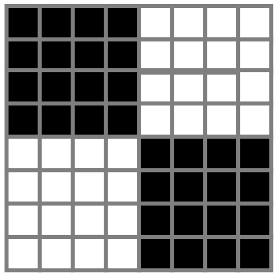
Α156. Ο Νίκος έχει μια ιδιαίτερη 8 x8 σκακιέρα. Μπορεί να αντιμεταθέσει οποιοδήποτε ζεύγος γραμμών ή στηλών στης σκακιέρας. Δείτε στο ακόλουθο σχήμα δυο επιτρεπτές κινήσεις.



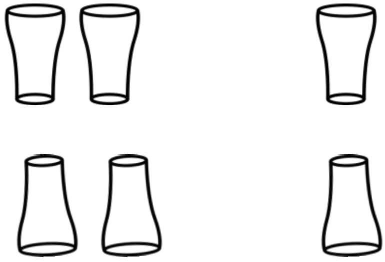
Ο Νίκος πραγματοποίησε ένα πλήθος τέτοιων κινήσεων και κατέληξε σε μια διάταξη της σκακιέρας όπου το πάνω αριστερά 4x4 τετράγωνο της σκακιέρας αποτελούνταν από μαύρα μοναδιαία τετραγωνάκια. Μπορείτε να προσδιορίσετε το χρώμα των υπολοίπων μοναδιαίων τετραγώνων της σκακιέρας;

Λύση

Παρατηρούμε ότι οποιαδήποτε κίνηση αντιμετάθεσης γραμμών ή στηλών και να κάνει ο Νίκος δεν μεταβάλλεται το πλήθος των μαύρων και το πλήθος των λευκών μοναδιαίων τετραγώνων σε κάθε γραμμή ή στήλη της σκακιέρας.(Αναλλοίωτη ιδιότητα). Στην αρχική διάταξη της σκακιέρας έχουμε 4 λεύκα και 4 μαύρα μοναδιαία τετράγωνο σε κάθε γραμμή και σε κάθε στήλη γεγονός που θα ισχύει και για την τελική διάταξη της σκακιέρας μετά τις κινήσεις του Νίκου. Αυτή η παρατήρηση μας επιτρέπει αν γνωρίζουμε ότι τα 16 τετράγωνο πάνω αριστερά είναι μαύρα να βρούμε ποια είναι η τελική διάταξη της σκακιέρας. Δείτε το σχήμα.



Α157.Τριανταπέντε πλαστικά ποτήρια έχουν τοποθετηθεί σε ένα τραπέζι με το στόμιο προς τα πάνω.Θεωρούμε ως μια κίνηση το ταυτόχρονο αναποδογύρισμα ακριβώς έξι ποτηριών.Υπάρχει ακολουθία κινήσεων που να έχει ως τελικό αποτέλεσμα να έχουμε και τα τριανταπέντε ποτήρια με το στόμιο προς τα κάτω. (σχήμα)



Αρχική κατάσταση

Τελική κατάσταση

Λύση

Είναι αδύνατο.Κάθε ποτήρι που καταλήγει με το στόμιο προς τα κάτω έχει υποστεί περιττό αριθμό από αναποδογυρίσματα ,από την άλλη τα ποτήρια είναι συνολικά τριανταπέντε επίσης περιττός αριθμός άρα συνολικά θα πρέπει να γίνουν περιττός αριθμός αναποδογυρισμάτων. Από την άλλη, κάθε φορά αναποδογυρίζουμε έξι ποτήρια άρα σε κάθε στάδιο θα έχουμε άρτιο αριθμό αναποδογυρισμάτων. Άτοπο.

Εν γένει,είναι αδύνατο αν έχουμε περιττού πλήθους ποτήρια και οι κινήσεις γίνονται ανά άρτιο πλήθος ποτηριών να μεταβούν από την κατάσταση που όλα είναι με το στόμιο στην ίδια κατεύθυνση στην κατάσταση όλα να αναποδογυρίσουν.

Α158.Εικοσιέξι πλαστικά ποτήρια έχουν τοποθετηθεί σε ένα τραπέζι με το στόμιο προς τα πάνω. Ο Γιάννης αναποδογυρίζει τα ποτήρια από το πρώτο μέχρι το τελευταίο. Κατόπιν αναποδογυρίζει κάθε δεύτερο ποτήρι. Στην συνέχεια αναποδογυρίζει κάθε τρίτο ποτήρι κ.ο.κ μέχρι το εικοστό έκτο .Όταν τελειώσει ο Γιάννης ποια ποτήρια (αύξοντας αριθμός $1^ο$,$2^ο$,…) θα έχουν το στόμιο προς τα κάτω.



Όλα τα ποτήρια που έχουν αριθμό τέλειο τετράγωνο($1^ο$,$4^ο$,$9^ο$,$16^ο$,$25^ο$) θα βρεθούν με το στόμιο προς τα κάτω.Ας το σκεφτούμε λίγο.Το ερώτημα είναι πόσες φορές αναποδογυρίζεται κάθε ποτήρι.

Το $1^ο$ αναποδογυρίζει μια φορά

Το $2^ο$ δυο φορές (την $1^η$ και την $2^η$)

Το $3^ο$ δυο φορές (την $1^η$ και την $3^η$)

Το $4^ο$ τρεις φορές (την $1^η$,$2^η$ και την $4^η$)

……

Παρατηρούμε ότι κάθε φορά που αναποδογυρίζεται ένα ποτήρι πρόκειται για διαιρέτη του αριθμού π.χ οι διαιρέτες του 4 είναι 1,2,4

Το 18 θα αναποδογυριστεί την $1^η$,$2^η$,$3^η$,$6^η$,$9^η$,$18^η$ φορά(1,2,3,6,9,18 διαιρέτες 18).Άρα το πρόβλημα ανάγεται στην εύρεση του πλήθους των διαιρετών κάθε αριθμού που θα είναι ταυτόχρονα και το πλήθος των αναποδογυρισμάτων του. Ειδικότερα μας ενδιαφέρει το πλήθος αυτό να είναι περιττός για να βρεθεί τελικά το ποτήρι με το στόμιο προς τα κάτω. Κάθε φυσικός αριθμός α έχει περιττό πλήθος διαιρετών αν είναι τέλειο τετράγωνο καθώς σε διαφορετική περίπτωση αν ο κ είναι διαιρέτης του αριθμού ο α/κ θα είναι διαφορετικός διαιρέτης του. ■

Α159.Σε ένα κυρτό πολύγωνο με 2022 κορυφές είναι σχεδιασμένες μερικές από τις διαγωνίους του. Καλούμε μια κορυφή του πολυγώνου «άρτια» αν το πλήθος των διαγωνίων που διέρχονται από αυτήν είναι άρτιο και «περιττή» αν το πλήθος των διαγωνίων που διέρχονται από αυτή είναι περιττό. Είναι δυνατό το πλήθος των περιττών κορυφών να ισούται με 217;

Λύση

Κάθε φορά που χαράζουμε μία καινούργια διαγώνιο, αυτή συνδέει δύο κορυφές που αμέσως πιο πριν ήταν:
-και οι δύο άρτιες, οπότε τώρα γίνονται και οι δύο περιττές ή
-και οι δύο περιττές, οπότε τώρα γίνονται και οι δύο άρτιες ή
-η μία άρτια και η άλλη περιττή, οπότε τώρα γίνονται η πρώτη περιττή και η δεύτερη άρτια.
Σε κάθε περίπτωση, οι 'αρτιότητες' του πλήθους τόσο των άρτιων όσο και των περιττών κορυφών δεν μεταβάλλονται με τη χάραξη μιας νέας διαγωνίου.
Πριν χαράξουμε καμία διαγώνιο, έχουμε 2022 άρτιες και 0 περιττές κορυφές. Αφού λοιπόν αρχικά και οι μεν και οι δε ήταν άρτιες, θα παραμείνουν άρτιες μέχρι τέλους. Επομένως η απάντηση στο ερώτημα είναι όχι. Η αναλλοίωτος ιδιότητα είναι ότι έχουμε πάντα άρτιο πλήθος περιττών κορυφών. ■

Α160. Στο δάσος της Λοξολάνδης υπάρχουν οχτώ τρύπες σε μια σειρά.Σε μια τρύπα από τις οχτώ έχει λουφάξει μια αλεπού.Κάθε νύχτα,η αλεπού μετακινείται και λουφάζει στην επομένη ή στην προηγούμενη τρύπα,κάθε πρωί ένας κυνηγός έχει την δυνατότητα να ελέγξει μόνο μια από τις οχτώ τρύπες για να βρει την αλεπού.Υπάρχει στρατηγική που πρέπει να ακολουθήσει για να βρει σίγουρα την αλεπού.
Λύση
Ας το γενικεύσουμε.Αν αριθμήσουμε διαδοχικά τις τρύπες από το 1 μέχρι το 8,ας δούμε μια στρατηγική που θα επιστρέψει στον κυνηγό να πιάσει την αλεπού.Ο κυνηγός πρέπει να ερευνήσει τις τρύπες διαδοχικά,αρχίζοντας από την πρώτη.Κάθε μέρα ψάχνει κάποια τρύπα,και η αλεπού κρύβεται σε μια από αυτές.
● Ας υποθέσουμε ότι η αλεπού ξεκινά από περιττής τάξεως τρύπα.Ο κυνηγός ξεκινά επίσης από περιττής τάξης τρύπα (αυτή με τον αύξοντα αριθμό 1),και επομένως το άθροισμα των δυο αριθμών (θέσεις κυνηγού,αλεπούς) είναι άρτιο.Κάθε μέρα οι δυο αριθμοί μεταβάλλονται κατά 1,συνεπώς το άθροισμα παραμένει άρτιο.Ομοίως αν η αλεπού ξεκινήσει από άρτια τρύπα,το άθροισμα παραμένει περιττό.
Ας υποθέσουμε ότι το άθροισμα είναι άρτιο.Θα ξεφύγει η αλεπού από την καταδίωξη του κυνηγού; Αυτό μπορεί να συμβεί μόνο αν η αλεπού βρεθεί δίπλα στην τρύπα που ερευνάται και μετακινηθεί εκείνη την νύχτα στην τρύπα που μόλις ερευνήθηκε.Τότε ομοίως ο κυνηγός και η αλεπού θα έχουν βρεθεί σε γειτονικές τρύπες,και το άθροισμα των αυξόντων αριθμών δεν θα είναι άρτιος.Οπότε σε αυτήν την περίπτωση είναι βέβαιο ότι ο κυνηγός θα εντοπίσει την αλεπού.
Ο κυνηγός θα βρει την αλεπού όταν ερευνήσει την τρύπα στην οποία κρύβεται η αλεπού και επομένως το άθροισμα των αριθμών της τρύπας έκαστου (κυνηγού,αλεπούς) θα ισούται με το διπλάσιο του αριθμού της τρύπας.Πόσος χρόνος θα απαιτηθεί; Στην χειρότερη περίπτωση ο κυνηγός θα ψάξει και την $6^η$ τρύπα.Αν την βρει άδεια, η αλεπού πρέπει να κρύβεται στην $8^η$ τρύπα (πρέπει να βρίσκεται σε άρτια τρύπα και δεν μπορεί να ξεφύγει) Την επόμενη μέρα η αλεπού θα μετακινηθεί στην $7^η$ τρύπα και θα την εντοπίσει ο κυνηγός.Αυτό θα είναι και το μέγιστο πλήθος ημερών που θα διαρκέσει η έρευνα.Κάτι τέτοιο θα συμβεί αν η αλεπού διαλέξει αρχικά περιττής τάξης τρύπα.
● Τα πράγματα είναι περισσότερο πολύπλοκα,η αλεπού διαλέξει αρχικά τρύπα άρτιας τάξεως.Τότε,κατά την διάρκεια της σειριακής αναζήτησης του κυνηγού το άθροισμα των αριθμών (τρύπας που ερευνάται και τρύπας που λουφάζει η αλεπού) κάθε μέρα θα είναι περιττό,και η αλεπού μπορεί να ξεφύγει από τον κυνηγό.Με βάση αυτά που είπα-

με προηγουμένως,ο κυνηγός (που σκέπτεται το ίδιο σωστά με εμάς) μόλις φτάσει στην $7^{η}$ τρύπα και την βρει άδεια θα καταλάβει τι συνέβη.Την ημέρα που θα γίνει αυτό,η αλεπού θα κρύβεται σε διαφορετική τρύπα,άρτιας τάξεως.Την ίδια νύχτα θα πρέπει να μετακινηθεί σε περιττής τάξεως τρύπα.Ο κυνηγός μπορεί να επιστρέψει και να ερευνήσει ξανά την $7^{η}$ τρύπα (στην οποία είναι πιθανόν να έχει μετακινηθεί η αλεπού),και έτσι το άθροισμα της τρύπας της αλεπούς και της τρύπας του κυνηγού θα ξαναγίνει άρτιο.
Ο κυνηγός τώρα μπορεί να ερευνήσει τις τρύπες από την $7^{η}$ μέχρι την $1^{η}$.Όπως επισημάναμε νωρίτερα,η αλεπού μπορεί να ξεφύγει από μια τέτοια σειριακή αναζήτηση μόνο αν το άθροισμα των αριθμών της σπηλιάς που κρύβεται και της τρύπας που ερευνά ο κυνηγός είναι περιττός.Εφόσον το άθροισμα πια είναι άρτιο,η αλεπού μοιραία θα εντοπιστεί από τον κυνηγό.Ουσιαστικά ο κυνηγός άλλαξε το σταθερό άθροισμα ερευνώντας την $7^{η}$ τρύπα δυο φορές.Αν ο κυνηγός φτάσει στην $3^{η}$ τρύπα και δεν βρει την αλεπού τότε η αλεπού κρύβεται στην $1^{η}$ σπηλιά.Εκείνη την νύχτα θα μετακινηθεί στην $2^{η}$ τρύπα και την επόμενη μέρα θα την πιάσει.
Πόσες μέρες θα απαιτηθούν.Η διαδρομή του κυνηγού στην χειρότερη περίπτωση είναι 1,2,3,4,5,6,7,7,6,5,4,3,2 δηλαδή 13 μέρες. ■

Α161. Έστω το κλάσμα 6/7.Μια κίνηση θεωρείται είτε η αύξηση του αριθμητή κατά 7 μονάδες είτε η αύξηση του παρονομαστή κατά 6 μονάδες,αλλά όχι και τα δυο μαζί. Ποιος είναι ο ελάχιστος αριθμός κινήσεων που απαιτείται για να επανέλθει το κλάσμα στην αρχική του τιμή ,το 6/7.

Λύση

Αν κ είναι οι κινήσεις που προσθέτουμε 7 στον αριθμητή και λ οι κινήσεις που προσθέτουμε 6 στον παρανομαστή τότε θα πρέπει :

$$\frac{6}{7}=\frac{6+\kappa\cdot 7}{7+\lambda\cdot 6}$$

θα πρέπει ο κ να είναι πολλαπλάσιο του 6 δηλαδή κ=6μ,μ φυσικός, ανάλογα ο λ να είναι πολλαπλάσιο του 7 δηλαδή λ=7π,π φυσικός, έτσι

$$\frac{6}{7}=\frac{6+6\mu\cdot 7}{7+7\pi\cdot 6}\Leftrightarrow\frac{6}{7}=\frac{6(1+\mu\cdot 7)}{7(1+\pi\cdot 6)}$$

Θα πρέπει : $\frac{(1+\mu\cdot 7)}{(1+\pi\cdot 6)}=1\Leftrightarrow 1+\mu\cdot 7=1+\pi\cdot 6\Leftrightarrow\mu\cdot 7=\pi\cdot 6$

οι μικρότερες τιμές των φυσικών μ,π που ικανοποιούν την (1) είναι : μ=6,π=7.
Έτσι, $\kappa=6\cdot 6=36, \lambda=7\cdot 7=49$ άρα ο ελάχιστος αριθμός κινήσεων είναι κ+λ=36+49=85 κινήσεις. ■

Διαγωνιστικά θέματα (Συνδυαστική,Παίγνια,Χρωματισμοί,Αναλλοίωτο)
Συντομογραφίες μαθηματικών διαγωνισμών
The American High School Mathematics Examination (AHSME)
The International Mathematical Olympiad (IMO)
Tournament of Towns
Balkan Mathematical Olympiad (BMO)
The American Regions Mathematics *League* (ARML*)*
Soviet Union Math Competitions(ASU)
Ελληνική εθνική Μαθηματική Ολυμπιάδα,Ε.Μ.Ε,(Αρχιμήδης)
Wisconsin Mathematics, Engineering and Science Talent Search (W.M.E.S.T.S)
American Invitational Mathematics Examination (AIME)
USA Mathematical Talent Search (USASMT)

Α162. Έξι μαθητές με διαφορετικά ύψη μπαίνουν σε ένα κατάστημα να αγοράσουν παγωτό. Με πόσους τρόπους μπορούν να μπουν σε μια σειρά για το ταμείο έτσι ώστε να μην υπάρχουν τρία διαδοχικά παιδιά στην ουρά με αύξουσα σειρά ύψους προς το ταμείο.*(2015 ARML)*

Λύση

Έστω N(A) το πλήθος των περιπτώσεων που ο πρώτος,ο δεύτερος και ο τρίτος μαθητής βρίσκονται σε φθίνουσα διάταξη ύψους,N(B) το πλήθος των περιπτώσεων που ο δεύτερος και ο τρίτος μαθητής και ο τέταρτος βρίσκονται σε φθίνουσα διάταξη ύψους , N(Γ) το πλήθος των περιπτώσεων που ο τρίτος μαθητής και ο τέταρτος και ο πέμπτος βρίσκονται σε φθίνουσα διάταξη ύψους, N(Δ) το πλήθος των περιπτώσεων που ο τέταρτος μαθητής και ο πέμπτος και ο έκτος βρίσκονται σε φθίνουσα διάταξη ύψους . Το πλήθος των διατάξεων 6 μαθητών σε μια σειρά είναι 6!=720 άρα το πλήθος των τρόπων που ικανοποιεί τα ζητούμενα του προβλήματος είναι:

$$720 - N(A \cup B \cup \Gamma \cup \Delta)$$

Από την αρχή εγκλεισμού αποκλεισμού ισχύει:

$$N(A \cup B \cup \Gamma \cup \Delta) = N(A) + N(B) + N(\Gamma) + N(\Delta) - N(A \cap B) - N(A \cap \Gamma) - N(B \cap \Gamma)$$
$$-N(A \cap \Delta) - N(B \cap \Delta) - N(\Gamma \cap \Delta) + N(A \cap B \cap \Gamma) + N(A \cap B \cap \Delta)$$
$$+N(A \cap \Gamma \cap \Delta) + N(B \cap \Gamma \cap \Delta) - N(A \cap B \cap \Gamma \cap \Delta)$$

● Για το N(A) επιλέγουμε 3 από τους 6 μαθητές με $\binom{6}{3}$ τρόπους ,μπαίνουν σε φθίνουσα διάταξη ύψους με ένα τρόπο και μας μένουν στην ουρά τρεις θέσεις με τους εναπομείναντες μαθητές να μπαίνουν σε σειρά με 3! τρόπους άρα από την πολλαπλασιαστική αρχή ισχύει: $N(A) = 3! \cdot \binom{6}{3} = 120$.

Το ίδιο προκύπτει και για τα N(B),N(Γ),N(Δ) άρα

$$N(A) = N(B) = N(\Gamma) = N(\Delta) = 3! \cdot \binom{6}{3} = 120$$

● Για $N(A\cap B)$ επιλέγουμε 4 από τους 6 μαθητές με $\binom{6}{4}$ τρόπους ,μπαίνουν σε φθίνουσα διάταξη ύψους με ένα τρόπο και μας μένουν στην ουρά δυο θέσεις με τους εναπομείναντες μαθητές να μπαίνουν σε σειρά με 2! τρόπους άρα από την πολλαπλασιαστική αρχή ισχύει: $N(A\cap B)=2!\cdot\binom{6}{4}=30$

● Για $N(A\cap \Gamma)$ επιλέγουμε 5 από τους 6 μαθητές με $\binom{6}{5}$ τρόπους ,μπαίνουν σε φθίνουσα διάταξη ύψους με ένα τρόπο και μας μένουν στην ουρά μια θέση με τους εναπομείναντες να μπαίνουν σε σειρά με 1! τρόπους άρα από την πολλαπλασιαστική αρχή ισχύει: $N(A\cap \Gamma)=1!\cdot\binom{6}{5}=6$

● Για $N(A\cap \Gamma)$ επιλέγουμε 3 από τους 6 μαθητές με $\binom{6}{3}$ τρόπους ,μπαίνουν σε φθίνουσα διάταξη ύψους με ένα τρόπο και μας μένουν στην ουρά τρεις θέση με τους εναπομείναντες να μπαίνουν σε σειρά $\binom{3}{3}=1$ από την πολλαπλασιαστική αρχή ισχύει:

$N(A\cap \Delta)=\binom{6}{3}=20$

Σκεπτόμενοι ανάλογα διαπιστώνουμε ότι:

● $N(B\cap \Gamma)=N(A\cap B)=30$, $N(B\cap \Delta)=N(A\cap \Gamma)=6$,
$N(\Gamma\cap \Delta)=N(A\cap B)=30$ και $N(A\cap B\cap \Gamma)=N(A\cap \Gamma)=6$,

● $N(A\cap B\cap \Delta)=1$, $N(A\cap \Gamma\cap \Delta)=1$ (έχουν μπει και οι έξι μαθητές σε φθίνουσα διάταξη ύψους) , $N(B\cap \Gamma\cap \Delta)=N(A\cap B\cap \Gamma)=6$, $N(A\cap B\cap \Gamma\cap \Delta)=1$

Με αντικατάσταση προκύπτει : $N(A\cup B\cup \Gamma\cup \Delta)=371$, άρα οι ζητούμενοι τρόποι είναι 720 -371=349.

Α163.Να βρείτε το πλήθος των θετικών επταψήφιων ακεραίων αριθμών που τα ψηφία τους δεν είναι κατά ανάγκη διαφορετικά και είναι διατεταγμένα κατά αύξουσα σειρά. *(AIME 2005)*

Λύση

Ένας θετικός επταψήφιος ακέραιος με αύξουσα σειρά ψηφίων καθορίζεται μόνο από τα 7 ψηφία που τον αποτελούν. Τα ψηφία είναι δυνατό να πάρουν τιμές από το σύνολο $\{1,2,3,4\ldots,9\}$,το ψηφίο 0 δεν μπορεί να είναι σε καμιά θέση εφόσον δεν μπορεί να είναι στην πρώτη από αριστερά θέση.Άρα, για να βρούμε το πλήθος τους αρκεί να πάρουμε τους επαναληπτικούς συνδυασμούς των 9 ψηφιων ανα 7 γίνει με

$\binom{9+7-1}{7}=\binom{15}{7}=6435$ τρόπους.

Α164. Πόσοι τριψήφιοι θετικοί ακέραιοι αριθμοί ικανοποιούν την συνθήκη ότι οποιαδήποτε δυο διαδοχικά ψηφία τους διαφέρουν κατά μια μονάδα.
Για παράδειγμα, οι αριθμοί 123,543,567,654 ικανοποιούν την προϋπόθεση του προβλήματος. *(W.M.E.S.T.S)*
Λύση
Αν το πρώτο ψηφίο του ζητούμενου αριθμού είναι το α τότε τα τρία ψηφία (εκατοντάδων, δεκάδων, μονάδων) είναι είτε (α,α+1,α+2),(α,α+1,α),(α,α-1,α-2) ή (α,α-1,α).Για καθεμία από τις 4 περιπτώσεις πρέπει να μετρήσουμε με πόσους τρόπους σχηματίζεται ο αριθμός ,έτσι:

(α,α+1,α+2): $1 \le \alpha \le 7$
(α,α+1,α): $1 \le \alpha \le 8$
(α,α-1,α-2): $2 \le \alpha \le 9$
(α,α-1,α): $1 \le \alpha \le 9$

Συνολικά από την προσθετική αρχή έχουμε: 7+8+8+9=32 διαφορετικοί αριθμοί.
Α165. Να αποδείξετε ότι ο αριθμός των ατόμων που χόρεψαν σε χορό με περιττό αριθμό ατόμων, είναι αριθμός άρτιος. *(1965 ARML)*
Λύση
Ας ονομάσουμε $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_\nu$ τους χορούς που έδωσε το καθένα από τα άτομα 1 έως ν. Αν προσθέσουμε όλους αυτούς τους χορούς, πρέπει να προκύψει αριθμός άρτιος διότι «αφού ο κ χόρεψε με τον λ και ο λ χόρεψε με τον κ» Από την άλλη μεριά γνωρίζουμε ότι οι αριθμοί $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_\nu$ είναι όλοι περιττοί. Τα δυο αυτά δεδομένα αποδεικνύουν ότι ο αριθμός ν που εκφράζει το πλήθος των ατόμων που χόρεψαν πρέπει να είναι άρτιος, διότι μόνο άρτιο πλήθος περιττών αριθμών μας δίνει αριθμό άρτιο.
Α166.Σε ένα ποδοσφαιρικό αγώνα 18 ομάδες έπαιξαν μεταξύ τους 8 γύρους, όπου κάθε ομάδα έπαιξε με 8 διαφορετικές ομάδες. Να αποδείξετε ότι μπορούμε να βρούμε 3 ομάδες οι οποίες δεν έπαιξαν μεταξύ τους ούτε ένα παιχνίδι. *(ASU 1981)*
Λύση
Ας δούμε μια από τις ομάδες.Αυτή έπαιξε με 8 ομάδες και δεν έπαιξε με 10 .Αν ανάμεσα στις 10 τελευταίες ομάδες υπάρχουν 2 οι οποίες δεν έπαιξαν μεταξύ τους ,τότε το ζητούμενο αποδείχτηκε. Ας υποθέσουμε ότι δεν συνέβη αυτό. Τότε, οι 10 αυτές ομάδες έπαιξαν μεταξύ τους και για αυτό χρειάστηκε να παίξουν μεταξύ τους 10*9/2=45 παιχνίδια. Ωστόσο σε κάθε γύρο,οι 10 αυτές ομάδες μπορούν να παίξουν μεταξύ τους το πολύ 5 παιχνίδια ,άρα για 8 γύρους το πολύ 40 παιχνίδια .Καταλήξαμε σε αντίφαση ,το οποίο αποδεικνύει το ζητούμενο.
Α167. Μια παρέα που αποτελείται από ν άτομα παίζει ένα επιτραπέζιο παιχνίδι με τους εξής κανόνες:
Ι. Σε κάθε γύρο του παιχνιδιού παίζουν ακριβώς 3 άτομα.
ΙΙ. Το παιχνίδι ολοκληρώνεται μετά από ν γύρους.
ΙΙΙ. Κάθε δυάδα παικτών έχει παίξει μαζί σε έναν τουλάχιστον γύρο.
Να προσδιορίσετε την μεγαλύτερη δυνατή τιμή του ν.*(Αρχιμήδης 2017)*
Λύση
Αφού σε κάθε γύρο του παιχνιδιού παίζουν ακριβώς 3 άτομα, το πλήθος των δυάδων σε κάθε γύρο είναι $\binom{3}{2} = 3$.Συνεπώς, όταν το παιχνίδι ολοκληρωθεί μετά από ν γύρους

,θα έχουν παίξει μαζί 3ν δυάδες ατόμων. Για να ικανοποιείται η τελευταία συνθήκη και να παίξουν όλες οι δυάδες παικτών, πρέπει το 3ν να είναι μεγαλύτερο ή ίσο από το συνολικό πλήθος των δυάδων, που είναι $\binom{\nu}{2}$.Δηλαδή, ισχύει:

$$\binom{\nu}{2} \le 3\nu \Leftrightarrow \frac{\nu!}{2(\nu-2)!} \le 3\nu \Leftrightarrow \frac{(\nu-2)!(\nu-1)\nu}{2(\nu-2)!} \le 3\nu \Leftrightarrow \frac{(\nu-1)\nu}{2} \le 3\nu \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\nu-1}{2} \le 3 \Leftrightarrow \nu \le 7$$

Στην συνέχεια, θα αποδείξουμε ότι η τιμή ν=7 είναι η μεγαλύτερη δυνατή που ικανοποιεί τους κανόνες του προβλήματος. Έτσι για ν=7 είναι $\binom{7}{2} = 21$ και να υποθέσουμε ότι τα επτά μέλη της παρέας είναι $\Pi_1,\Pi_2,\Pi_3,\Pi_4,\Pi_5,\Pi_6,\Pi_7$ τότε είναι δυνατόν να ορίσουμε επτά τριάδες που θα παίξουν στους επτά γύρους που πρέπει να γίνουν, έτσι ώστε όλα τα μέλη της παρέας ανά δυο να έχουν παίξει ένα παιχνίδι σε ένα τουλάχιστον γύρο. Μια τέτοια περίπτωση δίνουν οι τριάδες :

(Π_1,Π_2,Π_3) ,(Π_1,Π_4,Π_5),(Π_1,Π_6,Π_7),(Π_2,Π_4,Π_7),(Π_2,Π_5,Π_6),(Π_3,Π_4,Π_6),(Π_3,Π_5,Π_7)

Α168.Ο καθένας από 2001 μαθητές σε ένα σχολείο γνωρίζει είτε Ισπανικά είτε Γαλλικά είτε και τις δυο γλώσσες .Ο αριθμός των μαθητών που γνωρίζει Ισπανικά είναι μεταξύ του 80% και του 85% του συνόλου των μαθητών του σχολείου ,και ο αριθμός των μαθητών που γνωρίζει Γαλλικά είναι μεταξύ του 30% και του 40% του συνόλου των μαθητών του σχολείου. Έστω min ο μικρότερος αριθμός από μαθητές που γνωρίζουν και τις δυο γλώσσες και Max ο μεγαλύτερος αριθμός των μαθητών που γνωρίζουν και τις δυο γλώσσες. Να υπολογίσετε την διαφορά Max-min. *(AIME 2001)*

Λύση

Αν Α το σύνολο των μαθητών που γνωρίζουν Ισπανικά, Β το σύνολο των μαθητών που γνωρίζουν Γαλλικά, τότε $A \cap B$ το σύνολο των μαθητών που γνωρίζουν Ισπανικά και Γαλλικά .Τα αντίστοιχα πλήθη είναι :N(A) το πλήθος των μαθητών που γνωρίζουν ισπανικά, N(B) το πλήθος των μαθητών που γνωρίζουν Γαλλικά και $N(A \cap B)$ το πλήθος των μαθητών που γνωρίζουν ισπανικά και Γαλλικά.

Από υπόθεση ισχύει:

$$2001 \cdot \frac{80}{100} \le N(A) \le 2001 \cdot \frac{85}{100} \Leftrightarrow 1600{,}8 \le N(A) \le 1700{,}85 \text{ , } N(A) \in \mathbb{N} \text{ άρα}$$

$$1601 \le N(A) \le 1700 \quad (1)$$

$$2001 \cdot \frac{30}{100} \le N(B) \le 2001 \cdot \frac{40}{100} \Leftrightarrow 600{,}3 \le N(B) \le 800{,}4 \text{ , } N(B) \in \mathbb{N} \text{ άρα}$$

$$601 \le N(B) \le 800 \quad (2)$$

Από την αρχή εγκλεισμού αποκλεισμού ισχύει:

$$N(B) + N(A) - N(A \cap B) = N(A \cup B) = 2001 \Leftrightarrow N(B) + N(A) - N(A \cap B) = 2001$$

● Ισχύει $N(A \cap B) = \min$ όταν έχουμε τις μικρότερες τιμές των $N(B), N(A)$

Δηλαδή $601 + 1601 - \min = 2001 \Leftrightarrow \min = 201$

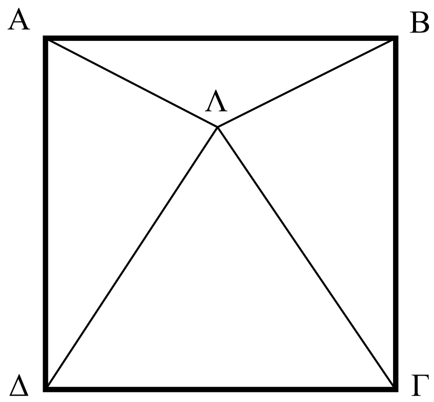
● Ισχύει $N(A \cap B) = Max$ όταν έχουμε τις μεγαλύτερες τιμές των $N(B), N(A)$
Δηλαδή $800 + 1700 - Max = 2001 \Leftrightarrow Max = 499$
Τελικά, προκύπτει: $Max - \min = 499 - 201 = 298$
Α169. Μπορούμε να μεταθέσουμε τις γραμμές και τις στήλες του πινάκα 7x7.

1	2	3	4	5	6	7
7	1	2	3	4	5	6
6	7	1	2	3	4	5
5	6	7	1	2	3	4
4	5	6	7	1	2	3
3	4	5	6	7	1	2
2	3	4	5	6	7	1

Πόσοι διαφορετικοί πίνακες μπορούν να προκύψουν; (Tournament of towns)
Λύση
Οι στήλες μπορούν μετατεθούν με 7! τρόπους έτσι ώστε η πρώτη γραμμή να είναι διαφορετική σε κάθε μετάθεση.Οι επόμενες 6 γραμμές μπορούν να μετατεθούν κατά 6! τρόπους έτσι ώστε η πρώτη στήλη να είναι διαφορετική σε κάθε μετάθεση.Όμως όταν έχουν καθοριστεί η πρώτη και η τελευταία στήλη όλα τα υπολοιπα στοιχεία του πίνακα είναι καθορισμένα.Άρα έχουμε συνολικά από την πολλαπλασιαστική αρχή 7!*6! διαφορετικούς πίνακες.

Α170. Δίνεται τετράγωνο S με πλευρά μήκους 20.Εστω Μ το σύνολο των τεσσάρων κορυφών του S με 1999 τυχαία σημεία στο εσωτερικό του. Να αποδείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα τρίγωνο με κορυφές σημεία του Μ με εμβαδό μικρότερη ή ίσο του 1/10.
(Βαλκανική μαθηματική ολυμπιάδα νέων 1999)
Λύση

Αφού οι κορυφές είναι στοιχεία του συνόλου Μ, αρχικά θεωρώ τα τρίγωνα ΛΑΒ,ΛΒΓ,ΛΔΓ,ΛΑΔ όπου Λ ένα σημείο του Μ διαφορετικό από τις κορυφές του.



Έστω Θ ένα δεύτερο σημείο του Μ διαφορετικό από το Λ ,τότε ή θα είναι εσωτερικό ενός από τα τέσσερα τρίγωνα ή θα βρίσκεται πάνω στην περίμετρο τους. Και στις δυο περιπτώσεις τα τρίγωνα γίνονται 6,δηλαδή με την θεώρηση ενός ακόμα από τα σημεία του Μ που είναι εσωτερικό του τετραγώνου τα τρίγωνα ,χωρίς **κοινά εσωτερικά σημεία** αυξάνονται κατά 2.Κάνοντας το ίδιο για τα υπόλοιπα σημεία παρατηρούμε τα τρίγωνα έχουν πλήθος 4+2*1998=4000.Αν υποθέσουμε τρίγωνα έχουν εμβαδό μεγαλύτερο του 1/10 και λάβουμε υπόψη ότι δεν έχουν ανά δυο κοινό μέρος επιφανείας θα έχουμε ότι το εμβαδό του τετραγώνου είναι μεγαλύτερου του 4000*1/10=400 που είναι άτοπο. Άρα ισχύει το ζητούμενο.

Α171.Τα παιδιά από μια τάξη 20 μαθητών βρίσκονται σε διακοπές.Καθένα από αυτά έστειλε μια ταχυδρομική κάρτα σε δέκα συμμαθητές του. Να αποδείξετε ότι τουλάχιστον δυο συμμαθητές αλληλογραφήσαν. *(Διαγωνισμός επιλογής Σλοβενίας)*

Λύση

Το πλήθος των φακέλων που μπορεί να αποστείλει καθένα από τα 20 παιδιά στα υπόλοιπα χωρίς να λάβει μια απάντηση υπολογίζεται ως το πλήθος των συνδυασμών των 20 ανά δυο,δηλ, $\binom{20}{2}=190$.

Από τα δεδομένα του προβλήματος όμως έχουν αποστέλλει 20*10=200 γράμματα. Εφόσον 200>190 ,σημαίνει ότι τουλάχιστον δυο παιδιά έχουν αλληλογραφήσει κυριολεκτικά.

Α172.Ο Μήτσος και η σύζυγός του καλούν σε δείπνο 4 παντρεμένα ζευγάρια. Στη διάρκεια του δείπνου, ο Μήτσος ρωτά τους 9 συνδαιτυμόνες του, πόσους πρωτογνώρισαν στο δείπνο και παίρνει 9 διαφορετικές απαντήσεις. Πόσους ανθρώπους γνώρισε η σύζυγός του; ***(P.Halmos)***

Λύση

Τέσσερεις ανθρώπους .Έστω ότι κάθε καλεσμένος παίρνει ένα αριθμό γ (0,1,2,3,..,8) το πλήθος των ανθρώπων που γνώρισε.Πόσους γνώρισε η γυναίκα του άνδρα (8) ;

Απάντηση κανένα.Πραγματικά ο άνδρας (8) και οι άνθρωποι που γνώρισε απαρτίζουν όλη την παρέα έκτος από την σύζυγο του (8).Συνεπως η σύζυγος του άνδρα (8) είναι η μόνη που μπορούσε να απαντήσει μηδέν.Πόσα άτομα τώρα γνώρισε το ταίρι του άνδρα (7);Απάντηση : Ακριβώς ένα.Ένας τρόπος για να το δούμε είναι να προσαρμόσουμε τον προηγούμενο συλλογισμό,αλλά μπορούμε και αλλιώς.Αφαιρούμε νοερά το ζεύγος (8) –(0) από την συνάντηση σαν να ήταν απόντες (και φυσικά δεν θα υπολογίσουμε τις γνωριμίες του).Αναγόμαστε σε μια συγκέντρωση 8 και όχι 10 ατόμων,ώστε ο μέγιστος αριθμός γνωριμιών για ένα άτομο να είναι 6 και το ταίρι του δεν γνώρισε κανένα.Συνεπώς,στο αρχικό πάρτι,το ταίρι του (7) πρέπει να είναι το (1) που έσφιξε μόνο το χέρι του (8).

Συνεχίζοντας,καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι κάθε αντρογύνο γνώρισε συνολικά 8 άτομα :8+0,7+1,6+2 και 5+3.Η μόνη περίπτωση που απομένει για τις γνωριμίες της γυναίκας του είναι ο αριθμός 4.

Α173.Δεκαεπτά άτομα επικοινωνούν μεταξύ τους με μηνύματα στο Fakebbook,ο καθένας με όλους τους άλλους.Στα μηνύματα συζητούνται μόνο τρία θέματα: Ποδόσφαιρο,Τέχνη,Μαγειρική. Κάθε ζεύγος ατόμων που ανταλλάσει μηνύματα ασχολείται μόνο με ένα από τα τρία αυτά θέματα.Να αποδείξετε ότι υπάρχουν τουλάχιστον 3 άτομα που ανταλλάσουν μηνύματα ανά δυο ασχολούμενα με το ίδιο θέμα. (IMO 1964)

Λύση

Το πρόβλημα λύνεται με διαδοχικές εφαρμογές της αρχής της περιστεροφωλιάς . Ονομάζουμε $Α_1,Α_2,\ldots,Α_{17}$ τα 17 άτομα και συμβολίζουμε Π,Τ,Μ τα τρία θέματα της ανταλλαγής μηνυμάτων. Επιλέγουμε τυχαία ένα άτομο, έστω το $Α_1$.Αυτο ανταλλάσει μηνύματα με τα υπόλοιπα 16 άτομα σε τρία διαφορετικά θέματα .Επομένως ($16=3*5+1$, θέματα φωλιές, άτομα περιστέρια)) θα υπάρχουν τουλάχιστον 6 ανταλλαγές μηνυμάτων του $Α_1$ πάνω σε ένα θέμα,έστω το Π, και μπορούμε να διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

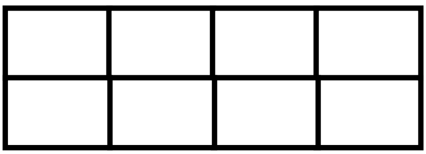
α. Ένα τουλάχιστον άτομο από το σύνολο $Σ_1$ των ατόμων με τα οποία ανταλλάσει μηνύματα ο $Α_1$ στο θέμα Π, ανταλλάσει μηνύματα με ένα τουλάχιστον άτομο του συνόλου Σ1 στο ίδιο θέμα Π. Τότε προφανώς υπάρχουν τρία τουλάχιστον άτομα από τα 17 που ανταλλάσουν μηνύματα στο ίδιο θέμα.

β. Όλα τα στοιχεία του συνόλου $Σ_1$ ανταλλάσουν μηνύματα μεταξύ τους στα θέματα Τ,Μ. Θεωρούμε ένα άτομο του συνόλου $Σ_1$, έστω το $Α_2$.Συμφωνα με την αρχή της περιστεροφωλιάς, το άτομο $Α_2$ θα ανταλλάσει μηνύματα με τρία τουλάχιστον από τα υπόλοιπα 5 άτομα του συνόλου $Σ_1$ πάνω στο ίδιο θέμα, έστω το Τ. Ονομάζουμε $Σ_2$ το σύνολο των ατόμων με τα οποία ανταλλάσει μηνύματα το άτομο $Α_2$ στο θέμα Τ. Τώρα έχουμε τις εξής υποπεριπτώσεις:

i.Αν δυο άτομα του $Σ_2$ ανταλλάσουν μηνύματα μεταξύ τους πάνω στο θέμα Τ, τότε υπάρχουν 3 τουλάχιστον άτομα που ανταλλάσουν μηνύματα στο ίδιο θέμα.

ii.Αν κανένα ζεύγος ατόμων από αυτά του $Σ_2$ δεν ανταλλάσει μήνυμα στο θέμα Τ, τότε όλοι θα ανταλλάσουν μηνύματα στο θέμα Μ, οπότε πάλι θα υπάρχουν τουλάχιστον 3 άτομα που ανταλλάσουν μηνύματα στο ίδιο θέμα.

Α174. Δυο παίκτες παίζουν σε διαδοχικούς γύρους τοποθετώντας στα τετράγωνα του 2x4 ορθογωνίου του σχήματος τους αριθμούς {1,2,3,45,6,7,8}.καθε αριθμός μπορεί να χρησιμοποιηθεί μόνο μια φόρα. Το παιχνίδι



τελειώνει όταν συμπληρωθούν όλα τα
τετράγωνα.Ο πρώτος παίκτης κερδίζει αν
το γινόμενο των αριθμών στην πάνω γραμμή είναι μεγαλύτερο από το γινόμενο των αριθμών της κάτω γραμμής. Σε αντίθετη περίπτωση κερδίζει ο δεύτερος παίκτης. Υπάρχει στρατηγική νίκης για κάποιον από τους δυο παίκτες; (USAMTS 2017)

Λύση

Ο πρώτος παίκτης έχει στρατηγική νίκης. Παρατηρούμε ότι αν
κάποιος παίκτης χρησιμοποιήσει και το 1 και το 2 είναι βέβαιο ότι θα χάσει. Διότι αν ένας παίκτης παίξει το 1 και το 2 το γινόμενο του θα είναι το πολύ 1*2*7*8=112 το όποιο είναι μικρότερο από το 3*4*5*6*=360.Ετσι , κάθε παίκτης πρέπει να αποφύγει να επιλέξει το 1 και το 2.Ας δούμε πως μπορεί να το πτυχή ο πρώτος παίκτης.
Ο πρώτος παίκτης θα πρέπει να «δίνει» πάντα τον μικρότερο αριθμό στον δεύτερο παίκτη ως εξής.
-Ο πρώτος παίκτης τοποθετεί το 1 στην κάτω γραμμή.
-Ο δεύτερος παίκτης πρέπει να απαντήσει τοποθετώντας το 2 στην πάνω γραμμή αν δεν το κάνει θα χάσει με βεβαιότητα. –-Ακολούθως, ο πρώτος παίκτης τοποθετεί το 3 στην κάτω γραμμή.
Τώρα το ορθογώνιο έχει την μορφή:

2			
1	3		

Το μέγιστο δυνατό γινόμενο για την κάτω γραμμή είναι
1*3*7*8=168, το οποίο είναι μικρότερο από το 2*3*5*6=240.
Ετσι, ο πρώτος παίκτης κερδίζει το παιχνίδι!

Α175.Κάθε σημείο στο επίπεδο χρωματίζεται με κόκκινο ή πράσινο ή μπλε χρώμα. Να αποδείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο με τις τέσσερεις κορυφές του να έχουν το ίδιο χρώμα. *(2006 USAMTS)*

Λύση

Θεωρούμε ένα ορθογώνιο πλέγμα 4x19 σημείων στο επίπεδο. Για κάθε μια γραμμή 4 σημείων από την αρχή της περιστεροφωλιάς ,2 πρέπει να είναι του ίδιου χρώματος ,για παράδειγμα πράσινο. Ας συμβολίσουμε μια τέτοια γραμμή πράσινη. Και βρίσκουμε κατ αυτό τον τρόπο το «χρώμα» και των 19 γραμμών.Ξανά από την αρχή της περιστεροφωλιάς 7 γραμμές πρέπει να έχουν το ίδιο χρώμα(19=3*6+1). Χωρίς βλάβη της γενικότητας θεωρούμε και αυτό το χρώμα «πράσινο». Ας δούμε τώρα την τοποθέτηση των 2 πρασίνων σημείων σε κάθε γραμμή 4 σημείων. Υπάρχουν $\binom{4}{2}=6$ τρόποι να τοποθετήσουμε 2 πράσινα σημεία σε 4 θέσεις άρα ξανά από την αρχή της περιστεροφωλιάς 2 από τους τρόπους έχουν την ίδια τοποθέτηση. Επιλέγοντας αυτά τα 4 σημεία σε αυτές τις 2 γραμμές έχουμε σχηματίσει ένα μονοχρωματικό ορθογώνιο παραλληλόγραμμο.

Α176. Ένας φοιτητής του Ε.Μ.Π διάβαζε ανώτερα μαθηματικά το προηγούμενο καλοκαίρι για 37 ημέρες σύμφωνα με τους εξής κανόνες:

i.Διάβαζε τουλάχιστον μια ώρα κάθε μέρα.
ii.Διάβαζε ακέραιο αριθμό ωρών,αλλά όχι πάνω από 12 ώρες κάθε μέρα.
iii.Έπρεπε να διαβάσει το πολύ 60 ώρες συνολικά.
Να αποδειχθεί ότι υπήρχαν κάποιες διαδοχικές ημέρες κατά τις οποίες ο μαθητής διάβαζε ακριβώς 13 ώρες. *(Αρχιμήδης 2002)*

Λύση

Πανομοιότυπο με το παράδειγμα 92 στην σελ 96 .Έστω α_i το άθροισμα των ωρών που έχει διαβάσει μέχρι την i ημέρα. Αφού κάθε μέρα διαβάζει τουλάχιστον μια ώρα, θα έχουμε:

$$1 \le \alpha_1 < \alpha_2 < .... < \alpha_{37} \le 60$$

Επομένως θα έχουμε:

$$14 \le \alpha_1 + 13 < \alpha_2 + 13 < .... < \alpha_{37} + 13 \le 73$$

Οι αριθμοί $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_{37}, \alpha_1 + 13, \alpha_2 + 13, ..., \alpha_{37} + 13$ είναι 74 αριθμοί από το 1 μέχρι το 73.Αρα θα υπάρχουν δυο από αυτούς που είναι ίσοι ,έστω $\alpha_\kappa, \alpha_\lambda$,δηλαδή $\alpha_\kappa = \alpha_\lambda + 13$ το οποίο δίνει ότι στις διαδοχικές ημέρες λ+1,λ+2,…,κ ο φοιτητής διάβασε 13 ώρες.

Α177. Χρωματίζουμε τους ακεραίους από το 1 μέχρι το 999 με κόκκινο ή με μπλε χρώμα, έτσι ώστε κάθε ακέραιος να έχει ένα από τα δυο χρώματα. Πόσους διαφορετικούς χρωματισμούς μπορούμε να κατασκευάσουμε με την ιδιότητα να υπάρχουν περισσότεροι κόκκινοι αριθμοί μεταξύ των αριθμών 1,…,500 από ότι μεταξύ των αριθμών 501,…999; *(W.M.E.S.T.S 2018)*

Λύση

Έχουμε 999 ακεραίους και δυο χρώματα (κόκκινο ,μπλε) τότε από την πολλαπλασιαστική αρχή μπορούμε να τους χρωματίσουμε με 2^{999} τρόπους .Αυτό είναι το πλήθος των χρωματισμών χωρίς να έχουμε κανένα περιορισμό. Θα δείξουμε ότι το πλήθος των χρωματισμών με την προϋπόθεση τη εκφώνησης είναι 2^{998}.

Ονομάζουμε ένα χρωματισμό των αριθμών 1,….999 *καλό* αν υπάρχουν περισσότεροι κόκκινοι αριθμοί μεταξύ των αριθμών 1,…,500 από ότι μεταξύ των αριθμών 501,…999.Θα δείξουμε ότι αν σε ένα *καλό* χρωματισμό αλλάξουμε το χρώμα κάθε αριθμού (μπλε σε κόκκινο, κόκκινο σε μπλε) τότε προκύπτει *μη καλός* χρωματισμός και το αντίστροφο.

Ας θεωρήσουμε ένα *καλό* χρωματισμό και έστω x το πλήθος των αριθμών μεταξύ 1,..,500 που χρωματιστήκαν κόκκινοι και y το πλήθος των κόκκινων αριθμών μεταξύ 501,..,999 που χρωματιστήκαν μπλε .Αλλάζοντας το χρώμα κάθε αριθμού από 1 μέχρι το 999, ο νέος χρωματισμός θα έχει 500-x κόκκινους αριθμούς μεταξύ των 1,…,500 και 499-y κόκκινους αριθμούς μεταξύ των 501,..,999. Αλλά x>y άρα 499-x<499-y και εφόσον μιλάμε πάντα για ακεραίους ισχύει $500 - x \le 499 - y$.Από όπου προκύπτει ο νέος χρωματισμός δεν είναι *καλός*.

Με παρόμοιο συλλογισμό αν ένας χρωματισμός δεν είναι *καλός* τότε αλλάζοντας το χρώμα σε καθ αριθμό με παρόμοιο συμβολισμό προκύπτει $499 - x \ge 499 - y$ άρα $500 - x > 499 - y$ έτσι ο νέος χρωματισμός είναι *καλός*.

Αύτη η 1-1 αντιστοιχία μεταξύ καλών και μη καλών χρωματισμών συνεπάγεται ότι το πλήθος των καλών και των μη καλών χρωματισμών είναι το ίδιο. Αν X_1 το πλήθος των καλών χρωματισμών και X_2 το πλήθος των μη καλών χρωματισμών ισχύει
$X1+X2=2^{999}$ και $X_1= X_2$. Συνεπώς $2X1 =2^{999}$ ή $X1 =2^{998}$

Α178.Δημιουργούμε λέξεις χρησιμοποιώντας μόνο το γράμματα Α,Β,Γ, σε μια λέξη δεν πρέπει κατά ανάγκη να βρίσκονται τα τρία γράμματα. Ορίζουμε μια λέξη «**καλή**» αν,

- το επόμενο γράμμα από το Α δεν είναι το γράμμα Β ,
- το επόμενο γράμμα από το Β δεν είναι το γράμμα Γ ,
- το επόμενο γράμμα από το Γ δεν είναι το γράμμα Α ,

Πόσες καλές λέξεις με 7 γράμματα υπάρχουν; *(AIME 2003)*
Λύση
Έχουμε τρεις επιλογές για το πρώτο γράμμα της λέξης (Α ή Β ή Γ) , ωστόσο μετά το 1° γράμμα- όποιο και αν είναι αυτό- έχουμε μόνο δυο επιλογές και το ίδιο ισχύει για τα επόμενα 5 γράμματα άρα έχουμε από την πολλαπλασιαστική αρχή: $3\cdot 2^6 = 192$ καλές λέξεις με 7 γράμματα.
Α179. Σε ένα διεθνές συνέδριο λαμβάνουν μέρος 1985 άτομα. Σε κάθε ομάδα τριών ατόμων υπάρχουν τουλάχιστον δυο άτομα που μιλούν την ίδια γλώσσα. Γνωρίζοντας ότι κάθε άτομο μιλάει το πολύ πέντε γλώσσες, να αποδείξετε ότι υπάρχουν τουλάχιστον 200 άτομα που μιλούν την ίδια γλώσσα.
(Βαλκανική μαθηματική ολυμπιάδα 1985)
Λύση
Διακρίνουμε δυο περιπτώσεις.
- Ο σύνεδρος Α έχει με καθέναν από τους υπολοίπους 1984 σύνεδρους μια (τουλάχιστον) κοινή γλώσσα. Επειδή ο Α μιλάει το πολύ 5 γλώσσες και ισχύει 1984=5*396+4, από την αρχή της περιστεροφωλιάς μια τουλάχιστον από αυτές θα ομιλείται από 397 άτομα.Άρα σε αυτήν την περίπτωση ισχύει ότι υπάρχουν τουλάχιστον 200 άτομα που μιλούν την ίδια γλώσσα .
- Ο σύνεδρος Α δεν έχει με καθέναν από τους υπολοίπους 1984 συνέδρους κοινή γλώσσα .Τότε θα υπάρχει σύνεδρος Β που δεν μιλάει κοινή γλώσσα με τον Α, όποτε οι δυο σύνεδροι Α και Β θα μιλούν συνολικά το πολύ 10 διαφορετικές γλώσσες.

Αν θεωρήσουμε τώρα όλες τις δυνατές τριάδες {Α,Β,Γ} ,όπου Γ είναι ένας εκ των υπολοίπων 1983 σύνεδρων, τότε σε κάθε μια από αυτές πρέπει δυο τουλάχιστον άτομα να μιλούν κοινή γλώσσα. Άρα καθένας από τους υπολοίπους 1983 σύνεδρους πρέπει να μιλάει μια τουλάχιστον από τις γλώσσες των Α,Β που είναι το πολύ 10, ισχύει 1983=10*198+3 οπότε από την αρχή της περιστεροφωλιάς μια τουλάχιστον από αυτές θα ομιλείται από τουλάχιστον 199 συνέδρους. Αν ληφθεί υπόψη ο Α ή ο Β τότε η συγκεκριμένη γλώσσα θα ομιλείται από τουλάχιστον 200 άτομα.
Α180. Ο καθένας από ν δημοσιογράφους κατέχει μια σημαντική πληροφορία ,και οι ν πληροφορίες είναι όλες διαφορετικές μεταξύ τους. Κάθε φορά που ο δημοσιογράφος Α τηλεφωνεί στον δημοσιογράφο Β του αποκαλύπτει όλες τις πληροφορίες που γνωρίζει

την ίδια στιγμή που ο δημοσιογράφος Β δεν αποκαλύπτει τίποτα από ότι γνωρίζει στον δημοσιογράφο Α.
Ποιος είναι ο ελάχιστος αριθμός τηλεφωνημάτων- μεταξύ των ν δημοσιογράφων- που απαιτούνται έτσι ώστε, και οι ν δημοσιογράφοι να γνωρίζουν όλες στις πληροφορίες; (SMO 2006)
Λύση
Ισχυριζόμαστε ότι ο ελάχιστος αριθμός τηλεφωνημάτων που απαιτούνται είναι 2ν-2. Έστω Α ένας συγκεκριμένος δημοσιογράφος, τα 2ν-2 τηλεφωνήματα που έκανε ο Α σε καθένα από τους υπολοίπους δημοσιογράφους και αντίστροφα θα αφήσουν κάθε δημοσιογράφο ενήμερο για όλες τις πληροφορίες. Άρα 2ν-2 τηλεφωνήματα αρκούν. Τώρα πρέπει να δείξουμε ότι λιγότερα τηλεφωνήματα από 2ν-2 δεν αρκούν. Υποθέτουμε ότι υπάρχει μια ακολουθία τηλεφωνημάτων που ενημερώνει κάθε δημοσιογράφο. Αν Β είναι ο πρώτος δημοσιογράφος που ενημερώνεται και για τις ν πληροφορίες και λαμβάνει την τελευταία πληροφορία στο κ τηλεφώνημα. Τότε ο καθένας από τους υπολοίπους ν-1 δημοσιογράφους θα πρέπει να έχει κάνει τηλεφώνημα προηγουμένως του κ τηλεφωνήματος έτσι ώστε ο Β να είναι πλήρως ενημερωμένος. Όλοι αυτοί οι ν-1 δημοσιογράφοι πρέπει να έλαβαν τουλάχιστον ένα τηλεφώνημα μετά από το κ τηλεφώνημα εφόσον δεν είναι πλήρως ενημερωμένοι όταν έχει γίνει το κ τηλεφώνημα. Άρα ο ελάχιστος αριθμός τηλεφωνημάτων είναι 2ν-2!

Α181.Να αποδείξετε ότι από ένα σύνολο δέκα διαφορετικών διψήφιων αριθμών,είναι δυνατόν να επιλέξουμε δυο υποσύνολα ξένα μεταξύ τους, των οποίων τα στοιχεία να έχουν το ίδιο άθροισμα. *(IMO 1972)*
Λύση
Έστω το σύνολο $S=\{α_1,α_2,α_3,α_4,..,α_ν\}$ ένα σύνολο με ν στοιχεία ,έχουμε αποδείξει ότι ο αριθμός των υποσυνόλων του συνόλου S είναι $2^{10}=1024$.Στο σύνολο με τα 10 στοιχεία που είναι διψήφιοι αριθμοί, το άθροισμα των στοιχείων σε οποιοδήποτε υποσύνολο του θα είναι μικρότερο ή ίσο του 10*99=990.Πραγματικά, το μικρότερο δυνατό άθροισμα είναι το 10 και το μεγαλύτερο δυνατό άθροισμα είναι: 99+98+…+91+90=945
Παρατηρούμε ότι έχουμε συνολικά 945-10+1=936 διαφορετικά δυνατά αθροίσματα στοιχείων των υποσυνόλων του S,αν εξαιρέσουμε το κενό σύνολο,ενώ το πλήθος των υποσυνόλων είναι 1024.Επομενως,συμφωνα με την αρχή της περιστεροφωλιάς - θεωρούμε τα υποσύνολα ως περιστέρια και τα αθροίσματα ως περιστεροφωλιές- τουλάχιστον δυο διαφορετικά υποσύνολα S_1,S_2 θα έχουν το ίδιο άθροισμα στοιχείων.Αν τα υποσύνολα S_1,S_2 είναι ξένα μεταξύ τους, τότε αυτά αποτελούν την λύση του προβλήματος.Αν είναι $S_1 \cap S_2 \neq \varnothing$,τότε αφαιρούμε από τα S_1,S_2 τα κοινά τους στοιχεία, οπότε προκύπτουν υποσύνολα $S_1΄,S_2΄$ που είναι ξένα μεταξύ τους και έχουν το ίδιο άθροισμα.

Α182. Για πόσα ζεύγη διαδοχικών αριθμών από το σύνολο

$$\{1000,1001,1002,\ldots,1999,2000\}$$

Δεν υπάρχει κρατούμενο στην πρόσθεση μεταξύ τους. *(AIME 1992)*
Λύση

Έστω ο αριθμός Χ τότε γράφεται στο δεκαδικό σύστημα του αριθμού $\overline{1\alpha\beta\gamma}$.Αν ένας από τους α,β,γ είναι 5,6,7 ή 8 τότε θα υπάρχει κρατούμενο στην πρόσθεση όταν προστεθούν ο Χ και ο Χ+1.Αν β=9 και γ≠9 ή αν α=9 και β≠9 ή γ≠9 θα έχουμε επίσης κρατούμενο στην πρόσθεση των Χ και Χ+1.
Αν Χ δεν είναι ένας από τους ακέραιους που ορίστηκαν παραπάνω , τότε ο Χ εχει μια από τις μορφές:

$$\overline{1\alpha\beta\gamma} \quad , \overline{1\alpha\beta 9} \quad , \overline{1\alpha 99} \quad , \quad 1999$$

Όπου $\alpha, \beta, \gamma \in \{0,1,2,3,4\}$.Για αυτούς τους αριθμούς Χ ,δεν υπάρχει κρατούμενο όταν προστεθούν οι Χ και Χ+1.Άρα από την προσθετική αρχή έχουμε συνολικά: $5^3+5^2+5+1=156$ τιμές του Χ.

Α183.Ν ποδοσφαιρικές ομάδες έπαιξαν σε ένα τουρνουά όπου κάθε ομάδα έχει παίξει με όλες τις άλλες ακριβώς μια φορά. Κάθε ομάδα κέρδισε 10 παιχνίδια και έχασε 10 παιχνίδια, δεν υπήρξαν ισοπαλίες.
i.Πόσες ομάδες έλαβαν μέρος στο τουρνουά;
ii.Πόσες τριάδες ομάδων έχουμε στο συγκεκριμένο τουρνουά όπου μια ομάδα κέρδισε τις άλλες δυο.
iii.Πόσες τριάδες ομάδων {Α,Β,Γ} έχουμε στο συγκεκριμένο τουρνουά όπου η Α κέρδισε την Β ,η Β κέρδισε την Γ και η Γ κέρδισε την Α;

(AMC Αμερικανικός διαγωνισμός επιλογής)

Λύση
i.Κάθε ομάδα έπαιξε με όλες τις άλλες ομάδες και από υπόθεση έπαιξε 20 παιχνίδια άρα το πλήθος των ομάδων είναι 21.
ii.Για την ομάδα από τις τρεις που κέρδισε έχουμε 21 επιλογές. Από τις νίκες που έκανε η καθεμία (10) έχουμε $\binom{10}{2} = 45$.Από την πολλαπλασιαστική αρχή το πλήθος των τριάδων των ομάδων η μια κέρδισε τις άλλες δυο είναι 45*21=945.
iii.Το πλήθος των ομάδων ανά τριάδες που έλαβαν μέρος στο τουρνουά είναι

$$\binom{21}{3} = 1330$$

Το ζητούμενο πλήθος προκύπτει αν από το σύνολο όλων των τριάδων που έλαβαν μέρος στο τουρνουά αφαιρέσουμε το πλήθος των τριάδων που η μια ομάδα κέρδισε τις άλλες δυο. Τελικά 1330-945=385

Α184. Θεωρούμε το σύνολο Μ={1,2,3,…,2003}.Ποσα υποσύνολα του Μ με άρτιο αριθμό στοιχειών υπάρχουν; *(Προκριματικός διαγωνισμός νέων 2003)*
Λύση
Το πλήθος όλων των υποσυνόλων του Μ είναι 2^{2003}.Εστω Α το υποσύνολο του συνόλου Μ με άρτιο αριθμό στοιχείων. Το συμπληρωματικό σύνολο Α’ του Α ως προς το σύνολο Μ έχει περιττό πλήθος στοιχείων .Επομένως, σε κάθε υποσύνολο του Μ με άρτιο πλήθος στοιχείων αντιστοιχίζεται μονοσήμαντα ακριβώς ένα υποσύνολο του Μ

με περιττό πλήθος στοιχείων, οπότε το πλήθος των υποσυνόλων του Μ με άρτιο πλήθος στοιχείων ισούται με το πλήθος των υποσυνόλων του Μ με περιττό πλήθος στοιχείων και καθένα από αυτά είναι ίσο με $\frac{1}{2}\cdot 2^{2003}=2^{2002}$.

(Χρησιμοποιήθηκε η 1-1 αντιστοιχία(Bijection Principle.)

Α185. Πάνω σε καθεμία πλευρά τετράγωνου ΑΒΓΔ θεωρούμε 3 σημεία διαφορετικά μεταξύ τους.
i. Να προσδιορίσετε τον αριθμό των ευθύγραμμων τμημάτων που ορίζονται με άκρα τα σημεία αυτά και δεν βρίσκονται πάνω στις πλευρές του τετράγωνου.
ii. Δεν υπάρχει τριάδα από τα προηγούμενα ευθύγραμμα τμήματα που να διέρχονται από το ίδιο σημείο. Να βρείτε πόσα σημεία τομής των τμημάτων αυτών υπάρχουν μέσα στο τετράγωνο; *(Προκριματικός Διαγωνισμός Νέων 2011)*
Λύση
i.Οποιοδήποτε σημείο από τα 3 που υπάρχουν σε μια πλευρά του τετράγωνου ορίζει με καθένα από τα υπόλοιπα 9 σημεία (των άλλων τριών πλευρών) ένα ευθύγραμμο τμήμα που δεν ανήκει σε κάποια πλευρά του τετραγώνου, οπότε από τα τρία σημεία μια πλευράς ορίζονται 27 τέτοια ευθύγραμμα τμήματα. Έτσι από τις τέσσερεις πλευρές του τετραγώνου θα ορίζονται 4*27=108 τέτοια τμήματα, τα οποία όμως έχουν καταμετρηθεί δυο φορές, μια για κάθε άκρο τους. Συνεπώς ο ζητούμενος αριθμός τμημάτων είναι 108/2=54.
Εναλλακτικά θα μπορούσαμε να εργαστούμε ως εξής:
Από τα 12 σημεία των πλευρών του τετραγώνου ορίζονται συνολικά $\binom{12}{2}=66$ ευθύγραμμα τμήματα με άκρα τα σημεία αυτά. Όμως $4\cdot\binom{3}{2}=12$ βρίσκονται πάνω στις πλευρές του τετραγώνου. Άρα, τα ζητούμενα ευθύγραμμα τμήματα είναι: 66-12=54
ii. Για οποιοδήποτε εσωτερικό σημείο του τετραγώνου που είναι σημείο τομής δυο από τα 54 ευθύγραμμα τμήματα που περιγράψαμε παραπάνω, απαιτείται η ύπαρξη κυρτού τετραπλεύρου με κορυφές πάνω στις πλευρές του τετραγώνου (δυο το πολύ σε μια πλευρά) δηλαδή απαιτούνται 4 σημεία από τα οποία δυο το πολύ να βρίσκονται σε μια πλευρά.
Αντίστροφα, από οποιαδήποτε τετράδα σημείων πάνω στο τετράγωνο που το πολύ δυο ανήκουν σε μια πλευρά, ορίζονται έξι συνολικά τμήματα (πλευρές και διαγώνιοι ενός κυρτού τετραπλεύρου),τα οποία τέμνονται σε ένα μόνο εσωτερικό σημείο του τετραγώνου.
Ο αριθμός των τετράδων που ορίζονται από τα 12 συνολικά σημεία είναι ίσος με τους συνδυασμούς των 12 στοιχείων ανά 4,είναι:

$$\binom{12}{4}=\frac{12!}{4!(12-4)!}=\frac{12!}{4!8!}=\frac{8!\cdot 9\cdot 10\cdot 11\cdot 12}{4!8!}=\frac{9\cdot 10\cdot 11\cdot 12}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}=495$$

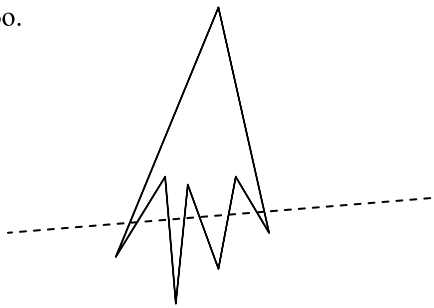
Όμως από τις παραπάνω τετράδες υπάρχουν κάποιες που δεν ορίζουν κυρτό τετράπλευρο. Είναι αυτές που έχουν τρία σημεία τους πάνω σε μια πλευρά του τετραγώνου.

Επειδή για τα τρία σημεία μιας πλευράς ορίζονται 9 τέτοιες τετράδες συνολικά για τις 4 πλευρές του τετραγώνου θα ορίζονται $4 \cdot 9 = 36$ τέτοιες τετράδες .
Επομένως ,ο αριθμός των ζητούμενων σημείων τομής ευθύγραμμων τμημάτων που είναι μέσα στο τετράγωνο, ισούται με $\binom{12}{4} - 36 = 495 - 36 = 459$

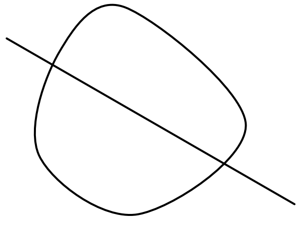
Χρησιμοποιήθηκε η 1-1 αντιστοιχία(Bijection Principle) μεταξύ του συνόλου των σημείων τομής και των κυρτών τετραπλεύρων με κορυφές πάνω στις πλευρές του τετραγώνου με δυο το πολύ σημεία σε μια πλευρά.

Α186. Μπορείτε να κατασκευάσετε ένα οκτάπλευρο και μια ευθεία που να τέμνει όλες τις πλευρές του; Ακολούθως να αποδείξετε ότι δεν υπάρχει ευθεία που να τέμνει όλες τις πλευρές ενός επιπέδου πολυγώνου με 2021 πλευρές; *(Tournament of towns Junior)*

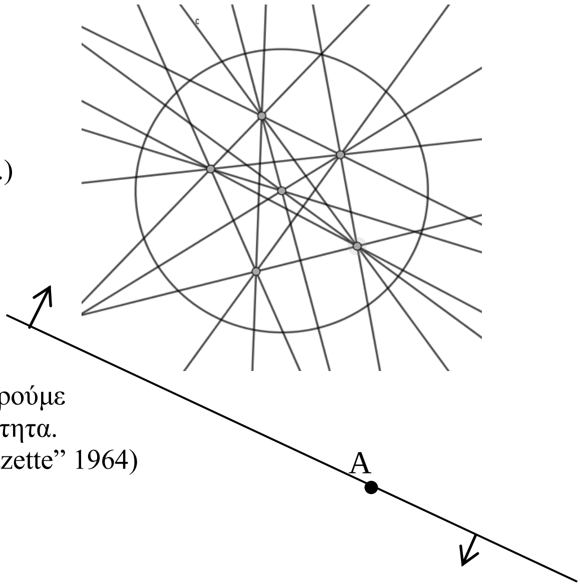
Λύση
Το σχήμα δείχνει ότι είναι δυνατό. Για απαντήσουμε στο δεύτερο ερώτημα παρατηρούμε το εξής :Η ευθεία που τέμνει τις πλευρές του οκταπλεύρου, αφήνει 4 κορυφές στο ένα ημιεπίπεδο και τις άλλες 4 στο άλλο ημιεπίπεδο.
Το ίδιο θα συνέβαινε με κάθε σχήμα που έχει άρτιο αριθμό πλευρών. Όμως σε ένα σχήμα που έχει περιττό αριθμό πλευρών, όπως αυτό με τις 2021 πλευρές, αυτό δεν μπορεί να συμβεί .Άρα δεν υπάρχει ευθεία με την ζητούμενη ιδιότητα.



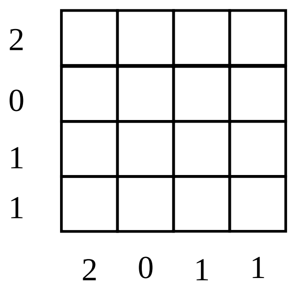
Α187. Στο εσωτερικό της κλειστής καμπύλης του σχήματος βρίσκονται άπειρα διακριτά σημεία.
Ας υποθέσουμε ότι επιλέγουμε τυχαία ένα εκατομμύριο από αυτά.Είναι δυνατό να τοποθετήσουμε μια ευθεία γραμμή στο εσωτερικό της καμπύλης με τέτοιο τρόπο ώστε:
Α.Να τέμνει την καμπύλη.
Β.Να μην αγγίζει κανένα από τα σημεία που διαλέξαμε.



Γ.Να χωρίζει το σύνολο των σημείων σε δυο υποσύνολα,το καθένα από τα οποία θα περιέχει 500000 σημεία και θα βρίσκεται από το ένα και από το άλλο σημείο της ευθείας;
Αν η απάντηση σας είναι θετική πρέπει να την αποδείξετε.
Λύση
Είναι εύκολο να αποδειχθεί ότι για κάθε πεπερασμένο σύνολο σημείων του επιπέδου υπάρχουν άπειρες ευθείες,που διχοτομούν το εν λογω σύνολο.Η παρακάτω απόδειξη για 6 σημεία που φαίνεται στο σχήμα ,εφαρμόζεται για οποιοδήποτε πεπερασμένο αριθμό σημείων.Σχεδιάστε κάθε γραμμή που ορίζεται από όλα τα πιθανά ζεύγη σημείων που έχουμε.Πάρτε στην συνέχεια,ένα άλλο σημείο,το Α,το οποίο βρίσκεται έξω από την κλειστή καμπύλη,που περιβάλλει τα 6 σημεία και που δεν ανήκει σε καμία από τις ευθείες οι οποίες ήδη υπάρχουν στο επίπεδο.Σχεδιάστε μία ευθεία,που διέρχεται από το Α.Καθώς περιστρέφεται η ευθεία αυτή γύρω από το Α κατά την διεύθυνση των βελών,θα διέρχεται από ένα σημείο κάθε φορά.(Είναι αδύνατο να περάσει από δυο σημεία ταυτόχρονα, γιατί αυτό θα σήμαινε ότι το σημείο Α βρίσκεται πάνω στην ευθεία, που ορίζεται από αυτά τα δυο σημεία.) Έτσι η ευθεία κάποια στιγμή θα έχει περάσει πάνω από τα μισά σημεία και συνεπώς θα έχει διχοτομήσει το σύνολο των σημείων.Δεδομένου ότι το Α μπορεί να καταλάβει άπειρες θέσεις, άπειρες είναι και οι ευθείες που μπορούμε να εντοπίσουμε με την παραπάνω ιδιότητα.
(Herbert Wills,”The mathematical Gazette” 1964)



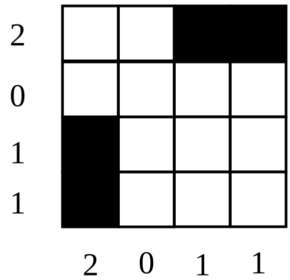
Α188.Το τετράγωνο του σχήματος αποτελείται από 16 τετράγωνα , ορισμένα από τα όποια θέλουμε να χρωματίσουμε μαύρα. Οι αριθμοί αριστερά κάθε γραμμής και κάτω από κάθε στήλη δείχνουν πόσα τετραγωνάκια κάθε γραμμής και στήλης μπορούμε να χρωματίσουμε μαύρα. Με πόσους τρόπους μπορεί να γίνει αυτό;
(Tournament of Towns Jr)



Λύση

Παρατηρούμε το όλα τα τετραγωνάκια στην δεύτερη γραμμή και την δεύτερη στήλη είναι λευκά. Θεωρούμε δυο περιπτώσεις, οι οποίες εξαρτώνται από το χρώμα στο πάνω αριστερά τετραγωνάκι.

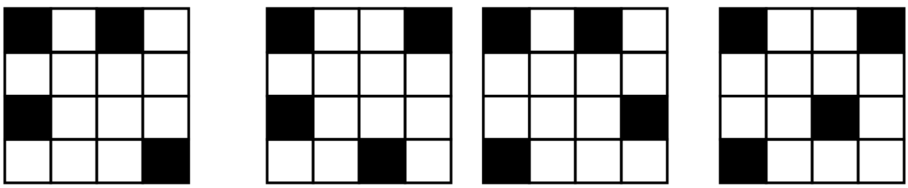
● Αν είναι λευκό, τότε τα δυο τελευταία τετραγωνάκια σε πρώτη γραμμή και πρώτη στήλη πρέπει να είναι μαύρα.



● Αν είναι μαύρο,τότε ένα ακόμη τετραγωνάκι σε πρώτη γραμμή και πρώτη στήλη πρέπει να είναι μαύρο.

Μαύρο τετραγωνάκι μπορούν να περιέχουν δυο γραμμές και δυο στήλες, αφού όλα τα τετραγωνάκια σε δεύτερη γραμμή και δεύτερη στήλη πρέπει να είναι λευκά.

Για καθεμία από τις προκύπτουσες 2x2=4 επιλογές, υπάρχει ακριβώς μια λύση. Πραγματικά, μια γραμμή και μια στήλη έμειναν ,που χρειάζονται επιπλέον μαύρο τετραγωνάκι. Συνεπώς,το τετραγωνάκι στην διασταύρωση της συγκεκριμένης γραμμής και στήλης πρέπει να έχει μαύρο χρώμα, ενώ τα υπόλοιπα τετραγωνάκια είναι λευκά.



Επομένως, αυτό μπορεί να γίνει με 5 τρόπους.

Α189.Έστω σκακιέρα 8x8 με τα τετράγωνα της να έχουν βαφεί λεύκα ή μαύρα με τυχαίο τρόπο.Θεωρούμε ως κίνηση να επιλέξουμε ένα 3x3 ή ένα 4x4 τετράγωνο της σκακιέρας και να αντιστρέψουμε τα χρώματα του (*λευκό σε μαύρο και μαύρο σε λευκό)*. Τα τετράγωνα ορίζονται από τις οριζόντιες και τις καθετές γραμμές της σκακιέρας. Αν δοθεί τυχαίος χρωματισμός στη σκακιέρας υπάρχει πάντα ακολουθία κινήσεων που θα μας επιτρέψει να χρωματίσουμε όλα τα τετράγωνα τη σκακιέρας μαύρα;*(Singapore Mathematical Olympiad.Jr.)*

Λύση

Δεν ισχύει το ζητούμενο.Από το παράδειγμα 80 σελ 74, είχε προκύψει ότι στην σκακιέρα 8x8 υπάρχουν 36 διαφορετικά τετράγωνα 3x3 και 25 διαφορετικά τετράγωνα 4x4 .Το πλήθος των 3x3 τετραγώνων βρίσκεται σε μια ένα προς ένα αντιστοιχία με το πλήθος των διαφορετικών κινήσεων με αυτά, ανάλογο γεγονός ισχύει και για το πλήθος των 4x4 τετραγώνων.

Από την πολλαπλασιαστική αρχή αν ξεκινήσουμε από την σκακιέρα με κάθε τετράγωνο βαμμένο μαύρο είναι δυνατό να προκύψουν με βάση τους κανόνες που ορίστηκαν παραπάνω $2^{36}*2^{25}=2^{61}$ διαφορετικοί χρωματισμοί .Όπως το πλήθος των συνολικών χρωματισμών είναι μεγαλύτερο (2^{64}).Συνεπώς η απάντηση στο αρχικό ερώτημα είναι αρνητική.

Α190. Θεωρούμε ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ με πλευρά α. Έστω Δ,Ε και Ζ τα μέσα των πλευρών του ΑΒ,ΒΓ και ΓΑ αντίστοιχα. Έστω Η το συμμετρικό του Δ ως προς την ευθεία ΒΓ.Χρωματίζουμε όλα τα σημεία Α,Β,Γ,Δ,Ε,Ζ,Η με ένα από τα δυο χρώματα Κ (κόκκινο), Μ (μπλε)

i.Να βρείτε πόσα ισόπλευρα τρίγωνα ορίζονται με κορυφές από τα επτά σημεία Α,Β,Γ,Δ,Ε,Ζ,Η.

ii.Να αποδείξετε ότι ,αν τα σημεία Β και Ε χρωματιστούν με το ίδιο χρώμα, τότε για οποιαδήποτε χρωματισμό των υπολοίπων σημείων υπάρχει ισόπλευρο τρίγωνο με κορυφές από τα επτά σημεία Α,Β,Γ,Δ,Ε,Ζ,Η του οποίου και οι τρεις κορυφές έχουν το ίδιο χρώμα.

iii.Ισχύει το ίδιο συμπέρασμα με αυτό του προηγούμενου ερωτήματος, αν τα σημεία Β και Ε χρωματιστούν με διαφορετικό χρώμα; *(Προκριματικός νέων 2017)*

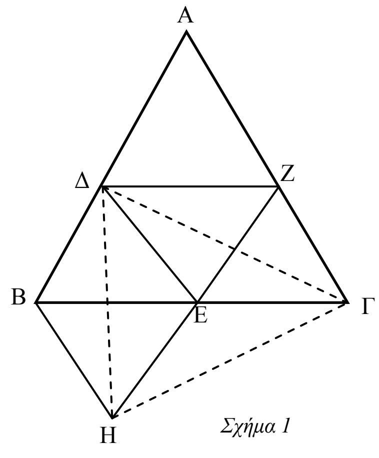
Λύση

i. Ορίζονται συνολικά επτά ισόπλευρα τρίγωνα (σχήμα 1) με κορυφές από τα δεδομένα επτά σημεία.Επειδή το τμήμα που συνδέει τα μέσα δυο πλευρών τριγώνου ισούται με το μισό της απέναντι πλευράς έχουμε $\Delta E = EZ = Z\Delta = \frac{\alpha}{2}$

Έτσι ισόπλευρα είναι τα τρίγωνα ΑΒΓ,ΑΔΖ ,ΒΔΕ ,ΕΓΖ ,ΔΕΖ,ΒΗΕ (συμμετρικό του ΔΒΕ ως προς την ευθεία ΒΓ) και το ΔΗΓ (έχει $\Gamma H = \Gamma\Delta = \frac{\alpha\sqrt{3}}{2}$:ύψος ισόπλευρου τριγώνου με $\Delta\hat{\Gamma}H = 60^0$)

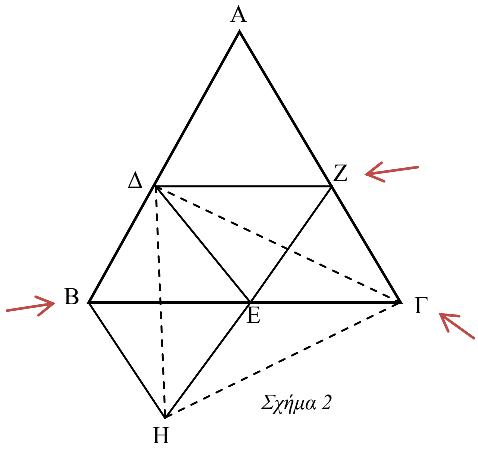
ii.Έστω ότι τα σημεία Β και Ε χρωματίζονται κόκκινα. Αν τα σημεία Δ ή Η είναι επίσης κόκκινα, τότε υπάρχει το ζητούμενο τρίγωνο. Ας υποθέσουμε ότι τα σημεία Δ και Η χρωματίζονται μπλε. Αν το σημείο Γ είναι μπλε, τότε πάλι ισχύει το ζητούμενο.

- Έστω ότι το σημείο Γ χρωματίζεται κόκκινο. Αν το σημείο Ζ χρωματιστεί κόκκινο ,τότε το τρίγωνο ΕΓΖ ικανοποιεί το ζητούμενο.
- Έστω ότι το σημείο Ζ χρωματίζεται μπλε.Τότε όμως σε οποιοδήποτε χρωματισμό του σημείου Α ένα από τα τρίγωνα ΑΒΓ ή ΑΔΖ θα έχει και τις τρεις κορυφές του ίδιου χρώματος.



Σχήμα 1

iii.Στην περίπτωση αυτή δεν ισχύει το ίδιο.Στο σχήμα 2 τα σημεία Β, Γ και Ζ είναι χρωματισμένα κόκκινα και τα υπόλοιπα μπλε.
Σε κανένα ισόπλευρο τρίγωνο και οι τρεις κορυφές δεν έχουν το ίδιο χρώμα.



Σχήμα 2

Α191.Ένας επταψήφιος αριθμός $\overline{x_1x_2x_3x_4x_5x_6x_7}$ ονομάζεται ευκολομνημόνευτος αν η ακολουθία των ψηφίων $x_1x_2x_3$ είναι ακριβώς ίδια με την ακολουθία $x_4x_5x_6$ ή με την $x_5x_6x_7$ ή και τα δυο. Οι αριθμοί x_i μπορεί να είναι κάποιοι από τα 10 ψηφία.Να βρείτε το πλήθος των ευκολομνημόνευτων αριθμών. *(AHSME 1998)*

Λύση

Α τρόπος

Ονομάζουμε Α το σύνολο των τηλεφωνικών αριθμών των οποίων η τριάδα $x_1x_2x_3$ είναι ίδια με την τριάδα $x_4x_5x_6$ και ονομάζουμε Β το σύνολο των τηλεφωνικών αριθμών των οποίων η τριάδα $x_1x_2x_3$ συμπίπτει με την $x_5x_6x_7$.Ένας τηλεφωνικός αριθμός της μορφής $\overline{x_1x_2x_3x_4x_5x_6x_7}$ θα ανήκει στο σύνολο $A \cap B$,αν και μόνο αν $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x_5 = x_6 = x_7$. Συνεπώς $N(A \cap B) = 10$.Από την αρχή εγκλεισμού-αποκλεισμού έχουμε:

$$N(A \cup B) = N(A) + N(B) - N(A \cap B) = 1000 \cdot 1 \cdot 10 + 1000 \cdot 10 \cdot 1 - 10 = 19990$$

Β τρόπος

Υπάρχουν 10000 τρόποι για να γράψουμε τα 4 τελευταία ψηφία $x_4x_5x_6x_7$.Πρόκειται για τις επαναληπτικές μεταθέσεις 10 αντικείμενων ανά 4.Μεταξυ αυτών υπάρχουν 10000-10=9990 αριθμοί που δεν έχουν όλα τα ψηφία ίδια. Για τον καθένα από αυτούς υπάρχουν ακριβώς δυο τρόποι να συμπίπτουν τα τρία ψηφία $x_1x_2x_3$ ώστε να έχουμε ευκολομνημόνευτο αριθμό.Υπάρχουν 10 ευκολομνημόνευτοι αριθμοί των οποίων τα 4 τελευταία ψηφία είναι ίδια.Συνεπώς, το πλήθος τους είναι $2 \cdot 9990 + 10 = 19990$

Α192. Σε μια χώρα, οι πόλεις Α,Β,Γ συνδέονται μεταξύ τους με το οδικό δίκτυο της χώρας. Γνωρίζουμε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένας δρόμος (μπορεί να είναι και περισσότεροι) που να συνδέει άμεσα κάθε ζεύγος των τριών πόλεων. Για παράδειγμα, αν κάποιος ταξιδιώτης θέλει να μεταβεί από την πόλη Α στην πόλη Β μπορεί να πάρει

κάποιο δρόμο που συνδέει άμεσα τις δυο πόλεις ή να χρησιμοποιήσει σαν ενδιάμεσο σταθμό την πόλη Γ. Ανάλογη διαδικασία προβλέπεται για την μετάβαση από οποιαδήποτε από τις τρεις πόλεις με προορισμό τις άλλες δυο πόλεις.Το υπουργείο μεταφορών της Λοξολάνδης υπολόγισε ότι ο αριθμός των συνολικών διαδρομών από την πόλη Α στην πόλη Β είναι 33.Συμπεριλαμβανομενων και των διαδρομών με ενδιάμεσο σταθμό την πόλη Γ. Ανάλογα, ο αριθμός των συνολικών διαδρομών από την πόλη Β στην πόλη Γ είναι 23,επισης συμπεριλαμβανόμενων των διαδρομών με ενδιάμεσο σταθμό την πόλη Α.Να υπολογίσετε το συνολικό αριθμό των διαδρομών από την πόλη Α στην πόλη Γ.(συμπεριλαμβανόμενων και των διαδρομών με ενδιάμεσο σταθμό την πόλη Β). (*Tournament of Towns)*

Λύση

-Έστω x το πλήθος των διαδρομών που συνδέουν άμεσα (δεν διέρχονται από την πόλη Γ) τις πόλεις Α και Β.

-Έστω y το πλήθος των διαδρομών που συνδέουν άμεσα (δεν διέρχονται από την πόλη Α) τις πόλεις Β και Γ.

-Έστω z το πλήθος των διαδρομών που συνδέουν άμεσα (δεν διέρχονται από την πόλη Β) τις πόλεις Α και Γ.

Αν y δρόμοι συνδέουν την πόλη Β με την Γ και z δρόμοι την πόλη Γ με την Α τότε μεταβαίνουμε έμμεσα (διερχόμενοι από την πόλη Γ) από την Β στην Α από yz διαφορετικές διαδρομές.

Έχουμε λοιπόν τις παρακάτω αλγεβρικές σχέσεις:

$$x+yz=33 \quad (1) \quad \text{και } y+xz=23 \ (2)$$

Αν προσθέσουμε κατά μέλη τις (1),(2) και παραγοντοποιήσουμε λαμβάνουμε:

$$(x+y)(z+1)=56 \quad (3)$$

Αν αφαιρέσουμε κατά μέλη τις (1),(2) και παραγοντοποιήσουμε λαμβάνουμε:

$$(y-x)(z-1)=10 \quad (4)$$

Ο z είναι θετικός ακέραιος διαφορετικός του μηδέν.

Από την σχέση (4) προκύπτει ότι ο z-1 είναι διαιρέτης του 10.

Από την σχέση (3) προκύπτει ότι ο z+1 είναι διαιρέτης του 56.

Οι μοναδικοί αριθμοί που ικανοποιούν τις παραπάνω είναι z=3 ή z=6.

Για z=3 οι x,y δεν προκύπτουν ακέραιοι άρα η τιμή απορρίπτεται.

Για z=6 τότε έχουμε x=3,y=5.Οπότε οι συνολικές διαδρομές από την πόλη Α στην πόλη Γ είναι :6+3*5=21.

Α193.Βάφουμε τους αριθμούς 1,2,3,….,20 με δυο χρώματα, άσπρο και μαύρο, έτσι ώστε να χρησιμοποιούνται και τα δυο χρώματα. Με πόσους τρόπους μπορεί να γίνει ο χρωματισμός ώστε το γινόμενο των άσπρων αριθμών και το γινόμενο των μαύρων αριθμών να έχουν μέγιστο κοινό διαιρέτη ίσο με 1.*(Αρχιμήδης 2014)*

Λύση

Παρατηρούμε ότι το 1 και το 2 μπορούν να βαφτούν το καθένα με 2 τρόπους. Για να ισχύει ότι το γινόμενο των άσπρων αριθμών και το γινόμενο των μαύρων αριθμών έχουν μέγιστο κοινό διαιρέτη ίσο με 1, πρέπει όλοι οι άρτιοι να πάρουν το χρώμα του 2,οποτε οι αριθμοί 2,4,6,8,10,12,14,16,18,20 παίρνουν το χρώμα του 2 επίσης όλοι οι αριθμοί που έχουν κοινό διαιρέτη με αυτούς, να παίρνουν το χρώμα του 2,δηλαδη οι αριθμοί 3,5,7,9,15 παίρνουν το χρώμα του 2(ή άσπρο ή μαύρο).Οι αριθμοί που απέμει-

ναν, που είναι οι πρώτοι μεγαλύτεροι του 10,δηλαδη οι 11,13,17,19,μπορουν να βαφτούν με δυο τρόπους, ή άσπρο ή μαύρο.

Επομένως, συνολικά και τις δυο περιπτώσεις μπορεί να γίνει $2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2 = 2^6 = 64$ τρόπους. Αφαιρούμε και τις δυο περιπτώσεις στις οποίες βάφονται όλοι μαύροι ή όλοι άσπροι, άρα έχουμε συνολικά 62 τρόπους.

Α194.Να υπολογίσετε το πλήθος των διατεταγμένων εξαδων($\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5,\alpha_6$) που μπορούν να δημιουργηθούν ,αν οι αριθμοί $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5,\alpha_6$ μπορούν να πάρουν τις τιμές 0,1 και 2 και το άθροισμα $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4+\alpha_5+\alpha_6$ είναι άρτιος.*(Αρχιμήδης 2016)*

Λύση

Το άθροισμα $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4+\alpha_5+\alpha_6$ είναι άρτιος αν και μόνο αν το πλήθος των 1 είναι άρτιο, δηλαδή 0,2,4,6.

● Αν δεν έχουμε καθόλου 1,οι δυνατές επιλογές είναι 2^6 ,αφού για καθέναν από τους α_i,i=1,2,3,4,5,6 έχουμε δυο επιλογές (0 ή 2).

● Αν έχουμε δυο 1, τότε τη θέση τους μπορούμε να την επιλέξουμε με $\binom{6}{2}$ τρόπους και στις υπόλοιπες 4 θέσεις έχουμε 2^4 επιλογές. Δηλαδή συνολικά έχουμε $2^4\cdot\binom{6}{2}$ δυνατές εξάδες.

● Αν έχουμε τέσσερα 1, τότε τη θέση τους μπορούμε να την επιλέξουμε με $\binom{6}{4}$ τρόπους και στις υπόλοιπες 2 θέσεις έχουμε 2^2 επιλογές. Δηλαδή συνολικά έχουμε $2^2\cdot\binom{6}{4}$ δυνατές εξάδες.

● Αν έχουμε έξι 1, τότε έχουμε ένα τρόπο.Επομένως συνολικά έχουμε:

$$2^6+2^4\cdot\binom{6}{2}+2^6\cdot\binom{6}{4}+1=64+16\cdot 15+4\cdot 15+1=365 \text{ εξάδες.}$$

Α195.Πόσοι είναι οι δεκαψήφιοι φυσικοί αριθμοί που έχουν ψηφία είτε 1 είτε 2 και έχουν στην δεκαδική μορφή τους τουλάχιστον δυο συνεχόμενους άσσους. (AIME 2006)

Λύση

Από την πολλαπλασιαστική αρχή έχουμε συνολικά 2^{10} δεκαψήφιους αριθμούς.Θα υπολογίσουμε το πλήθος των δεκαψήφιων που δεν έχουν δυο συνεχομένους άσσους και θα αφαιρέσουμε από τον συνολικό αριθμό των δεκαψήφιων.Υποθέτουμε ότι έχουμε ν δυάρια στον δεκαψήφιο που δεν έχει δυο συνεχόμενους άσσους ($5\le \nu \le 10$) .Θα πρέπει να τοποθετήσουμε στις ν+1 θέσεις (ν-1 θεσεις ανάμεσα στα δυάρια και 2 θέσεις επιπλέον,η πρώτη αριστερα και η τελευταία δεξιά) τους 10-ν άσσους, αυτό μπορεί να γίνει με $\binom{\nu+1}{10-\nu}$ τρόπους.

Για ν=5 έχουμε $\binom{6}{5}$ τρόπους

Για ν=6 έχουμε $\binom{7}{4}$ τρόπους

……………………………..

Για ν=10 έχουμε $\binom{11}{0}$ τρόπους

Άρα το ζητούμενο πλήθος είναι $2^{10}-\binom{6}{5}-\binom{7}{4}-\binom{8}{3}-\binom{9}{2}-\binom{10}{1}-\binom{11}{0}=880$

Α196.Με πόσους τρόπους μπορούμε να διατάξουμε τους αριθμούς 21,31,41,51,61,71 και 81 έτσι ώστε το άθροισμα κάθε τετράδας διαδοχικών αριθμών να είναι πολλαπλάσιο του 3; *(ARML1999)*

Λύση

Αυτό που μας ενδιαφέρει από τους 7 αριθμούς είναι το υπόλοιπο τους με τον αριθμό 3 και οι αριθμοί 21,31,41,51,61,71 και 81 έχουν υπόλοιπο στην διαίρεση τους με το 3 αντίστοιχα 0,1,2,0,1,2,0.

Υποθέτουμε ότι μια επιθυμητή διάταξη είναι της μορφής $α_1,α_2,α_3,α_4,α_5,α_6,α_7$.

Παρατηρούμε,

$(α_1+α_2+α_3+α_4)+(α_4+α_5+α_6+α_7)$=πολλαπλασιο 3 ή

$(α_1+α_2+α_3+α_4+α_5+α_6+α_7)+α_4$=πολ3 ή

πολλαπλάσιο3+$α_4$=πολλαπλασιο 3 άρα $α_4$ είναι πολλαπλάσιο του 3 (3 επιλογές για το $α_4$ από τους 7 αριθμούς)

Εφόσον τώρα $α_1+α_2+α_3+α_4$ είναι πολλαπλάσιο του 3 και $α_4$ πολλαπλάσιο του 3 ισχύει ότι $α_1+α_2+α_3$ είναι πολλαπλάσιο του 3 επίσης άρα οι $α_1,α_2,α_3$ είναι μια διάταξη τριών αριθμών από τους 7 με υπόλοιπα 0,1,2.

Ισχύει: $α_1+α_2+α_3+α_4$ =πολ3 και $α_2+α_3+α_4+α_5$=πολ3 άρα και η διαφορά τους $α_1$-$α_5$ είναι πολλαπλάσιο του 3 , προκύπτει λοιπόν ότι $α_1,α_5$ έχουν το ίδιο υπόλοιπο αν διαιρεθούν με το 3 άρα είναι της ίδιας μορφής.

Ανάλογα μπορούμε να δείξουμε ότι της ίδιας μορφής είναι το $α_2$ με το $α_6$ και το $α_3$ με το $α_7$.Άρα την διάταξη των $α_5,α_6,α_7$ την καθορίζει η σειρά των $α_1,α_2,α_3$.

Συνοψίζουμε ,3 επιλογές για το $α_4$ από τα πολλαπλάσια του 3,το πλήθος των μεταθέσεων των τριών $α_1,α_2,α_3$ είναι 3! και οι επιλογές για καθένα από τα $α_1,α_2,α_3$ είναι 2^3.

Οπότε από την πολλαπλασιαστική αρχή για τα $α_1,α_2,α_3,α_4$ έχουμε $3*2^3*3!=144$

Α197.Την Κυριακή το καθένα από μια ομάδα επτά παιδιών πήγε στο περίπτερο τρεις φόρες.Είναι γνωστό για κάθε ζεύγος παιδιών –από τα επτά-ότι έχουν συναντηθεί στο περίπτερο την Κυριακή. Να αποδείξετε ότι κάποια χρονική στιγμή την Κυριακή τρία παιδιά συναντήθηκαν στο περίπτερο. *(Tournament of towns)*

Λύση

Χωρίς βλάβη τα γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε ότι κανένα ζεύγος παιδιών δεν έφτασαν ταυτόχρονα στο περίπτερο. Γνωρίζουμε ότι 7 παιδιά πήγαν στο περίπτερο το καθένα 3 φορές άρα μιλάμε για 21 επισκέψεις συνολικά.

Έστω $t_1<t_2<\ldots<t_{21}$ οι χρόνοι των επισκέψεων. Θεωρούμε ότι δεν υπήρξε χρονική στιγμή που βρίσκονται ταυτόχρονα στο περίπτερο 3 παιδιά .Ένα παιδί φτάνει στο περίπτερο στην χρονική στιγμή $t_κ$ όπου $κ\geq2$ τότε θα δει στο περίπτερο το πολύ ένα παιδί. Το παιδί που έφτασε στο περίπτερο την χρονική στιγμή t_1 σίγουρα δεν είδε άλλο παιδί. Έτσι όμως έχουμε το πολύ 20 ζεύγη παιδιών που συναντήθηκαν στο περίπτερο αλλά τα συνολικά ζεύγη παιδιών είναι (6*7)/2=21.Ατοπο

Α198. Έστω ότι έχουμε ένα τετράγωνο το οποίο αποτελείται από τελείες χρώματος μπλε ή κόκκινου.Το τετράγωνο έχει 20 γραμμές και 20 στήλες.Για κάθε δυο γειτονικές τελείες είτε σε γραμμή είτε σε στήλη γνωρίζουμε ότι ενώνονται με ένα ευθύγραμμο τμήμα του κοινού τους χρώματος,για παράδειγμα αν βρίσκονται δίπλα - δίπλα δυο κόκκινες τελείες τότε είναι ενωμένες με ένα ευθύγραμμο τμήμα κόκκινου χρώματος.Αλλά,κάθε δυο τελείες με διαφορετικό χρώμα είναι συνδεμένες με ένα ευθύγραμμο τμήμα μαύρου χρώματος.Γνωρίζουμε ότι στο σχήμα έχουμε 219 κόκκινες τελείες,39 από αυτές στα «σύνορα» του πινάκα(με τον όρο σύνορα εννοούμε την $1^η$ και την $20^η$ γραμμή καθώς την $1^η$ και την $20^η$ στήλη) αλλά καμία από αυτές δεν βρίσκεται στις 4 «γωνίες» του πίνακα.Στο σχήμα υπάρχουν 237 μαύρα ευθύγραμμα τμήματα.Πόσα είναι τα ευθύγραμμα τμήματα μπλε χρώματος; *(American Mathematical Monthly* 1972)

Λύση

Σε κάθε μια από τις 20 γραμμές έχουμε συνολικά 19 τμήματα άρα 19Χ20=380 οριζόντια ευθύγραμμα τμήματα.Όμοια συμπεραίνουμε ότι έχουμε τον ίδιο αριθμό καθέτων τμημάτων άρα συνολικά στο σχήμα έχουμε 2x380 =760 ευθύγραμμα τμήματα. Εφόσον από αυτά τα 237 τμήματα είναι μαύρα τότε 760-237=523 τμήματα είναι είτε κόκκινα είτε μπλε.

Έστω Κ ο αριθμός των κόκκινων τμημάτων και ας σκεφτούμε πόσες φορές μια κόκκινη τελεία είναι το άκρο ενός τμήματος.Κάθε μαύρο τμήμα έχει μια κόκκινη τελεία ως άκρο,κάθε κόκκινο τμήμα έχει και τα δυο άκρα του κόκκινα,συνολικά δηλαδή 237+2Κ (1) κόκκινες τελείες ως άκρα.

Αλλά, γνωρίζουμε ότι καθεμία από τις 39 κόκκινες τελείες που βρίσκονται στα σύνορα του πίνακα αποτελούν τα άκρα 3 τμημάτων και καθεμία από τις εναπομείναντες 219-39=180 κόκκινες τελείες στο εσωτερικό του πίνακα αποτελούν άκρο 4 τμημάτων.Άρα ο συνολικός αριθμός των περιπτώσεων που μια κόκκινη τελεία είναι άκρο ευθύγραμμου τμήματος είναι: 39x3 + 180x4 = 837

Όμως από την σχέση (1) 237+2Κ=837 άρα Κ=300.

Αν έχουμε 300 ευθύγραμμα τμήματα κόκκινου χρώματος τότε έχουμε 523-300=223 μπλε τμήματα.

Α199. Στην κορυφή $Α_1$ του κανονικού δωδεκαμήνου $Α_1Α_2Α_3\ldotsΑ_{12}$ βάζουμε το πρόσημο «-» ενώ σε όλες τις άλλες κορυφές βάζουμε το πρόσημο «+».Επιτρέπεται να αλλάζουμε το πρόσημο κ διαδοχικών κορυφών. Να εξεταστεί αν μπορούμε να κάνουμε όλα τα πρόσημα «+» εκτός από αυτό της κορυφής $Α_2$ στις εξής περιπτώσεις:

i.κ=3 , ii.κ=4 iii.κ=6 *(ASU 1971)*

Λύση

Για κ=3 το πλήθος των «-» στις κορυφές $Α_2,Α_3,Α_5,Α_6,Α_8,Α_9,Α_{11},Α_{12}$ είναι πάντα άρτιος.(Αυτό ισχύει για κάθε τριάδα συνεχομένων κορυφών περιέχει ακριβώς δυο από τις πιο πάνω κορυφές.) Οπότε δεν μπορούμε να έχουμε «-» μόνο στην $Α_2$.

Ομοίως κοιτάζοντας τις κορυφές A_2,A_4,A_6, A_8,A_{10},A_{12}γαι την περίπτωση κ=4, και τις κορυφές
A_2,A_5,A_8,A_{11} για την περίπτωση κ=6 καταλήγουμε στο ότι δεν μπορούμε ούτε σε αυτές τις περιπτώσεις να έχουμε «-» μόνο στην A_2.

Α200. Να αποδειχτεί ότι κάθε σύνολο δέκα διψήφιων ακεραίων έχει δυο ξένα μεταξύ τους υποσύνολα με το ίδιο άθροισμα στοιχείων. (ΙΜΟ 1972)

Λύση

Το σύνολο έχει ακριβώς 2^{10}=1024 υποσύνολα. Κάθε υποσύνολο έχει άθροισμα το πολύ 10*99<1024.Αρα από την αρχή της περιστεροφωλιάς υπάρχουν δυο υποσύνολα με ίδιο άθροισμα στοιχείων. Αγνοώντας τα κοινά στοιχεία τους, καταλήγουμε σε δυο ξένα μεταξύ τους υποσύνολα με ίδιο άθροισμα στοιχείων.

Α201. Χρωματίζουμε μαύρα ή λευκά ,όπως στην σκακιέρα ,τα μοναδιαία τετράγωνα ενός τετραγώνου 2009x2009 έτσι, ώστε το κάτω αριστερό τετράγωνο να είναι μαύρο. Ένα πιόνι μπορεί να μετακινείται πάνω στο 2009x2009 τετράγωνο ,σύμφωνα με τους ακόλουθους κανόνες:

● Αρχικά το πιόνι βρίσκεται στο κάτω αριστερά τετραγωνάκι.

● Μπορεί να κινηθεί μόνο σε τετραγωνάκι που έχει κοινή πλευρά με το τετραγωνάκι στο οποίο βρίσκεται.

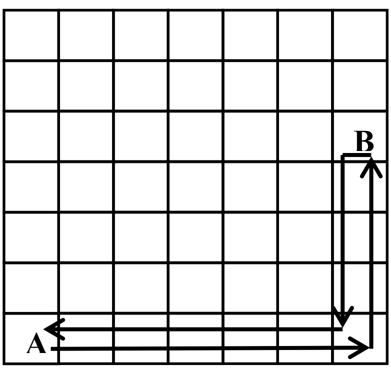
Όταν το πιόνι μετακινείται σε ένα τετραγωνάκι ,τότε,το τετραγωνάκι αυτό αλλάζει χρώμα.

Είναι δυνατόν,χρησιμοποιώντας ένα κινούμενο πιόνι, να χρωματίσουμε όλα τα τετραγωνάκια μαύρα;

Ισχύει το ίδιο,αν το πιόνι δεν μπορεί ,μετά από μια κίνηση ,να γυρίζει άμεσα στην προηγουμένη θέση του; *(Ουκρανία ,2008)*

Λύση

Παρατηρούμε ότι ,αν μετακινήσουμε το πιόνι από την αρχική του θέση Α (κάτω αριστερά τετραγωνάκι) σε οποιοδήποτε άλλο τετραγωνάκι Β της σκακιέρας ,και γυρίσουμε πίσω στο αρχικό τετραγωνάκι Α ακολουθώντας τον ίδιο δρόμο , τότε αλλάζουν χρώμα και το Β και το Α. Έτσι ,είναι δυνατόν, ξεκινώντας από το Α, να μετακινούμε το πιόνι σε κάποιο λευκό τετραγωνάκι και να επιστρέφουμε πίσω, από τον ίδιο δρόμο, στο Α, αλλάζοντας έτσι το χρώμα στο λευκό τετραγωνάκι. Αν αυτό γίνει για όλα τα λευκά τετραγωνάκια, τότε, κατά την επιστροφή του πιονιού στο αμέσως διπλανό τετραγωνάκι του Α ,διακρίνουμε δυο περιπτώσεις:

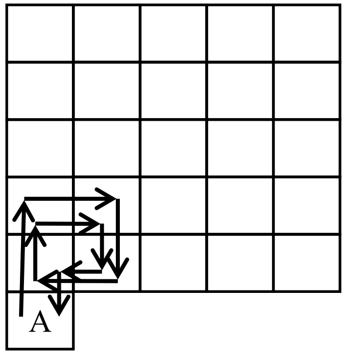


● Αν το Α είναι λευκό, τότε μετακινούμε το πιόνι στο Α, το οποίο έτσι αλλάζει χρώμα, και όλα τα τετραγωνάκια της σκακιέρας θα έχουν γίνει μαύρα.

● Αν το Α είναι μαύρο, τότε σταματάμε το πιόνι στην θέση που βρίσκεται, γιατί όλα τα τετραγωνάκια πια έγιναν μαύρα.

Στην περίπτωση που το πιόνι δεν μπορεί να γυρίσει άμεσα στην προηγούμενη θέση του Α, τότε και πάλι είναι δυνατό να επιτευχτεί το ζητούμενο,ως εξής:

Μετακινούμε το πιόνι από το Α και επιστρέφουμε σε αυτό, με την διαδρομή που φαίνεται στο δεύτερο σχήμα. Με αυτό τον τρόπο, το πιόνι διέρχεται από ένα τετραγωνάκι τρεις φορές, ενώ περνάει δυο φορές από τα υπόλοιπα. Στο τέλος τη συγκεκριμένης διαδρομής ,μόνο ένα τετραγωνάκι αλλάζει χρώμα. Με τον ίδιο τρόπο, μπορούμε να αλλάξουμε χρώμα σε όλα τα λευκά τετραγωνάκια. Για το τέλος, ισχύουν οι δυο υποπεριπτώσεις που θεωρήσαμε παραπάνω.



Α202. Έστω ν τριψήφιοι αριθμοί που ικανοποιούν τις ακόλουθες συνθήκες:
(1) Δεν περιέχουν ως ψηφίο το 0.
(2) Το άθροισμα των ψηφίων καθενός ισούται με 9.
(3) Το ψηφίο των μονάδων δυο οποιουσδήποτε από αυτούς είναι διαφορετικό.
(4) Το ψηφίο των δεκάδων δυο οποιουσδήποτε από αυτούς είναι διαφορετικό.
(5) Το ψηφίο των εκατοντάδων δυο οποιωνδήποτε από αυτούς είναι διαφορετικό.
Ποιος είναι ο μεγαλύτερη δυνατή τιμή του ν;
(Junior Balkan mathematical Olympiad 2018)

Λύση

Έστω S το σύνολο των τριψηφίων που έχουν άθροισμα ψηφίων το 9 και δεν περιέχουν το 0.Θα βρούμε το πλήθος του S.Με αφετηρία τον αριθμό 111 μπορεί να προκύψει κάθε αριθμός του συνόλου S με μια «λέξη» 6 γραμμάτων Α και 2 γραμμάτων (που σημαίνει το πέρασμα στο επόμενο ψηφίο) για παράδειγμα ο αριθμός 324 γράφεται:

1 1 1

+2 +1 +3

ΑΑΓΑΓΑΑΑ

3 2 4

Μπορούμε να υπολογίσουμε το πλήθος του S ως το πλήθος των θετικών ακεραίων λύσεων της εξίσωσης $x_1+x_2+x_3=9$,(παραδειγμα 63,σελ 57)
άρα S ισούται με $\binom{9-1}{3-1}=\binom{8}{2}=28$



Έχουμε μια 1-1 αντιστοιχία των «λέξεων» με τα στοιχεία του S. Όμως το πλήθος των λέξεων (αναγραμματισμοί 6Α και 2 Γ) είναι $\frac{8!}{2!\cdot 6!}=28$ άρα N(S)=28.

Από τις συνθηκες (3),(4),(5) ,αν ο αριθμός $\overline{\alpha\beta\gamma}$ ανήκει στο σύνολο των ζητούμενων αριθμών Κ τότε οι αριθμοί $\overline{**\gamma}$ δεν ανήκουν στο Κ καθώς και οι αριθμοί $\overline{*\beta*}$ ούτε και οι αριθμοί $\overline{\alpha**}$.Υπάρχουν α+β-2 αριθμοί $\overline{**\gamma}$, α+γ-2 αριθμοί $\overline{*\beta*}$, β+γ-2 αριθμοί $\overline{\alpha**}$ Άρα για τις τρεις κατηγορίες αριθμών έχουμε συνολικά:

α+β-2+ β+γ-2 α+γ-2=2(α+β+γ)-6=18-6=12 αριθμούς

που δεν μπορούν να είναι στο K αν ο $\overline{\alpha\beta\gamma}$ ανήκει στο K .Έτσι αν έχουμε συνολικά ν αριθμούς στο K τότε οι τριψήφιοι που ανήκουν στο S και δεν ανήκουν στο K είναι 12ν ,αλλά,κάθε αριθμός που ανήκει το S δεν ικανοποιεί τις συνθήκες (3), (4), (5) έχει τριπλομετρηθεί -μια για κάθε ψηφίο του -έτσι

$$\nu + \frac{12\nu}{3} \leq 28 \Leftrightarrow \nu \leq \frac{28}{5} \quad ,\text{ν ακέραιος άρα } \nu \leq 5$$

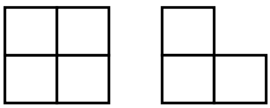
Για παράδειγμα για ν=5, έχουμε το σύνολο K={144,252,315,423,531}.

Α203. Μια διεθνής εταιρεία έχει τα μέλη της από έξι διαφορετικές χώρες .Ο κατάλογος των μελών έχει 1978 ονόματα, αριθμημένα 1,2,3,4…,1978.Να αποδείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα μέλος του οποίου ο αριθμός να είναι το άθροισμα των αριθμών δυο μελών της δικής του χώρας, ή δυο φορές ο αριθμός ενός μέλους από την ίδια του την χώρα.*(I.M.O.1978)*

Λύση

Έχουμε 6 χώρες. Ισχύει ότι 1978 >6*329+1.Απο την αρχή του περιστερώνα τουλάχιστον 330 μέλη κατάγονται από την ίδια χώρα, έστω C1.Εστω οι αριθμοί των μελών αυτών έχουν την διάταξη $\alpha_1<\alpha_2<\alpha_3,\ldots<\alpha_{330}$.Ας πάρουμε τις 329 διαφορές α_2-α_1,α_3-α_1,…,α_{330}-α_1.Εαν κάποια από αυτές είναι στο C1,τοτε ισχύει το ζητούμενο. Ας υποθέσουμε ότι είναι όλες στις άλλες πέντε χώρες. Τουλάχιστον 66 πρέπει να κατάγονται από την ίδια χώρα, έστω την C1. Γράφουμε τα 66 μέλη της C2 διατεταγμένα ως $\beta_1<\beta_2<..<\beta_{66}$. Τώρα από τις 65 διαφορές ,εάν κάποια είναι το C2 τότε ισχύει το ζητούμενο. Αλλά η κάθε διαφορά ισούται με την διαφορά δυο από τα αρχικά α_i,οπότε αν είναι μέσα στο C1 πάλι ισχύει το ζητούμενο. Ας υποθέσουμε λοιπόν ότι όλες οι διαφορές ανήκουν στις άλλες τέσσερεις χώρες. Τουλάχιστον 17 πρέπει να κατάγονται από την ίδια χώρα, έστω την C3.Γράφουμε τα 17 μέλη ως $c_1<c_2<..<c_{17}$. Τώρα, αν από τις 16 διάφορες c_2-c_1,c_3-c_1,..,c_{17}-c_1 είναι κάποια από αυτές στο C3 τότε ισχύει το ζητούμενο. Επειδή η κάθε διαφορά ισούται με την διαφορά δυο βi ,αν κάποια από αυτές είναι στο C2,παλι ισχύει το ζητούμενο. (Ας θεωρήσουμε για παράδειγμα c_2-c_1 όπως πριν.Υποθέτουμε ότι $\beta_n=\alpha_j-\alpha_1$,$\beta_m=\alpha_k-\alpha_1$.Τοτε $c_i-c_1=\beta_n-\beta_m = \alpha_j-\alpha_\kappa$, όπως απαιτείται)
Έτσι, ας υποθέσουμε ότι είναι όλοι στις άλλες τρεις χώρες .Τουλάχιστον 6 θα πρέπει να κατάγονται από την ίδια χώρα,έστω την C4.Κοιταμε τις 5 διαφορές και συμπεραίνουμε ότι με τον ίδιο τρόπο ότι τουλάχιστον 3 πρέπει να κατάγονται από το C5.Τωρα οι 2 διαφορές πρέπει να είναι και οι δυο στο C6 και η διαφορά τους πρέπει να είναι σε ένα από τα C1,C2,..,C6 δίνοντας μας το ζητούμενο αποτέλεσμα

Α204. Ένα ορθογώνιο 9Χ7 καλύπτεται από πλακίδια δυο τύπων που φαίνονται στην διπλανή εικόνα (οι δυο τύποι πλακιδίων αποτελούνται από τρία και τέσσερα μοναδιαία τετράγωνα, αντίστοιχα, και τα πλακίδια τύπου L μπορούν να περιστραφούν όσες φόρες θέλουμε κατά 90° .Έστω ν≥0 ο αριθμός των 2x2 πλακιδίων που μπορούν να χρησιμοποιηθούν σε μια τέτοια κάλυψη.Να βρεθούν όλες οι δυνατές τιμές του ν. *(Βαλκανική ολυμπιάδα νέων)*



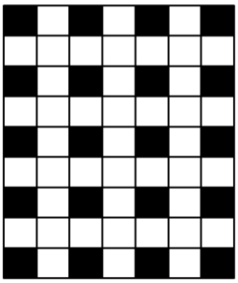
Λύση

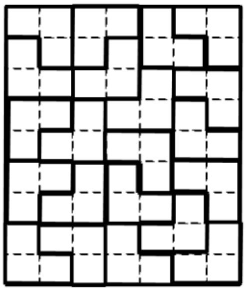
Έστω ότι μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε μ το πλήθος πλακίδια L.Επειδή 3μ+4ν=63 θα είναι 3μ-63=4ν ή 3μ=4ν+63 ή $\mu = \frac{4\nu}{3} + 21$ (1) μ θετικός ακέραιος άρα ν πολλαπλάσιο του 3 έτσι ν=3λ και η (1) γίνεται:

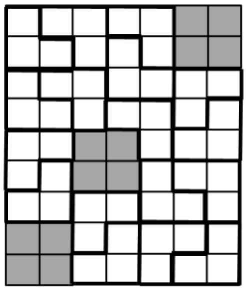
$$\mu = \frac{4 \cdot 3\lambda}{3} + 21 \Leftrightarrow \mu = 4\lambda + 21 \Leftrightarrow \mu = 4\lambda + 20 + 1 \Leftrightarrow \mu = 4(\lambda + 5) + 1$$

άρα το μ διαιρούμενο με το 4 αφήνει υπόλοιπο το 1,συνεπώς, οι τιμές του μ είναι μ=1,5,9,13,17 ή 21 και ν=15,12,9,6,3,0 αντίστοιχα.

Χρωματίζουμε την σκακιέρα όπως στο σχήμα 1.Υπάρχουν 20 μαύρα μοναδιαία τετράγωνα, και κάθε πλακίδιο καλύπτει το πολύ 1 μαύρο μοναδιαίο τετράγωνο. Άρα πρέπει να χρησιμοποιήσουμε τουλάχιστον 20 πλακίδια. Επομένως οι περιπτώσεις (μ,ν)=(1,15),(5,12),(9,9) και (13,6) αποκλείονται. Οι άλλες δυο περιπτώσεις (μ,ν)=(17,3),(20,0) είναι δυνατές όπως φαίνονται στα σχήματα 1 και 2. Άρα οι πιθανές τιμές του ν είναι 0 και 3.


Σχήμα 1

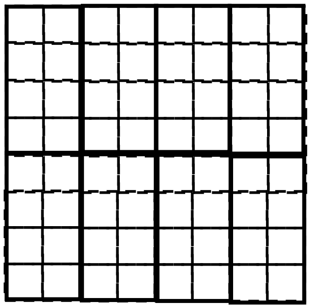

Σχήμα 2


Σχήμα 3

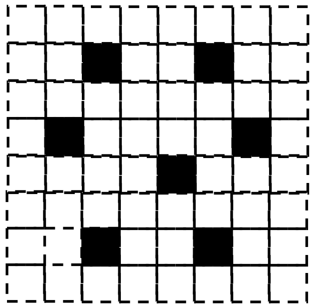
Α205.Θεωρούμε τετράγωνο ΑΒΓΔ πλευράς 8 cm το οποίο υποδιαιρούμε με ευθείες παράλληλες προς τις πλευρές του σε 64 μικρά τετραγωνάκια πλευράς 1 cm. Χρωματίζουμε 7 μικρά τετράγωνα μαύρα,ενώ όλα τα υπόλοιπα 57 μικρά τετραγωνάκια είναι λευκά. Υποθέτουμε ότι υπάρχει θετικός ακέραιος κ τέτοιες ώστε ανεξάρτητα από την θέση των 7 μαύρων μικρών τετραγώνων, υπάρχει ορθογώνιο εμβαδού κ cm^2 με πλευρές παράλληλες στις πλευρές του ΑΒΓΔ και με όλα τα μικρά τετράγωνα από τα οποία αποτελείται να είναι λευκά, που μπορεί να αποκοπεί από το τετράγωνο ΑΒΓΔ.
Να βρεθεί η μεγίστη δυνατή τιμή του κ. *(Αρχιμήδης)*

Λύση

Μπορούμε να χωρίσουμε το τετράγωνο ΑΒΓΔ σε 8 ορθογώνιο 4x2.Ετσι μπορούμε να χρωματίζουμε στα επτά 4x2 ορθογώνια από ένα μαύρο μικρό τετράγωνο, οπότε από την αρχή της περιστεροφωλιάς θα μείνει με λευκά μικρά τετράγωνα τουλάχιστον ένα 4x2 ορθογώνιο εμβαδού 8 cm^2 .Στην συνέχεια θα αποδείξουμε ότι υπάρχει χρωματισμός των 7 μικρών τετραγώνων έτσι ώστε να μην υπάρχει ορθογώνιο με λευκά τετράγωνα εμβαδού μεγαλύτερου των 8 cm^2.Στο τετράγωνο του παρακάτω σχήματος 2 αφήνουμε όλα τα συνοριακά μικρά τετράγωνα λευκά και στο 6x6 εσωτερικό τετράγωνο χρωματίζουμε 7 μικρά τετράγωνα μαύρα, έτσι ώστε να μην υπάρχει ορθογώνιο με λευκά τετράγωνα εμβαδού μεγαλυτέρου των 8 cm^2.



Σχήμα 1



Σχήμα 2

A206. Στον πίνακα έχουμε γράψει τα τετράγωνα των πρώτων 101 θετικών ακεραίων. Σε κάθε κίνηση,μπορούμε να αντικαταστήσουμε δυο από αυτούς με την απόλυτη τιμή της διαφοράς τους.Ύστερα από 100 κινήσεις, μένει μόνο ένας αριθμός.
Ποια είναι η ελάχιστη τιμή αυτού του αριθμού; (*Tournament of Towns*)

Λύση

Έχουμε γράψει στον πίνακα συνολικά 50 άρτιους και 50 περιττούς αριθμούς. Σε κάθε κίνηση είτε παραμένει ο αριθμός των περιττών αριθμών σταθερός είτε ελαττώνεται κατά 2.Συνεπως ο τελευταίος αριθμός που θα μείνει στον πίνακα θα είναι περιττός (αναλλοίωτος ιδιότητα) και η ελάχιστη τιμή του είναι το 1. Πρέπει να βρούμε όμως την ακολουθία κινήσεων που θα οδηγήσει στο 1.Τα τετράγωνα τεσσάρων συνεχομένων αριθμών μπορούν να αντικατασταθούν από τον αριθμό 4 καθώς $(\nu+2)^2+(\nu-1)^2-(\nu+1)^2-\nu^2=4$.Έτσι τα τετράγωνα 8 διαδοχικών αριθμών μπορούν αν αντικατασταθούν από το 0 (4-4). Έτσι λαμβάνονται τα τετράγωνα ανά 8 από το τέλος θα μείνουν οι αριθμοί 1,4,9,16, και 25. Συνεχίζοντας, το καλύτερο που μπορούμε να έχουμε από τους 5 αυτούς αριθμούς είναι το 3. Μπορούμε όμως και καλύτερα. Αρκεί να κρατήσουμε μαζί με τους 5 αριθμούς (1,4,9,16, 25) και τους 36,49,64,81,100,121,144 και 169.Αυτο είναι εφικτό καθώς μετά το 169 έχουν μείνει ακόμα 88 τετράγωνα διαδοχικών αριθμών που δίνουν με τις επιτρεπόμενες κινήσεις αποτέλεσμα 0.Η ακολουθία των κινήσεων θα είναι: 169-144=25, 25-25=0,100-0=100,100-64=36,36-36=0,121-81=40,49-40=9, 16-9=7,9-7=2,4-2=2 και 2-1=1

Στο κανάλι που οδηγεί ο γραμμωτός κώδικας (Qr Code) βρίσκονται συγκεντρωμένα όλα τα οπτικοποιημένα προβλήματα του βιβλίου καθώς και πολλά περισσότερα ,θα ανανεώνεται κάθε εβδομάδα με ένα νέο πρόβλημα.



Προτεινόμενη βιβλιογραφία (έντυπη και διαδικτυακή)

1.Θ.Ν.Καζαντζή,(1997),Συνδυαστική.Εκδόσεις Μαθηματική Βιβλιοθήκη
2.Α.Πούλου,(2015),Συνδυαστική απαρίθμηση και συνδυαστική γεωμετρία.Εκδόσεις Ζήτη
3.Α.Πούλου,(2002),Ο Οιδίποδας και η Σφίγγα.Εκδόσεις Σαββάλα
4.Λουρίδας,Σάλαρης,Τριανταφύλλου(2018).Μαθηματικά για διαγωνισμούς,Εκδόσεις Πατάκη
5.Μάγκος,Μουρούκος,Στεργίου,Συγκελάκης,Χριστοφίδης(2020),Διαγωνισμοί στα μαθηματικά Β και Γ λυκείου,Εκδόσεις Σαββάλας
6.Ξένος.Θ,(1996) άλγεβρα 4ης δεσμης,Εκδόσεις Ζήτη
7.Μαραγκάκης.Μ.,Μεταξάς.Μ,(2018) Ουσιώδη Μαθηματικά,Ιδιωτική έκδοση
8.Κανέλλος Σπ.Γ,(1963) Συμπλήρωμα Άλγεβρας,Εκδόσεις Παπαδημητρόπουλου
9.Κάκουλλου Θ,(1969)Μαθήματα θεωρίας πιθανοτήτων,Ιδιωτική έκδοση
10.Μαθηματικά Γ΄ Λυκείου Κατεύθυνσης,(Δ Τεύχος),(2017)Παιδαγωγικό Ινστιτούτο Κύπρου
11.Γεωργιακάκης Π.,Γεωργιακάκης Μ,(1975) Συνδυαστική,Πιθανότητες,Εκδόσεις Κύκλος
12.Ι.Μαντάς,(1999) 1000 Ασκήσεις Αλγεβρας, Εκδόσεις Μαντά
13.Τζουβαρας Θ.,Τζιρωνης Κ.(2003)Μαθηματικα Γ λυκειου,Εκδόσεις Σαββάλας
14.Μαμωνά-Downs Γ.Παπαδόπουλος Γ.(2017),Επίλυση προβλήματος στα μαθηματικά,Π.Ε.Κ
15. Περιοδικό Ευκλείδης Α,Β
16. K.Garaschuk ,A. Liu (2020) Grade Five Competition from the Leningrad Mathematical Olympiad (1979–1992) ,Εκδόσεις Springer
17. J.A.Paulos,(2002)Αριθμοφοβία, Εκδόσεις Αλεξάνδρεια
18. Fomin,Genkin,Itenberg,Mathematical Circles ,(1996)Universities Press
19. P.Vaderlind,R.Guy,L.Larson, (2002) The Inquisitive Problem Solver, The mathematical Association of America
20.Andreescu T.,Feng.Z, A path to combinatorics for undergraduates,(2004) Birkhauser
21.Andreescu T.,Feng.Z(2002), 102 Combinatorial Problems From the Training of the USA IMO Team,Birkhauser
22.Terence Tao(2006),Solving Mathematical Problems:A Personal Perspective, Oxford University Press
23.D.O.Shklarsky,N.N.Chentzov,I.M.Yaglom,(1993)The USSR Olympiad Problem Book ,Dover Publication
24.Brian S.Everitt,(2001),Οι κανόνες της τύχης,Εκδόσεις Κάτοπτρο
25.Θέματα Διαγωνισμού πόλεων(Tournament of Towns) 2001-2019
26. Crux mathematicorum Journal
27.Miklos Bona,(2006), A Walk Through Combinatorics ,World Scientific Publishing
28.Alexander Soifer,(2009), Mathematics as Problem Solving,Springer
29.Paul Zeitz,(2007),The art and craft of problem solving,John Wiley&Sons
30.C.Chong,K.Meng,(1992),Principles and Techniques in combibatorics,World Scinetific Publishing
31.1.Loren C. Larson(1983),Problem-Solving Through Problems ,Springer
32. A.Engel(2003), Problem-Solving Strategies,Springer
33.A.S. Posamentier,S.Krulik(1998),Problem-Solving Strategies For Efficient And Elegant Solutions,Corwin Press
34.https://artofproblemsolving.com
35.https://mathhmagic.blogspot.com/



Για την ελληνική γλώσσα:
Copyright:Δρούγας Αθανάσιος
Email:tdrougas11@gmail.com
Υποστηρικτικός δικτυακός τόπος:
►http://mathhmagic.blogspot.gr/
Social
►@m4qjEeeGrHjHhIs
►https://www.youtube.com/channel/UCAfs4zNCVFai9UfUhnTIVRA
►https://www.instagram.com/thanasesdrougas/
►https://www.facebook.com/thanasisdrougas/

Για τα βίντεο των παραπομπών χρησιμοποίησα το πρόγραμμα Doodly,για τα σχήματα το πρόγραμμα People Builder και το PowerPoint ενώ για το εξώφυλλο το πρόγραμμα Canvas.

Τυπικά το βιβλίο απευθύνεται σε μαθητές μέσης εκπαίδευσης που επιθυμούν να συμμετέχουν σε μαθηματικούς διαγωνισμούς,σε μαθηματικούς και σε λάτρεις των μαθηματικών,κατά βάση όμως, απευθύνεται σε οποιονδήποτε έχει την επιθυμία να αποκτήσει τριβή με έξυπνα προβλήματα,να χτίσει χαρακτήρα λύτη και να αναπτύξει αναλυτικές και επαγωγικές ικανότητες καθώς παρόμοιου τύπου διαγωνιστικά θέματα δεν απαιτούν ευρύ θεωρητικό υπόβαθρο αλλά επιμονή,συγκέντρωση και ατόφια σκέψη.

Τα προτεινόμενα προβλήματα-ασκήσεις είναι κατηγοριοποιημένα στις ομάδες: Συνδυαστική απαρίθμηση,Συνδυαστική Γεωμετρία,παίγνια,χρωματισμοί, αναλλοίωτες, το παρόν δίνει και η βασική θεωρία αριθμών.Δίνεται έμφαση στην αναλυτική παρουσίαση των λύσεων με πινελιές ευρετικής και αποφεύγεται εσκεμμένα η «παραφορτωμένη» μεθοδολογία.Είναι γνωστό στους μαθηματικούς γραφιάδες ότι υπάρχουν δυο σχολές σκέψης στην συγγραφή μαθηματικών κειμένων που αφορούν μαθητές-φοιτητές, είτε ο συγγραφέας προσπαθεί να κάνει την παρουσίαση του όσο πιο ξεκάθαρη και ευανάγνωστη γίνεται με κίνδυνο να γίνει προφήτης του μαθητικού μπούσουλα,είτε να αφήνει το μαθητή να εμπλακεί ο ίδιος θετικά στην κατανόηση και το ξεκλείδωμα των εννοιών που πραγματεύονται.Κλίνω προς το δεύτερο,οτιδήποτε κατακτάται με κόπο δύσκολα ξεχνιέται! Το ανά χείρας πόνημα κινείται σε μια μέση οδό,αυτός είναι και ο λόγος που ο βαθμός δυσκολίας κλιμακώνεται για μια ομαλή μετάβαση σε απαιτητικότερα θέματα.

Οι λύσεις των προβλημάτων βρίσκονται στο δεύτερο μέρος του βιβλίου,ώστε ο αναγνώστης–λύτης να προσπαθήσει πρώτα μόνος του και σε δεύτερο χρόνο να καταφύγει στην επαλήθευση της προσπάθειας του.

Συνολικά περιλαμβάνονται 177 λυμένα παραδείγματα με υποδείξεις ευρετικής,206 προβλήματα και ασκήσεις προς λύση καθώς επίσης και 25 παραπομπές γραμμωτού κώδικα (Qr-Code) σε αντίστοιχα οπτικοποιημένα ως βίντεο-διαγωνιστικά προβλήματα στο κανάλι μου στο Youtube. Η λίστα των προβλημάτων θα ανανεώνεται συνεχώς.





Υποστηρικτικός δικτυακός τόπος
► http://mathhmagic.blogspot.gr/
Social
► @m4qjEeeGrHjHhIs
► https://www.youtube.com/channel/UCAfs4zNCVFai9UfUhnTIVRA
► https://www.instagram.com/thanasesdrougas/
► https://www.facebook.com/thanasisdrougas/

Σκανάρετε τον γραμμωτό κώδικα (Qr-Code) και μεταβείτε σε οπτικοποιημένα διαγωνιστικά προβλήματα στο κανάλι μου στο Youtube.